МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.С. А Х Т А М О В А

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университету и техническому образованию в качестве учебно–методического пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05– «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», направленность (профиль) 44.03.05.34 «Математика и физика». (Протокол № 747 от 30.04. 2019 г.)

КРАСНОЯРСК-ЛЕСОСИБИРСК 2020

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я7
А95

Рецензенты:
А.П. Ляпин – кандидат физико-математических наук, доцент базовой кафедры вычислителных и инфомационных технологий института математики и фундаментальной информатики СФУ;
П.А. Егармин – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных и технических систем Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева

Ахтамова С.С.
А95 Введение в математический анализ: учеб.–метод. пособие / С.С.Ахтамова. – Красноярск: Сиб. федерал. у–т, 2020. – 138 с.

ISBN 978-5-7638-4169-5

Пособие содержит начальные разделы предмета «Математичекий анализ». Включает в себя лекционный курс с множеством прикладных наработок автора и дополнительный методический материалы по предмету. Предназначено для студентов изучающих математику в качестве основной дисциплины, обучающихся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», направленность (профиль) 44.03.05.34 «Математика и физика».

ISBN 978-5-7638-4169-5

ВВЕДЕНИЕ

Математическая подготовка – это одна из основных составляющих образования, которое получает студент педагогического вуза. Основы математического образования закладываются в самые первые месяцы учебы при изучении базовых курсов математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Изучение курса математического анализа начинается с теории пределов. Этот раздел математики всегда считался «трудным» для понимания. Но без понимания фундаментальных основ невозможно понимание других разделов математики.

В пособии достаточно подробно описываются доказательства многих теорем. Тонкие математические понятия иллюстрируются рисунками. Автор ставит цель: показать основные приемы решения задач по изучаемой теме. Многие задачи приводятся с решением. В частности, в приложении показаны основные приемы вычисления пределов.

В заключение теоретического блока студенту предлагается список вопросов для повторения материала, который может использоваться при подготовке к коллоквиуму, зачету, экзамену.

В приложении приведена многовариантная контрольная работа по теме «Пределы» и разобраны примеры ее выполнения. Для проверки качества усвоения материала предлагается выполнить задания для самостоятельного решения и ответить на вопросы итогового теста.

Цель практикума – помощь студентам-первокурсникам в освоении основ математического анализа, овладении логическими символами и умениями применять их при решении задач.

Автор надеется, что пособие поможет студентам преодолеть многие трудности при освоении начального курса математического анализа.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Введем необходимые определения и обозначения.

Определение 1. Множество вещественных чисел *x*, удовлетворяющих неравенствам , $a \le x \le b$ называется *сегментом* или *отрезком* и обозначается [a,b].

Определение 2. Множество вещественных чисел *x*, удовлетворяющих неравенствам *a<x<b,* называется *интервалом* и обозначается (a,b). Множество всех вещественных чисел называется *числовой прямой* и обозначается $(-\infty, +\infty)$.

Определение 3. Множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенству $x \ge a$ $($*или* $x \le b)$, называется *полупрямой* и обозначается $[a,+\infty)$ или $(-\infty, b]$.

Определение 4. Множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенству *x>a* (или *x<b*), называется *открытой полупрямой* и обозначается $(a,+\infty)$ или $(-\infty, b)$.

Определение 5. Любой интервал, содержащий заданную точку *x*, называется *окрестностью* точки *x*.

Определение 6. Интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ называется ε-*окрестностью точки x* и обозначается $O(x, \varepsilon)$.

Определение 7. ε-*окрестностью бесконечности* $O(x,\varepsilon)$ называют множество всех чисел *x*, таких, что $|x| > \varepsilon$, т.е. $O(\infty, \varepsilon) = \{x : |x| > \varepsilon\}$.

ε-*окрестностью* $+\infty$ называется $O(+\infty, \varepsilon) = \{x : x > \varepsilon\} = (\varepsilon, +\infty)$.

ε-*окрестностью* $-\infty$ называется $O(-\infty, \varepsilon) = \{x : x < \varepsilon\} = (-\infty, \varepsilon)$.

1.1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества является *неопределяемым* (т.е. не определяется через какие-то другие более простые понятия).

Это понятие, как и понятие элемента множества, нам ясно интуитивно на основе опыта освоения реального мира, например:

- множество действительных чисел;
- множество зрителей в зрительном зале;
- множество точек заданной кривой.

Множества обозначим заглавными латинскими буквами A, B, C, D,…; их элементы – прописными буквами a; b; c; d… .

Обозначения:

$x \in A$ (x является элементом множества A);

$x \notin A$ (x не является элементом множества A);

$\varnothing$ – пустое множество (не содержит ни одного элемента);

$A \subset E$ (множество А является подмножеством множества Е, т.е. А состоит только из элементов, принадлежащих Е);

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента а;

$\{a; в; c; d; e\}$ – множество, образованное элементами а; в; с; d; е.

Для того чтобы обозначить множество элементов, обладающих некоторыми свойствами *q(x)*, будем использовать запись $\{$ *x: q(x)* – обладает свойством *q(x)* $\}$.

Например, множество рациональных чисел *Q* можно записать в виде

$$Q = \{\ x\colon\ \ x = \frac{n}{m};\ \ n \in Z;\ \ m \in N\ \},$$

где *Z* – множество целых чисел; N – множество натуральных чисел. Упомянутые последние два множества можно еще записать в виде

$$N = \{1;2;3;4;...;n;...\}$$

$$Z = \{0;\pm 1;\pm 2;...;\pm n;...\}$$

Определение 1. *Объединением* двух множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит *либо* множеству *A*, *либо* множеству *B*. Обозначается объединение множеств *A* и *B* как $A \cup B$.

Аналогично вводится объединение множеств A_i, пронумерованных с помощью некоторого множества индексов:

$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ – множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит по крайней мере одному из A_i.

Пример. Пусть дан набор из четырех множеств

$$A_1 = \{1;2;3\} \quad A_2 = \{2;3;4\}$$

$$A_3 = \{2;4;5;6\} \quad A_4 = \{8\}$$

тогда объединение этих множеств запишется

$$\bigcup_{i=1,5} A_i = \{1;2;3;4;5;6;8\}$$

Определение 2. *Пересечением* множеств *A* и *B* $(A \cap B)$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и множеству *A*, и множеству *B* (другими словами, пересечение состоит из элементов, принадлежащих одновременно и множеству *A*, и множеству *B*) (рис. 1).

Пример. Если

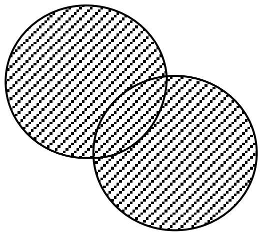
$$A = \{1;2;3;5;7;\}; \quad B = \{-2;-1;0;1;2\}, \quad то \quad A \cap B = \{1;2\}$$

Разностью множеств *A* и *B (A\B)* называется множество, состоящее из всех элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B* (рис. 2).

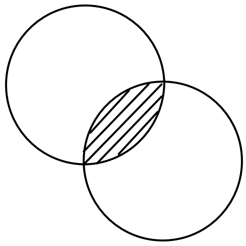
Пример. Если

$$A=\{1;2;3;4;5\},\quad B=\{4;5;6;7;8\},\quad \textit{тогда}\quad A\setminus B=\{1;2;3\}.$$

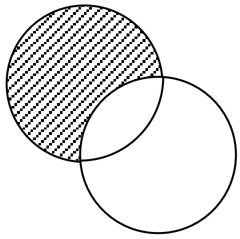
Введенные понятия иллюстрируют рис 1, 2, 3.



A ∪ B
Рис. 1



A ∩ B
Рис. 2



A / B
Рис. 3

Отметим некоторые свойства, которыми обладают введённые выше операции.

1. $A\bigcup B=B\bigcup A;\quad A\bigcap B=B\bigcap A$ (коммутативность).
2. $\left.\begin{matrix}(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)\\(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)\end{matrix}\right\}$ (ассоциативность).
3. $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ (дистрибутивность).
4. $A\bigcup A=A;\quad A\bigcap A=A$.
5. $A\bigcup\varnothing=A;\quad A\bigcap\varnothing=\varnothing$.
6. Если $A\subset B,\quad \textit{то}\quad A\bigcup B=B;\quad A\bigcap B=A$.

Логические символы

Если из некоторого свойства *A* следует, что выполняется свойство B, то будем записывать: $A\Rightarrow B$.

Пример. Если A_6 – натуральное число n делится на 6, а A_3– натуральное число n делится на 3, то верно: $A_6\Rightarrow A_3\quad (A_6\ \textit{влечет}\ A_3)$.

Если из *A* следует *B*, а из *B* следует *A*, то будем писать: $A\Leftrightarrow B$. В этом случае говорят ещё: *A* эквивалентно *B; A* равносильно *B*. Это также формулируется в форме «для того, чтобы *A* …, необходимо и достаточно, чтобы *B*…).

Мы часто будем использовать выражения: «утверждение *A* выполняется для любого …» (например, для любого натурального числа n). В этом случае мы будем употреблять символ $\forall$ ($\forall n$). Вместо слов «существует …, такое, что …» будем употреблять символ ∃.

1.2. Эквивалентность множеств

Определение 1. Множества *A* и *B* называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие (другими словами, всякому элементу $a \in A$ соответствует, причем единственный, элемент $b \in B$ и наоборот).

Эквивалентность множеств мы будем символически записывать A~B.

Примеры

1. Если $A = \{1;2;3\}$ $B = \{a;b;c\}$, *то* $A \sim B$.

Взаимно однозначное соответствие устанавливается, например, так: $1 \leftrightarrow a$; $2 \leftrightarrow b$; $3 \leftrightarrow c$ или $1 \leftrightarrow b$; $2 \leftrightarrow c$; $3 \leftrightarrow a$.

2. Множество натуральных чисел эквивалентно множеству четных положительных чисел (взаимно однозначное соответствие схематически показано стрелками):

$$N = \{1;2;3;4;5;6;...\}$$
$$\updownarrow\updownarrow\updownarrow\updownarrow\updownarrow\updownarrow$$
$$D = \{2;4;6;8;10;12;...\}$$

Между двумя конечными множествами (состоящими каждое из конечного числа элементов) можно установить взаимно–однозначное соответствие тогда и только тогда, когда оба этих множества состоят из одного и того же числа элементов.

Бесконечное множество, как это видно из второго примера, может быть эквивалентно своему собственному подмножеству. (Собственным подмножеством называется подмножество множества *A*, не совпадающее с самим множеством *A*)

Определение 2. Множество, эквивалентное, множеству натуральных чисел N, называется счетным множеством.

Замечание. Чтобы доказать счётность множества *A*, его элементы достаточно «пронумеровать», т.е. установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества *A* и элементами множества натуральных чисел.

Например, множество *A* можно записать в виде

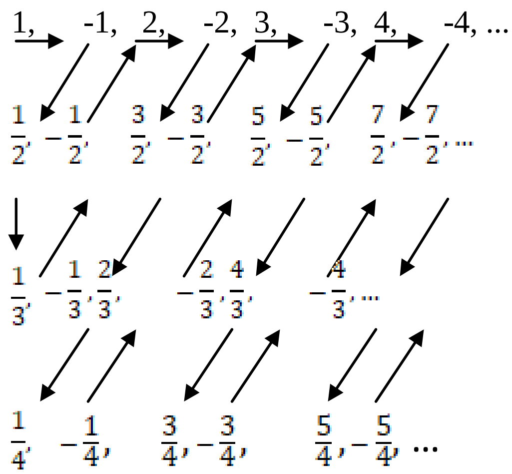
$$A = \{a_1; a_2; a_3; a_4 ... a_n ...\}.$$

Пример. Докажем счетность множества рациональных чисел.

Без ограничения общности доказательства будем считать, что всякое рациональное число записано в виде *несократимой* дроби

$$\frac{m}{n} \quad (где \quad m \in Z; \quad n \in N).$$

Запишем рациональные числа в виде бесконечной таблицы.



«Нумерация» элементов этой таблицы показана «стрелками». Двигаясь по намеченному пути, для каждого элемента «подберем» натуральное число (его номер при обходе). Причем соответствие между рациональными числами из таблицы и натуральными «номерами» взаимно однозначно.

Пример. Докажем, что множество действительных чисел R не является счётным.

Доказательство. Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

где a_0 – некоторое целое число (положительное или отрицательное); знаки после запятой $a_i \left(i = 1, 2, 3, \dots\right)$ – это любые цифры $0 \le a_i \le 9$.

Доказательство. Его проведем методом «от противного». Предположим, что множество всех действительных чисел счетно и нам удалось «пронумеровать» все его элементы:

$$x_1 = a_0^1, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots$$
$$x_2 = a_0^2, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots$$
$$x_3 = a_0^3, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Построим действительное число, которому «не досталось» номера при нумерации $\hat{x} = x_0, x_1 x_2, x_3 \dots$ Для этого выберем

$x_0 \neq a_0^1$; $x_1 \neq a_1^2$; $x_2 \neq a_2^3$; $x_3 \neq a_3^4 \dots$ Получаем $\hat{x} \neq x_к$ для любого *k*, так как отличается от каждого из $x_к$ хотя бы одним знаком.

Но это противоречит нашему предположению, что мы пронумеровали все действительные числа. Утверждение доказано.

1.3. Некоторые подмножества множества действительных чисел

Окрестностью (ε–окрестностью) точки $x_0 \in R$ будем называть интервал вида $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ (рис. 4).

Другими словами, точки *ε–окрестности* – это все точки, которые находятся от точки x_0 на расстоянии меньше ε (очевидно, что здесь $\varepsilon > 0$).

Множество $A \subset R$ называется ограниченным снизу, если $\exists\ C \in R : \forall x \in A \Rightarrow x \geq C$ (рис.5) (существует константа C такая, что для всех элементов x из A выполняется неравенство $x \geq C$. Эта константа C называется нижней гранью множества A).

Множество $A \subset R$ называется ограниченным сверху, если $\exists\, C \in R : \forall\, x \in A \Rightarrow x \leq C$ (рис. 6).

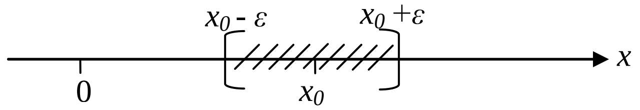


Рис. 4

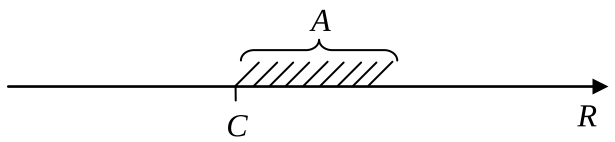


Рис. 5

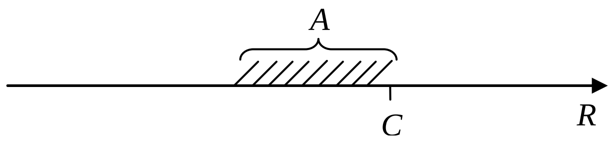


Рис. 6

Множество $A \subset R$ называется *ограниченным*, если это множество ограничено и сверху, и снизу: $(\exists\, C_1 \in R;\ C_2 \in R : \forall\, x \in A \Rightarrow C_1 \leq x \leq C_2)$ (рис. 7).

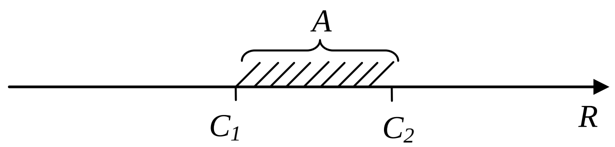


Рис. 7

1.4. Точные грани множеств

Определение 1. Пусть A – некоторое подмножество множества действительных чисел R $(A \subset R)$. Действительное число $\tilde{x} \in R$ называется точной верхней гранью (супремумом) множества A, если:

1) $\tilde{x} \geq x$ для всех $x \in A$;

2) для любого $x^0 \in R$ такого, что $x^0 < \tilde{x}$ существует по крайней мере один элемент $x \in A$ такой, что $x > x^0$.

Понятно, что множество A «расположено» на числовой прямой левее точки $\tilde{x}$. Причем $\tilde{x}$ – самое «маленькое» действительное число, удовлетворяющее этому свойству ($\forall x \in A;\ x \le \tilde{x}$).

Если $\tilde{x}$ – супремум множества A, то мы будем это записывать следующим образом: $\tilde{x} = supA$.

Отметим, что если множество A содержит свой «наибольший» элемент, то супремум совпадает с этим максимальным элементом:

$sup[a;в]=в;$ $\qquad$ $sup(a;в]=в.$

Но понятие супремума определено и для тех множеств, для которых не определено понятие максимального элемента: $sup(a;в)=в$.

Определение 2. Элемент $\tilde{x} \in R$ называется точной нижней гранью $inf\,A$ множества A (инфимумом A) при условиях:

1. $\forall x \in A \Rightarrow \quad x \ge \tilde{x} = inf\,A;$

2. $\forall x^0 \in R : x^0 > \tilde{x} \quad \exists x \in A : x < \tilde{x}$ (для любого действительного числа x^0 такого, что $x^0 > \tilde{x}$ существует по крайней мере один элемент $x \in A$ такой, что $x < x^0$).

Точные верхние грани могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству A.

Пример.

Если $A=(-2;4)$ – интервал, *то* $sup\,A=4 \notin A;\ inf\,A=-2 \notin A.$

$N=\{1;2;3;\ldots\}\ inf\,N=1 \in N; \quad supN=+\infty \notin N.$

Приведем без доказательства теорему о существовании точных граней.

Теорема. Пусть R – множество всех действительных чисел и $A \subset R$ – непустое ограниченное сверху множество. Тогда существует конечная точная верхняя грань $supA$.

Аналогично, если A – ограниченное снизу непустое множество, то существует конечная точная нижняя грань $inf\,A$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Доказать, что множества

$A=\{x \in R: \quad 0 \le x \le 1\}\ и\ B=\{x \in R: \quad a \le x \le b\}$ эквивалентны.

2. Доказать, что множество точек интервала $(a;b)=\{x \in R: \quad a < x < b\}$ эквивалентно множеству всех действительных чисел.

3. Доказать, что множество четных натуральных чисел эквивалентно множеству нечётных натуральных чисел.

$(A=\{n \in N: \quad n=2k; \quad k \in N\}\ B=\{n \in N: \quad n=2k-1; \quad k \in N\};$

Доказать, что $A \sim B$.

4. Доказать, что множество точек плоскости с целыми координатами счетно.

5. Доказать, что множество точек трехмерного пространства R^3 с целыми координатами $A=\{(x; y; z)\in R^3: x\in Z; y\in Z; z\in Z\}$ счетно.

6. Доказать, что множество точек окружности без одной точки эквивалентно множеству точек прямой.

7. Доказать, что множество многочленов вида $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ произвольной степени $n=0, 1, 2, \ldots$ с рациональными координатами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ счетно.

8. Доказать, что множество точек сферы без одной точки эквивалентно множеству точек плоскости.

9. Доказать, что множество натуральных чисел $N=\{1;2;3;4;\ldots\}$ ограничено снизу, но не является ограниченным сверху.

10. Доказать, что множество целых чисел $Z=\{0;\pm1;\pm2;\ldots\}$ не является ограниченным ни снизу, ни сверху.

11. Доказать ограничесnность следующих множеств:

а) интервал $(a;в)=\{x\in R : a<x<в\}$; *отрезок* $[a;в]=\{x\in R : a\le x\le в\}$;

б) полуинтервалы $[a;в)=\{x\in R : a\le x<в\}$; $(a;в]=\{x\in R : a<x\le в\}$.

12. На множестве рациональных чисел привести примеры подмножеств: а) ограниченного; б) ограниченного сверху, но не ограниченного снизу.

Глава 2. ОТОБРАЖЕНИЯ

При изучении различных явлений природы, а также при решении инженерных, технических задач мы замечаем, что одни величины сохраняют одно и то же численное значение, а другие величины связаны между собой определенной зависимостью.

Величины первого вида принято называть **постоянными**. Примерами таких величин могут служить: отношение длины окружности к своему диаметру (число π), отношение диагонали квадрата к его стороне, равное $\sqrt{2}$, и др.

Примерами величин другого типа могут служить: 1) зависимость площади круга от его радиуса $S=\pi r^2$, где S – площадь круга, r – радиус круга; 2) величина заработка рабочего при сдельной оплате труда зависит от фактической выработки и др.

Следует заметить, что радиус круга r, фактическая выработка рабочего не могут быть отрицательными величинам и каждому значению этих величин соответствует значение S площади круга в первом примере и величина заработка – во втором.

Обобщая эти примеры, можно получить следующие понятие:
если каждому элементу x из множества E по некоторому правилу (закону) ставится в соответствие единственный элемент y другого множества F, то

говорят, что между элементами (переменными) x и y *существует функциональная зависимость*.

2.1. Отображения и функции

Пусть заданы множества E и F. Отображением E в F или *функцией,* определенной на E со значениями в F, называется соответствие f, которое каждому элементу x из E относит некоторый элемент y из F, обозначаемый $f(x)$.

Обозначение $E \xrightarrow{f} F$ показывает, что f является отображением E в F.

При этом для каждого данного $x \in E$ элемент $y=f(x)$ множества F называется образом элемента $x \in E$ при данном отображении или значением данной функции для данного значения ее аргумента x. Далее будем предполагать, что E и F являются подмножествами множества действительных чисел R или совпадают с множеством R. То есть мы будем рассматривать *действительные функции действительного аргумента.*

Множество всех значений $x \in E$, для которых определена функция $f(x)$, будем называть *областью определения* этой функции.

Множество всех тех элементов $y \in F$ множества F, которые являются значениями функции $y=f(x)$ хотя бы для одного $x \in E$, называется *множеством значений функции* $y=f(x)$. Будем обозначать множество значений функции $f(E)$ и называть это множество образом множества E.

Если $f(E)=F$, то есть любой элемент множества F является значением функции $f(x)$ при $x \in E$, то говорят, что функция $y=f(x)$ отображает E на F.

Например, если $y=sinx$; E=[0;2π]; F=[–1;1], то $y=sinx$ – отображение E на F.

Возможен такой частный случай, когда каждый элемент, принадлежащий F, имеет единственный прообраз в E. В этом случае можно определить обратное отображение (функцию).

Определение 1. Функцией, *обратной к f,* называется функция f^{-1}, которая каждому элементу y, принадлежащему F ставит в соответствие единственный элемент $x=f^{-1}(y)$, принадлежащий E такой, что $f(x)=y$.

Например, функция $y=\sqrt{x}$ служит обратным отображением для функции $y=x^2$ (для всех $x \geq 0$). Обе эти функции отображают множество R действительных чисел на себя.

Наиболее часто встречается случай, когда E и F представляют собой подмножества множества действительных чисел R. В этом случае отображение называют *функцией числового аргумента*. Для наглядного представления таких функций может быть использован график (множество точек плоскости R^2 с абсциссой $\boldsymbol{x}$ и ординатой $f(x)$).

Если $f(E)=F$ и $f(x_1) \neq f(x_2)$ при любых $x_1, x_2 \in E$ и $x_1 \neq x_2$, то отображение $y=f(x)$ множества E на множество F называется взаимно однозначным, или биективным, или биекцией. Тогда каждый элемент множества F является образом при отображении f некоторого *единственного* элемента множества E.

Упражнения

Доказать, что являются биекциями отображения:

а) $y=ax+в$ $(a\neq 0)$; $E=R$; $F=E$;

б) $y=\cos x$; $E=[0;\pi]$; $F=[-1;1]$;

в) $y=tgx$; $E=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$; $F=R$;

г) $y=\ln x$; $E=(0;+\infty)$; $F=(-\infty;+\infty)$.

Определение 2. Если $y=f(x)$ – функция с областью определения E и множеством значений F, являющаяся биекцией, то обратной функцией

$x=f^{-1}(y)$ будем называть отображение из F в E, ставящее в соответствие каждому элементу y из множества F его «прообраз», то есть такой элемент $x\in E$, что $y=f(x)$.

Замечание. Из–за того, что отображение $y=f(x)$ является взаимно однозначным, каждый элемент $y\in F$ имеет прообраз $x\in E$, причем этот прообраз единствен. Отметим, что при сделанных предположениях обратное отображение опять взаимно однозначно (т.е. у самого обратного отображения опять есть обратное). Причем обратной к функции $x=f^{-1}(y)$ является сама функция $y=f(x)$ $((f^{-1})^{-1}=f)$.

Примеры

1) $y=\sin(x)=f(x)$

$E=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; $F=[-1;1]$

$x=f^{-1}(y)=\arcsin(y)$.

2) $y=ax+в=f(x)$

$E=(-\infty;\infty)$; $F=(-\infty;\infty)$

$x=\frac{1}{a}y-\frac{в}{a}=f^{-1}(y)$.

3) $y=e^x=f(x)$, $x=\ln y=f^{-1}(y)$

$E=(-\infty;\infty)$ $F=(0;+\infty)$.

Определение 3. Пусть E, F, G – три множества; f – некоторое отображение E в F; g – отображение F в G.

Композицией $g \circ f$ называется отображение E в G, определенное формулой $g \circ f\ (x)=g(f(x))$. В данном случае говорят, что на множестве Е задана сложная функция, обозначенная $g(f(x))$.

Заметим, что запись $g \circ f$ производится в порядке, обратном тому, в котором производится операция

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Областью определения отображения $g \circ f(x)$ является или вся область определения отображения f, или та ее часть, в которой содержатся значения $f(x)$, не выходящие из области определения отображения g.

Например, пусть $y=\sqrt[4]{cos^2 x-1}$. Так как областью определения отображения $\sqrt[4]{u}$ являются только $u \geq 0$, то областью определения сложной функции $y(x)$ будет только те значения x, для которых $cos^2 x-1 \geq 0$, то есть $cosx=\pm 1$, отсюда $x=\pi к$, где $к \in Z$.

2.2. Способы задания функций

Функция считается заданной, если приведено правило для определения значения функции, соответствующего данному значению аргумента.

Такое правило может быть представлено различными способами. Наиболее часто встречающимися из них являются *аналитический, графический и табличный.*

Наиболее удобный способ задания действительной функции действительного аргумента $y=f(x)$ предполагает такое ее определение, в котором прямо указывается, какие алгебраические действия и в каком порядке надо произвести над величиной x, чтобы получить соответствующее значение y.

Например, $y=x^3+1$; $y=\dfrac{1}{x^2+4x+10}$; $n!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n$ (последняя функция определена для всех целых положительных значений аргумента n).

Аналитический способ состоит в том, что задается формула (аналитическое выражение), указывающая, какие действия и в каком порядке следует выполнить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции.

Изложенный простой способ задания функций не всегда возможен и целесообразен. Даже такие элементарные функции, как $y=sinx$; $y=tgx$; $y=lnx$, мы задаем формулами, не дающими ответа на вопрос о том, как по данному значению x найти соответствующее значение функции.

Функция $y=sinx$ определяется, например, хорошо известными геометрическими *соображениями*; они дают нам уверенность в существовании и однозначной определенности функции $y=sinx$, но не содержат в себе никаких непосредственных указаний на то, как вычислить значение этой функции. Эту задачу приходится решать специально. О том, что решение ее далеко не просто, свидетельствует то, что до недавнего времени для этой цели широко использовались специальные таблицы таких функций, как *sinx, cosx, lnx* и т.п. Сегодня при работе с такими функциями применяются вычислительные средства (микрокалькуляторы, компьютеры).

Примеры

1. Пусть *y* означает наибольшее целое число, не превосходящее число *x*. Очевидно, что величина *y* определяется для любого значения *x*, то есть как функция от x. Эту функцию обычно называют *целой частью* (или антье) от *x* и обозначают символом [x], например [1,5]=1; [2]=2; [–π]= –4 и т.д.

2. Величина x–[x], называемая *дробной частью* числа *x*, также есть функция от *x*. Она периодична с периодом 1; так как $0 \le x - [x] < 1$, то эта функция отображает множество R в множество $0 \le x < 1$.

3. Введём функцию, называемую функцией Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рационально} \\ 0, \text{ если } x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

Функция *D(x)* определена для всех $x \in R$ и отображает *R* на множество, состоящее из двух точек $\{0;1\}$.

Приведенные примеры ясно показывают роль формулы, аналитического выражения в определении функциональной зависимости. В этом случае говорят, что имеется **аналитический способ** задания функции.

Существует также табличный способ задания функции при определённых дискретных значениях аргумента. Таблицы часто используются при обработке экспериментальных данных.

Табличный способ состоит в том, что функциональная зависимость задается в виде таблицы, содержащей ряд числовых значений аргумента и соответствующих им значений функции. Этот способ наиболее удобен, когда зависимость между переменными величинами изучается по результатам наблюдений. В частности, таблица является средством четкого отражения интересующих экономиста показателей, характерных для исследуемого периода. Так, например, для служащих банка представляет интерес таблица изменения курса доллара за определенный промежуток времени.

В случае, когда аналитическая зависимость для некоторых специальных функций сложна, создаются таблицы значений этих функций. Такова, например, таблица значений применяемой в теории вероятностей функции *Ф(x)*. Кроме того, для облегчения вычислений с часто встречающимися функциями составляют их таблицы, например таблицы квадратов, кубов, корней квадратных и кубических, логарифмов, тригонометрических функций и т.д.

Функции можно задавать и графическим способом. Напомним, что графиком функции $y=f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости, ордината y и абсцисса x которых связаны соотношением $y=f(x)$.

Графический способ задания функции состоит в том, что в данной системе координат задается некоторая кривая. Абсцисса каждой точки кривой дает значение аргумента x, а ордината той же точки – соответствующее значение функции y.

Одним из преимуществ графического представления функции является его наглядность. По графику непосредственно видны основные свойства функции, весь ход ее изменения.

Результаты некоторых наблюдений представляются в виде графика, для этого применяются самопишущие приборы. Так, термограф дает кривую зависимости температуры от времени.

Недостатком графического способа задания функции является ограниченная точность определяемых значений у.

Глава 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. Числовая последовательность. Предел последовательности

Определение 1. *Последовательностью* называется функция, определенная на множестве натуральных чисел, поэтому ее значения могут быть занумерованы: $f(1), f(2), ...f(n)....$

Определение 2. *Числовой последовательностью* называется функция целочисленного аргумента, то есть отображение $f\colon\ N \to R$, члены которой $f(n)$ – вещественные числа. Примером числовой последовательности может служить натуральный ряд 1, 2, … n, …

Пусть x_n – значение этой функции, отвечающее номеру n, то есть $x_n = f(n)$. Пара (n, x_n) называется элементом последовательности. Чаще используют краткую запись элемента как x_n.

Последовательность будем обозначать символом $\{x_n\}$ или перечислением элементов $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$. Элемент x_n называют также n–м членом последовательности.

Примеры последовательностей:

1) $\{1; 2; 3; 4; \ldots; n; \ldots\}$;
2) $\left\{1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; ...; (-1)^{n+1}\frac{1}{n}; ...\right\}$;

3) $\{a; a\cdot q; a\cdot q^2; ...a\cdot q^n;\}$(геометрическая прогрессия);

4) $\left\{0; 1; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}; ...; \frac{1+(-1)^n}{n}; ...\right\}$.

Определение 3. Число *a* называется *пределом последовательности*, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует число *N*, зависящее от ε, такое, что для всех *n*>*N* выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$.

Запишем это определение с помощью логических символов:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел, то говорят, что она сходится. В противном случае говорят, что последовательность расходится.

Геометрический смысл определения

Число *a* является *пределом последовательности* $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой (сколь угодно малой) ε–окрестности точки *a* находятся все элементы последовательности, начиная с некоторого номера N. Причем номер N в общем случае зависит от величины ε (см. рис. 8).

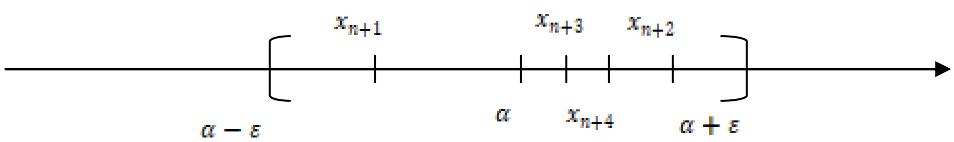


Рис. 8

Иными словами, вне любой, сколь угодно малой окрестности точки *a* лежит лишь конечное число членов последовательности. Отсюда ясно, что добавление или исключение конечного числа членов последовательности не влияет на сходимость последовательности и на значение её предела.

Определение 4.

Будем говорить, что $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (предел последовательности $\{x_n\}$ равен +∞), если $\forall C \in R \quad \exists N : при\ n > N \Rightarrow \quad x_n > C.$

Другими словами, последовательность имеет предел +∞, если при бесконечном возрастании номеров элементов *все* элементы этой последовательности уходят «бесконечно далеко вправо» (рис. 9).

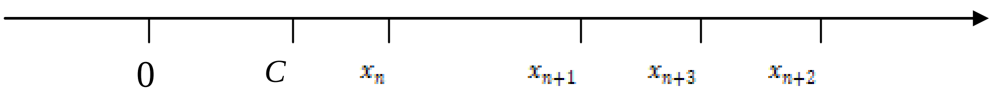


Рис. 9

Определение 5. Говорят, что предел последовательности равен (–∞) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall C \quad \exists N: \quad при\ n > N \Rightarrow x_n < C$.

Определение 6. Говорят, что предел последовательности равен (+∞)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \quad \exists N: \quad при\ n > N \Rightarrow |\ x_n\ | > C$$

Последовательности, предел которых равен +∞, или –∞, или ∞, называются *бесконечно большими*.

Отметим, что бесконечно большая последовательность не является сходящейся.

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{n} = 0$.

Запишем на языке логических символов, что нам нужно доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad при \quad n > N \Rightarrow \left|\frac{4}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Видим, что достаточно получить неравенство $\frac{4}{n} < \varepsilon$. Другими словами, нужна оценка $n > \frac{4}{\varepsilon}$. Для этого достаточно взять $N_0 = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]$ – целая часть числа $\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]$. При $n > N_0$ получаем требуемую оценку.

Замечание. Аналогично доказывается, что для любой константы $C \in R$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C}{n} = 0$.

3.2. Некоторые свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1. Всякая сходящаяся последовательность имеет только *один предел.*

Доказательство (проведём методом «от противного»)

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$; $a \neq b$.

Выберем $\varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$ и построим две непересекающиеся окрестности $A_\varepsilon = (a-\varepsilon; a+\varepsilon) \quad и \quad (b-\varepsilon; b+\varepsilon) = B_\varepsilon$(рис. 10)

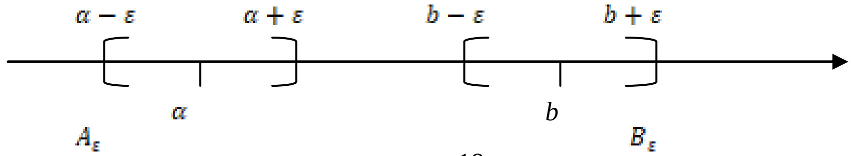


Рис. 10

Из определения предела последовательности

$$\begin{array}{l} \exists N_1: при \quad n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \quad (то\,есть \quad x_n \in A_\varepsilon) \quad и \\ \exists N_2: при \quad n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon \quad (то\,есть \quad x_n \in B_\varepsilon) \end{array}.$$

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда при n>N имеем $x_n \in A_\varepsilon \bigcap B_\varepsilon = \varnothing$. Получаем противоречие (так как окрестности не пересекаются по построению).

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует число *M>0* такое, что для всех *n* выполняется неравенство $|x_n| \le M$.

($\{x_n\}$ – ограничена $\Leftrightarrow \exists M > 0: \forall n \Rightarrow |x_n| \le M$).

В противном случае последовательность называется неограниченной.

Для неограниченной последовательности справедливо утверждение:

$\forall M > 0 \quad \exists n: \quad |x_n| > M$.

Примеры ограниченных последовательностей:

1) $\{0;1;2;3;0;1;2;3\ldots\}$;

2) $\{1; -\frac{1}{2}; +\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \ldots; \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots\}$.

Теорема 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Это значит, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad при\; n > N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Вне окрестности $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ могут находиться только элементы $x_1, x_2, \ldots x_N$.(таких элементов конечное число).

Обозначим $M = \max\{|x_1|; |x_2|; \ldots |x_N|; |a-\varepsilon|; |a+\varepsilon|\}$.

Тогда $\forall n$ выполняется $|x_n| \le M$. То есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Теорема 3. Пусть сходятся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда сходятся последовательности $\{x_n + y_n\}$; $\{x_n - y_n\}$; $\{x_n \cdot y_n\}$. Если $b \ne 0$, то сходятся и последовательности $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. Причём имеют место формулы

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = a - b \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b \qquad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0) \qquad (4)$$

Докажем утверждение (1)

По предположению теоремы имеем

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \quad$ *при* $n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon / 2$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \quad$ *при* $n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon / 2$.

Выберем $N = \max\{N_1; N_2\}$.

Для $n > N$ оценим модуль разности:

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Мы доказали, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad$ *при* $n > N$ *следует* $|(x_n + y_n) - (a+b) < \varepsilon|$.

То есть доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Следствие из теоремы 3.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot c) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Для доказательства достаточно отметить, что

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и предел постоянной последовательности

$\lim\limits_{n\to\infty} c$ равен самой константе C $\left(\lim\limits_{n\to\infty} C = C\right)$.

Пример

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 4n + 5}{5n^2 + 7n + 4}$. Отметим, что непосредственно теорему 3 здесь применить нельзя, однако после преобразований, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+5}{5n^2+7n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n^2-4n+5}{n^2}}{\dfrac{5n^2+7n+4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{5+\dfrac{7}{n}+\dfrac{4}{n^2}}=\frac{3-0+0}{5+0+0}=\frac{3}{5}$$

Согласно замечанию на с.15 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0(\forall C\in R)$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0$ для любого к=1, 2, 3,…

3.3. Подпоследовательности

Пусть имеется последовательность $\{x_n\}=\{x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;...\}$ и пусть числа $k_1<k_2<k_3<...<k_i<...$ образуют возрастающую последовательность натуральных чисел.

Тогда $\{y_i\}=\{x_{k_i}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Нетрудно доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то сходится и любая её подпоследовательность, причём к тому же самому пределу.

Определение 1. Точка a называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности этой точки находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

Отметим отличие между определением предела и определением предельной точки. Если $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, то не только в любой ε–окрестности находится бесконечно много «представителей» последовательности, но и за пределами этой окрестности находится конечное число элементов последовательности.

Замечание. Можно проверить, что если a – предельная точка последовательности, то a является пределом некоторой подпоследовательности данной последовательности.

Примеры

1. $\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};...;\frac{1}{n};...\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Последовательность сходится, поэтому у неё только одна предельная точка $a=0$ (предел этой последовательности).

2. $\{-2;0;2;-2;0;2;...\}$. Последовательность расходится. Данная последовательность имеет три предельных точки $a_1=2;\quad a_2=0;\quad a_3=-2$.

Упражнения

1. «Придумать» последовательность, имеющую бесконечно много предельных точек.
2. «Придумать» последовательность, предельными точками которой являются все действительные числа.
3. «Придумать» последовательность, не имеющую конечных предельных точек.

Приведем без доказательства теорему.

Теорема (Больцано–Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

3.4. Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонно возрастающей (монотонно убывающей)*, если при любом n=1,2,3,… выполняется $x_{n+1} \ge x_n \left(x_{n+1} \le x_n\right)$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется строго монотонно возрастающей (строго монотонно убывающей), если при любом n=1,2,3,… выполняется строгое неравенство: $x_{n+1} > x_n \left(x_{n+1} < x_n\right)$.

Примеры

1. $\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};...;\frac{n}{n+1};...\right\}$. Строго монотонно возрастающая последовательность.

Докажем это, т.е. докажем, что

$$\forall n \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)(n+1) > n(n+2) \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \Leftrightarrow 1 > 0$$

2. $\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n};...\right\}$ строго монотонно убывающая последовательность.
3. $\{2;2;3;3;4;4;...\}$ монотонно возрастающая последовательность (но не строго монотонная).

Без доказательства приведем теорему.

Теорема. Ограниченная сверху монотонно возрастающая последовательность (ограниченная снизу монотонно убывающая последовательность) сходится.

Глава 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

4.1. Предел функции в точке

Определение 1. Пусть функция *f(x)* определена в *проколотой окрестности точки а* (на множестве $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)\setminus\{a\}$). Говорят, что *A* – *предел функции f(x)* при *x*, стремящемся к *a*. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\right)$, если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0:\forall x:\quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

(Для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется положительное число δ, зависящее от ε, такое, что для всех $x\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)\setminus\{a\}$ выполняется $|f(x)-A|<\varepsilon$ (рис. 11).

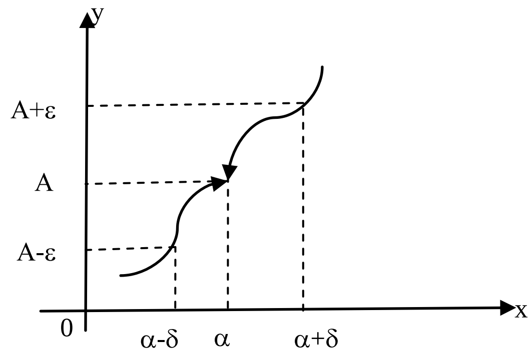


Рис.11

Предел *A* обозначается по-разному:

$A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, или $A=\lim\limits_{x_0} f(x)$, или $f(x)\underset{x\to x_0}{\to} A$

При вычислении пределов функций обычно пользуются следующими основными теоремами о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}=C$, где С – константа.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Константа выносится из-под знака предела.

Если пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ существуют и конечны, то

3. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Предел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Предел произведения равен произведению пределов.
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$. Предел частного равен частному пределов.

Пример

Доказать, что если $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то для любой последовательности *$\{x_n\}$*, сходящейся к *a ($x_n \neq a\ \ \forall n$)*, соответствующая последовательность значений функции *$\{f(x_n)\}$* сходится к *A*.

(*Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *где* $x_n \neq a\ \ \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

Доказательство

1. $A=\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_1: \quad \forall x: \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\delta_2 > 0 \quad \exists N: \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \delta_2$.

Выбираем $\delta_2 = \delta_1$, получаем $|x_n - a| < \delta_1$, но для таких x_n имеем $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Следовательно, для $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n > N \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$, это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Упражнение. Доказать обратное утверждение:

Если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq a\ \forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, следует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то в этом случае $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Из приведенных выше двух утверждений (прямого и обратного) получаем новое определение предела функций в точке, эквивалентное сформулированному ранее.

Определение 2.

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\{x_n\}: \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (x_n \neq a \quad \forall n) \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

(Если для любой сходящейся к точке *a* последовательности значений аргумента, члены которой не принимают значения *a*, соответствующие последовательности значений функции сходятся к одному и тому же числу А, то это число называется пределом функции в данной точке.)

Определение 1 предела функции в точке связывают с именем *французского математика О. Коши*, тогда как определение 2 – с именем *немецкого математика Г. Гейне.*

Примеры

1.Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$

Доказательство

Нужно доказать, что

$$(*) \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta: \quad \textit{при}\ 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} - 3\right| < \varepsilon.$$

Заметим, что $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$.

Нам удалось «сократить» на (*x–1)*, так как $|x-1|>0$, то есть $x\neq 1$.

Тогда утверждение (*) можно переписать в виде

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta:\quad при\, 0<|x-1|<\delta\Rightarrow|(x+2)-3|<\varepsilon$.

Но в последнем неравенстве $|(x+2)-3|=|x-1|$.

То есть для того, чтобы доказать утверждение (*) достаточно положить $\delta=\varepsilon$.

2 . Докажем, что предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

Доказательство

Выберем последовательность $\left\{x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}(1+4n)}\right\}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, при этом соответствующая последовательность значений функции стремится к единице:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}(1+4n)}\right)^{-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+4n)\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$$

Далее выбираем $\left\{x_n=\dfrac{1}{\pi n}\right\}$, вновь получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi n)=0$. Следовательно, для двух последовательностей аргумента, стремящихся к нулю, соответствующие последовательности значений функции стремятся к двум разным пределам. Пользуясь определением Г. Гейне, получаем, что функция $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке ноль.

4.2. Односторонние пределы

Понятие предела дает возможность исследовать поведение функции вблизи точки. Но характер «поведения» функции может быть различным справа и слева от точки *a* (рис. 12).

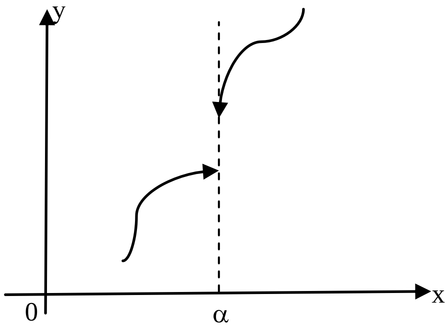


Рис.12

Введем определения предела функции в точке слева и предела функции в точке справа.

Определение 1. Говорят, что предел функции *f(x)* в точке *a* слева $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)\right)$ равен *A*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется положительное число δ, зависящее от ε, такое, что при $a-\delta<x<a$ справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\left(\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \textit{при}\, a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right)$

Определение 2. Говорят, что предел функции *f(x)* в точке *a* справа равен *A* $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A\right)$, если

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x: \quad a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

Для пределов функции в точке справа и слева часто используются обозначения

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0); \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0).$$

Пример. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$. Эта функция определена во всех точках действительной оси кроме x=0.

Отметим, что $f(x)=\begin{cases}1 & \textit{при} \quad x>0\\ -1 & \textit{при} \quad x<0\end{cases}$

График этой функции представлен на рис. 13.

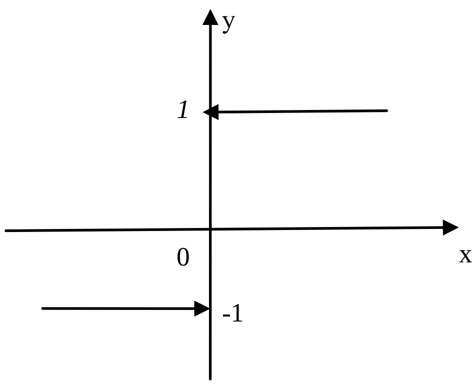


Рис.13

Из приведённых выше рассуждений получаем $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0} 1 = 1$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x} = -1$.

Теорема 1. Предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен числу А тогда и только тогда, когда в точке a существует пределы

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \qquad (1)$$

и ,

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \qquad (2)$$

причём оба предела (1) и (2) равны числу A.

$$\left(\exists \lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a-0} f(x) = A \quad и \quad \exists \lim_{x\to a+0} f(x) = A\right).$$

Доказательство

1. Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда имеем

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ при\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Но отсюда, с одной стороны

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ при\, a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

(это значит, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$), с другой стороны

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ при\, a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

(это то же самое, что $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$).

2. Предположим теперь, что

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

Из данного предположения получаем:

1. $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_1 > 0: \quad \forall x: \quad a-\delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.(так как $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$).

2. $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_2 > 0: \quad \forall x: \quad a < x < a+\delta_x \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (Так $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$).

Выбирая

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, *получаем* $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Это и означает, что существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Определение 3. Говорят, что предел функции *f(x)* при *x*, стремящемся к бесконечности равен A $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A\right)$, если

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists M > 0: \quad \forall x: |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

В этом случае график функции *y=f(x)* имеет двухстороннюю горизонтальную асимптоту *y=A*.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x^2+1}$. График этой функции имеет вид, представленный на рис. 14. Кривая, являющаяся графиком функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, называется «локон Аньези». Для этой кривой прямая *y=0* является двусторонней горизонтальной асимптотой.

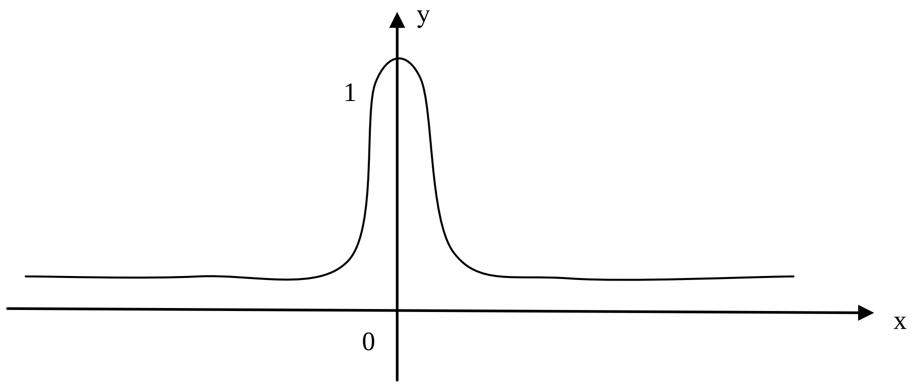


Рис.14

Определение 4. Будем говорить, что предел функции $f(x)$ *при* $x \to +\infty$ равен A $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A\right)$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0: \quad \forall x : x > M \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Аналогично вводится понятие одностороннего предела при $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M < 0: \quad \forall x : x < M \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$

Пример

Функция $y = \dfrac{1}{x}$. График этой функции – гипербола (см. рис. 15).

Здесь $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Пределы равны между собой, поэтому существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

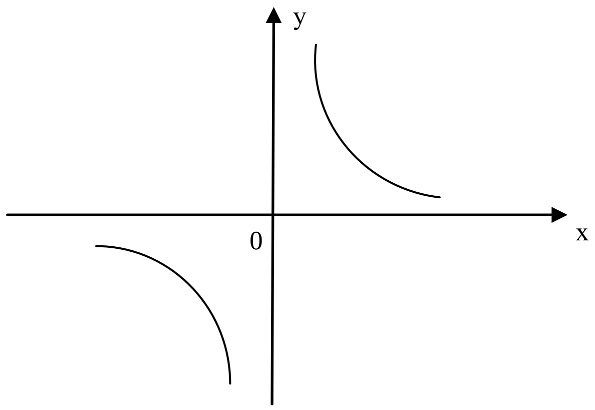


Рис.15

4.3. Бесконечно большие величины

Определение 1. Функция *y=f(x)* называется бесконечно большой величиной при *x*, стремящемся к a, если

$$\forall M>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x: \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M .$$

В этом случае мы будем говорить, что предел функции $f(x)$ при $x\to a$ равен ∞

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=\infty\right).$$

Например, функция $y=tgx$ является бесконечно большой при $x\to\frac{\pi}{2}$. Функция $y=\ln|x|$ является бесконечно большой при $x\to 0$ (рис. 16, 17).

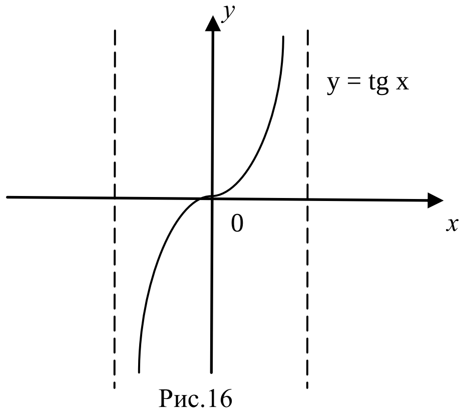


Рис.16

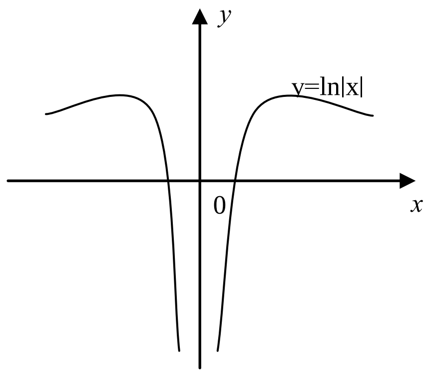


Рис. 17

Определение 2. Говорят, что предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ равен ∞, если

$$\forall M>0 \quad \exists N>0: \quad \forall x: \ |x|>N \Rightarrow |f(x)|>M.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+4)=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{|x|}=\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln|x|=\infty$ (проверить).

Если предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ равен ∞ и функция $f(x)$ при *x* стремящемся к a сохраняет знак

$\left(f(x)>0 \quad \text{или} \quad f(x)<0 \ \text{в некоторой проколотой окрестности точки } a\right)$

будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Запишем сказанное выше с помощью логических символов:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0 \ \exists\delta>0: \forall x: \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0 \ \exists\delta>0: \forall x: \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<-M$.

Пример. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln|x| = -\infty$ (см. рис. 15).

Упражнения

Записать с помощью логических символов (по аналогии) определения:

1. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$; 2. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$; 3. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$;

4. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$; 5. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$; 6. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$;

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$; 8. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$; 9. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$;

10. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$; 11. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$; 12. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$;

Приведите свои примеры функции, удовлетворяющих соотношениям 1–12. Проиллюстрируйте поведение этих функций графически.

4.4. Ограниченные функции

Определение. Пусть $A\subset R$ – некоторое подмножество на множестве действительных чисел. Говорят, что функция $y=f(x)$ (определенная во всех точках множества А) ограничена на А, если существует такая константа *M>0*, что

$|f(x)|\le M$ *для всех* $x\in A$, ($f(x)$ *ограничена на* $A \Leftrightarrow \exists M>0:\ |f(x)|\le M\quad \forall x\in A$).

В противном случае будем говорить, что функция *f(x)* не ограничена на множестве *A*,

$$\left(\forall M>0\quad \exists x_0\in A: |f(x_0|>M\right).$$

Например, функция $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ ограничена на всем множестве действительных чисел, так как $0<\dfrac{1}{1+x^2}\le 1$ *для всех* $x\in R$. Функция *y=tgx* ограничена для $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ (так как при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ следует $|tgx|\le 1$). Но эта же функция *y=tgx* не является ограниченной при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Если функция *y=f(x)* бесконечно большая при $x\to a$, то эта функция не является ограниченной в любой окрестности точки *a*.

Обратное не верно. То есть если *f(x)* неограниченная функция при $x\to a$, то она не обязательно является бесконечно большой при *x*, стремящемся к *a*.

Пример. Функция $f(x)=x\cdot\sin x$ определена на всей числовой прямой и является чётной (проверьте!). График функции схематически показан на рис. 18.

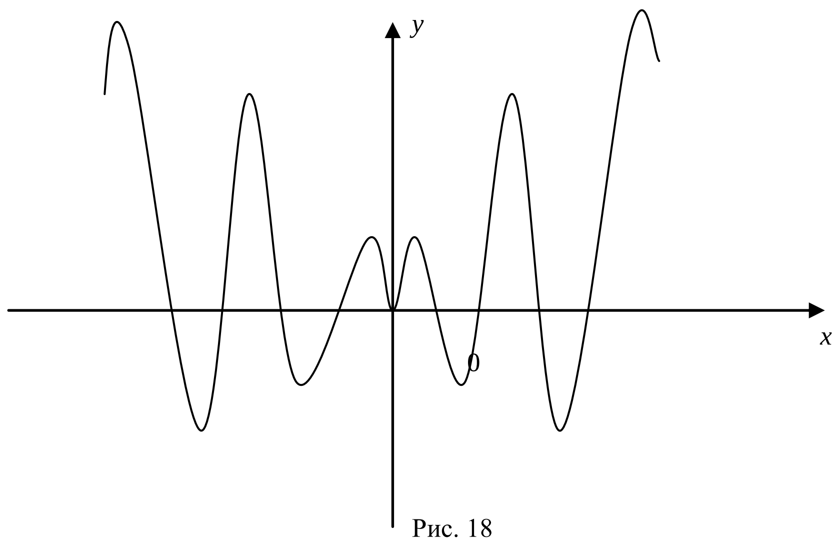


Рис. 18

Эта функция не является ограниченной при $x \to \infty$. Так как при $x_k = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1)$ *имеем* $f(x_k) = \frac{\pi}{2}(2k+1)\sin\frac{\pi}{2}(2k+1) = \pm\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

И $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \infty$. (причем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$).

Но эта функция не является и бесконечно большой при $x \to \infty$, так как в точках $x_k^0 = 2\pi k(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$ имеем $f(x_k^0) = 2\pi k \cdot \sin 2\pi k = 0$ (выполняется $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^0 = +\infty$).

Теорема. Если функция y=f(x) имеет конечный предел A при *x* стремящемся к *a*, то она ограничена при $x \to a$.

Доказательство

Имеем:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *То есть* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x:\quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

Но $|f(x) - A| \geq |f(x)| - |A|$, *тогда* $|f(x)| - |A| \leq \varepsilon$ *при* $0 < |x-a| < \delta.$

Следовательно $|f(x)| \leq |A| + \varepsilon$ *при* $0 < |x-a| < \delta.$

Если *x=a* не входит в область определения функции, то теорема доказана.

Если же *f(x)* определена в точке *a*, то положим $M = \max\{f(a);\ |A| + \varepsilon\}$. Получаем, что $|f(x)| \leq M$ *при* $|x-a| < \delta$ (*при* $x \in (a-\delta; a+\delta)$).

Значит, функция *y=f(x)* ограничена в окрестности точки $(a-\delta; a+\delta)$.

4.5 Бесконечно малые функции и их свойства

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (*или* $x \to \infty$), *если* $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ (*или* $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$)

Запишем это определение на языке логической символики:

1) $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x:0<|x|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\exists M>0:\forall x:|x|>M\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Бесконечно малые функции называют еще бесконечно малыми величинами.

Примеры:

1) $\left.\begin{aligned} &y_1=\sin x;\\ &y_2=1-e^x;\\ &y_3=x^3\end{aligned}\right\}$ бесконечно малые при $x\to 0$;

2)у=e^{-x^2} – бесконечно малая при $x\to\infty$.

Свойства бесконечно малых функций

Свойство 1. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство

Пусть u(x) является ограниченной функцией в некоторой окрестности точки *a*.

То есть $\exists M>0,\exists\delta_1>0:\forall x:|x-a|<\delta_1\Rightarrow|u(x)|\le M$.

По условию теоремы $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то есть

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta_2>0:\forall x:0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Обозначим $\delta=\min\{\delta_1\ \delta_2\}$, тогда при $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)\cdot u(x)|=$

$|\alpha(x)|\cdot|u(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$.

Другими словами, при $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)\cdot u(x)|<\varepsilon$, а это значит, что

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)\cdot u(x)=0.$$

Замечание. Аналогичное свойство справедливо при $x\to\infty$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos^2 x}{x}$.

Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$ *то* есть $\frac{1}{x}$ – величина бесконечно малая при $x\to\infty$.

Кроме того, $|\cos^2 x|\le 1$ для всех $x\in$R. То есть $y=\cos^2 x$ – функция, ограниченная на всей числовой прямой.

Следовательно, произведение этих двух функций $\frac{1}{x}\cdot\cos^2 x$ – бесконечно малая величина при $x\to\infty$.

Следствия из свойства 1

1. Произведение бесконечно малой величины на величину постоянную есть величина бесконечно малая.

2. Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая (докажите!).

Свойство 2. Линейная комбинация $c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)+...+c_n\alpha_n(x)$ конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Доказательство проведем для двух слагаемых $c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)$ (чтобы доказать это утверждение для произвольного n можно применить метод математической индукции).

Доказательство. Имеем $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые величины при $x\to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha_1(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\alpha_2(x)=0$; c_1, c_2 – константы.

Другими словами,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0 : \forall x : 0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2|c_1|},$$

кроме того,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0 : \forall x : 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2|c_2|}.$$

Обозначим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

Тогда при $0<|x-a|<\delta$ выполняется $|\alpha_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2|c_1|}$ и $|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2|c_2|}$.

Далее

$$|c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)| \le |c_1|\ |\alpha_1(x)| + |c_2|\ |\alpha_2(x)| < |c_1|\ \frac{\varepsilon}{2|c_1|}+|c_2|\cdot\frac{\varepsilon}{2|c_2|}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)|<\varepsilon$,
а это и значит, что $c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)$ – бесконечно малая величина при $x\to a$.

Замечание. Отношение двух бесконечно малых величин $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ может быть:

1) величиной бесконечно малой (например, $\alpha(x)=x^2\sin x$, $\beta(x)=x^2$ при $x\to 0$);
2) величиной бесконечно большой (например, $\alpha(x)=x$; $\beta(x)=\sin^2(x)$ при $x\to 0$);
3) может иметь конечный предел (приведите пример);
4) может не иметь предела при $x\to a$ (приведите пример).

Итак, отношение двух бесконечно малых величин $\left[\frac{0}{0}\right]$ представляет собой неопределенность.

4.6. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями

Теорема 1. Если $y=y(x)$–бесконечно большая функция при $x\to a$ (или $x\to\infty$), то $\alpha(x)=\dfrac{1}{y(x)}$–бесконечно малая функция при $x\to a$ (или $x\to\infty$).

Доказательство. Пусть $y=y(x)$–бесконечно большая функция при $x\to a$.

Тогда $\forall M>0\ \exists\delta_1 : \forall x : 0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |y(x)|>M$.

Следовательно, при x таких, что $0<|x-a|<\delta_1$, функция $y(x)$ отлична от нуля, то есть в проколотой окрестности точки a $(a-\delta;a+\delta)\backslash\{a\}$ отношение $\dfrac{1}{y(x)}$ имеет смысл.

Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное малое число. Для числа $M_\varepsilon=\dfrac{1}{\varepsilon}$ найдется $\delta_2>0$ (без ограничения общности доказательства будем считать, что $\delta_2<\delta_1$) такое, что $|y(x)|>M_\varepsilon=\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Но это значит, что в проколотой окрестности $0<|x-a|<\delta_2$ выполняется неравенство $|\alpha(x)|=\left|\dfrac{1}{y(x)}\right|=\dfrac{1}{|y(x)|}<\varepsilon$.

Так как ε – произвольно, то мы получим, что $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Теорема 2. Если $\alpha=\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$ (или $x\to\infty$), то $y(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция при $x\to a$ (или $x\to\infty$).

Доказывается аналогично (докажите самостоятельно!).

4.7. Некоторые теоремы о функциях, имеющих конечные пределы

Теорема 1. Число A является пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или при $x\to\infty$), тогда и только тогда, когда $f(x)$–A является бесконечно малой при $x\to a$ (или $x\to\infty$).

Доказательство

1.Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Это значит, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \ \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Если обозначить $\alpha(x)=f(x)-A$ получаем

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\quad \forall x: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon.$$

Но это значит, что $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

2. Если (*f(x)–A)* – бесконечно малая величина при $x\to a$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\quad \forall x: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Но это равносильно тому, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Сформулируем «теоремы о пределах», являющиеся следствиями соответствующих теорем о пределах последовательностей и определения предела функции (по Г. Гейне).

Теорема 2. Если функция *f(x)* имеет предел при $x\to a$ $(или\, x\to\infty)$, то он единственный.

Теорема 3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\neq 0$, то функция

$\dfrac{1}{f(x)}$ *ограничена при* $x\to a$.

Теорема 4. Функции *f(x)* и *g(x)* имеют при $x\to a$ $(или\, x\to\infty)$ конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A;\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то существуют пределы

$а)\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B;$

$б)\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=A-B;$

$в)\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$

$г)$ *Если* $B\neq 0$, *то существует предел* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

Из свойств бесконечно большой функции и функций, имеющих конечные пределы, можно доказать следующие полезные теоремы.

Теорема 5. Произведение бесконечно большой функции на функцию, имеющую конечный и отличный от нуля предел, есть величина бесконечно большая.

Теорема 6. Сумма бесконечно большой и ограниченной величин есть бесконечно большая величина.

Примеры

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^4-5x^3+7x+8}{9x^2-5x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{6x^4-5x^3+7x+8}{x^4}}{\dfrac{9x^2-5x+9}{x^4}}$$

(разделим и числитель и знаменатель на x в наибольшей степени (x^4), которая участвует в многочленах, находящихся в числителе и знаменателе дроби)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{8}{x^4}}{\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{9}{x^4}}=A\ (A=?).$$

Получаем: числитель дроби стремится к числу 6 при $x\to\infty$; знаменатель есть величина бесконечно малая $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{9}{x^4}\right)=0\right)$.

Из теоремы 2 п. 4.6 имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{9}{x^4}}=\infty$.

Применяя теорему 2 п. 4.6, получаем

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(6-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^4}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{9}{x^4}}=[6\cdot\infty]=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3)-3+5}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{2}{x^2+3}\right]=1.$$

Поясним, как получен окончательный ответ:

$$x\to\infty\Rightarrow x^2\to\infty\Rightarrow x^2+3\to\infty\Rightarrow\frac{2}{x^2+3}\to0\Rightarrow1+\frac{2}{x^2+3}\to1.$$

Докажем ещё несколько полезных свойств функций, имеющих предел.

Теорема 7. Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\neq0$, то существует окрестность точки *a*, в которой $f(x)\neq0$ *при* $x\neq a$ *и знак* $f(x)$ совпадает со знаком числа *A*.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, то есть

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta:\ \forall x:\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$

т.е. .

$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

Возьмем в качестве ε *число* $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Тогда $A,\ A+\varepsilon,\ A-\varepsilon$ являются числами одного знака.

Действительно, пусть *A>0*, тогда

$$A + \varepsilon = A + \frac{A}{2} = \frac{3}{2}A > 0, \quad A - \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0$$

Если *A<0*, то

$$A + \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} < 0, \quad A - \varepsilon = A + \frac{A}{2} = \frac{3}{2}A < 0.$$

Следовательно, в силу неравенств $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ получаем, что $f(x) \neq 0$ при $0 < |x - a| < \delta$ и f(x) имеет тот же знак, что и число *A*.

Теорема 8. Если *f(x)>0 (f(x)<0)* для всех точек x из некоторой проколотой окрестности точки *a* и существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $A \geq 0 (A \leq 0)$

Доказательство

Предположим противное.

Пусть, например, *f(x)>0* при всех x таких, что $0 < |x-a| < \delta$, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A < 0$.

Но тогда *f(x)<0* в некоторой проколотой окрестности точки *a* (из теоремы 7). Получаем противоречие, которое доказывает теорему.

Теорема 9. Пусть $f(x) \leq g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки *a* и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B,$ тогда $A \leq B$.

Доказательство

По теореме 4 существует предел $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = A - B$.

Пусть *A>B,* или *A–B>0*. Тогда по теореме 7 в некоторой проколотой окрестности точки *a* выполняется неравенство $f(x) - g(x) > 0$, то есть

$f(x) > g(x)$. Получаем противоречие, доказывающее справедливость теоремы.

Отметим, что если выполняется строгое неравенство *f(x)<g(x)* и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то по–прежнему можно утверждать только $A \le B$ $(\textit{не}\ A < B)$.

Пример

Пусть $f(x) \equiv 0$ (функция тождественно равна нулю для всех значений аргумента *x*): $g(x) = x^2$. Тогда в проколотой окрестности точки ноль выполняется строгое неравенство $f(x) < g(x)$, *но* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

Теорема 10 (о пределе сложной функции).

Если существуют конечные пределы
$\lim\limits_{x \to b} f(y) = f(b) = c,\quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = b,$

то существует предел $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)] = c$.

Доказательство

По предположению теоремы $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon .$$

Но $\lim\limits_{y\to b} f(y) = f(b) = c$. Это значит, что

$$\forall \eta > 0\ \ \exists \varepsilon_1 > 0 :\ \ \forall y :\ \ 0 < |y - b| < \varepsilon_1 \Rightarrow |f(y) - c| < \eta .$$

Положим y=g(x) и возьмём $\varepsilon \le \varepsilon_1$. Тогда $f(y) = f(g(x))$ и для всех *x* таких, что $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(g(x)) - c| < \eta$, а это значит, что $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = c$.

Эта теорема позволяет применять правило замены переменной в операции перехода к пределу, а именно: если нужно вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ и известно, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ *и* $f(b) = \lim\limits_{y\to b} f(y) = c$, то имеем правило

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = \lim_{y\to b} f(y) = f(b).$$

Пример

Пусть $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Тогда $\varphi(x) = f(g(x))$, где $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, *а* $f(y) = e^y$.

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Отметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$, *а* $\lim\limits_{y\to -\infty}e^{y}=0$.

В итоге имеем $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$.

Теорема 11. Если в проколотой окрестности точки a выполняется $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$, причём существуют равные между собой пределы $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$, тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$.

Доказательство

По условию теоремы имеем $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ *и* $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$.

Другими словами, $\forall\varepsilon>0$:

1.$\exists\delta_1:\ \forall x: 0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$

2.$\exists\delta_2:\ \forall x: 0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon.$

Если обозначить $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$, то при $0<|x-a|<\delta$ будет выполняться:

1*.$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$

2*.$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon.$

Но $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$, следовательно, из 1* и 2* получаем, что

$\forall x$: $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $A-\varepsilon<\varphi(x)<A+\varepsilon$, причем число $\delta>0$ можно подобрать для любого значения $\varepsilon>0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$.

Замечание. Утверждение, аналогичное теореме 7 справедливо и при $x\to\infty$, и в случаях $A=\infty$ $A=+\infty$; $A=-\infty$.

4.8. Первый замечательный предел

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (в математике это равенство называется «первый замечательный предел»).

Доказательство

Рассмотрим круг радиуса $R=1$ с центром в точке O (рис. 19). Зафиксируем точку A на окружности.

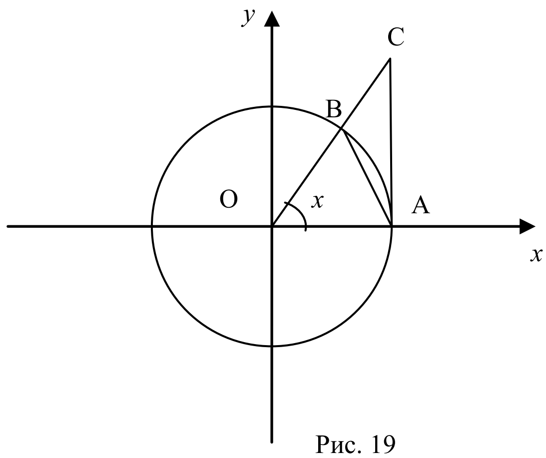


Рис. 19

Пусть радиус OB образует с прямой OA угол x. Нас интересует предел при $x\to 0$, поэтому без ограничения общности доказательства будем считать, что $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим сначала случай x>0 и найдём предел $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}$.

Соединим точки A и B отрезком и восстановим из точки A перпендикуляр к прямой OA до пересечения с прямой OB. Точку пересечения обозначим C.

Обозначим: S_1– площадь треугольника AOB, S_2– площадь кругового сектора OAB, S_3– площадь треугольника OAC.

Имеем:

$$S_1=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x;$$

$$S_2=\frac{1}{2}R^2x=\frac{1}{2}x;$$

$$S_3=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}R\cdot Rtgx=\frac{1}{2}tgx$$

Из геометрических соображений $S_1 < S_2 < S_3$, то есть $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$; после деления неравенства на *sinx>0* получаем $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Заменяя величины им обратными, имеем $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Далее: $cosx = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$. Но при $x > 0$ выполняется $\sin x < x$ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x \le \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 0 = 1$.

Используя теорему 7, получаем, что $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Теперь найдём $\lim\limits_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}$.

Сделаем замену переменной $y = -x$. Если $x \to 0 \, и \, x < 0 \, (x \to -0),$ тогда $y \to 0,$ но $y > 0$ $(y \to +0)$.

Получаем $\lim\limits_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{y\to +0}\frac{\sin(-y)}{-y} = \lim\limits_{y\to +0}\frac{\sin y}{y} = 1$ (при вычислении предела использована нечётность функции $\sin y : \sin(-y) = -\sin y$).

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg4x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\cos 4x\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4x}{\cos 4x\cdot x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot\left(\frac{4x}{\cos x}\right).$$

При $x \to 0$ следует $4x \to 0, \Rightarrow \frac{\sin 4x}{4x} \to 1$.

Кроме того, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{\cos x} = \frac{4}{\cos 0} = 4$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - x^2\cos x - \cos 2x}{x\sin 2x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 5x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{2x-\pi}$;

Отметим, что первый замечательный предел используют «для раскрытия неопределенностей» вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, если выражение под знаком предела содержит тригонометрические функции или обратные тригонометрические функции. Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределенностей вида $\left[1^{\infty}\right]$. Причем предварительно в основании степени выделяют выражение вида $(1+\alpha)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Затем в степени выделяют множитель вида $\dfrac{1}{\alpha(x)}$.

4.9. Второй замечательный предел

Без доказательства отметим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$. Если сделать замену $\dfrac{1}{x}=\alpha$, то выражение принимает вид $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Мы привели два различных способа записи второго замечательного предела.

Рассмотрим несколько примеров применения первого и второго замечательного пределов в решении задач.

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+3}\right)^{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+3)-3+4}{x^2+3}\right)^{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+3}\right)^{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2+3}\right)^{x^2+3}\right]^{\frac{3x^2}{x^2+3}}$$

Отметим, что если $x\to\infty\Rightarrow x^3+3\to\infty\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+3}\to 0$. Полагая $\alpha=\dfrac{1}{x^2+3}$ и используя второй замечательный предел в виде $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$, получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2+3}\right)^{x^2+3}=e$, то есть окончательно мы должны получить число e в некоторой степени. Чтобы найти, в какую степень нужно возвести e, нужно вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{1+\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{3}{1+0}=3$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+3}\right)^{3x^2}=e^3$.

Упражнения. Вычислить самостоятельно пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 4}(9-2x)^{\frac{1}{4-x}}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+7}\right)^{x}$;

4.10. Сравнение бесконечно малых величин

Пусть $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ – функции одного аргумента x и $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0.$ (то есть $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$.

Примечание. Здесь a может быть и конечным числом, $a=+\infty, a=-\infty, a=\infty$.

Для сравнения «скоростей» стремления $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ к нулю рассмотрим отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, предполагая, что $\beta(x)\neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a.

Определение 1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то будем говорить, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, и будем записывать $\alpha(x)=\circ(\beta(x))$ при $x\to a(\alpha(x))$ – «0» малое от $\beta(x)$ при x стремящемся к a.

Пример

$$\alpha(x)=\sin^3 x;\qquad \beta(x)=tg^2 5x.$$

Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{tg^2 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{x^3(5x)^2\cdot\cos^2 x}{\sin^2 5x(5x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\left(\frac{x\cos^2 x}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{\sin^2 5x}{(5x)^2}}\right)=0,$$

так как пределы первого и третьего множителя при $x\to 0$ равны 1, а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{5}\cdot\cos^2 x=\frac{0\cdot 1}{5}=0$.

Вывод: $\sin^3 x=\circ\left(tg^2 x\right)$ *при* $x\to 0$.

Определение 2. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, где А – конечная константа, будем говорить, что $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$– бесконечно малые одного порядка малости.

Записывать в этом случае будем $\alpha(x)=O(\beta(x))$ ($\alpha(x)$–"0" *большое от* $\beta(x)$ *при* $x\to a$.

Определение 3. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то будем говорить, что бесконечно малая $\alpha(x)$ эквивалентна бесконечно малой $\beta(x)$ (записывать будем $(\alpha(x)\sim\beta(\mathrm{x}))$.

Пример

$\alpha(x)=2-2\cos x;\qquad \beta(x)=x^2$, тогда $(\alpha(x)\sim\beta(\mathrm{x}))$ при $x\to 0$.

Докажем эквивалентность

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1,$$

что и требовалось доказать.

Определение 4. Бесконечно малая величина $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка k относительно $\beta(x)$, если существует конечный и отличный от нуля предел: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}$. Очевидно, что при этом $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Пример

Нетрудно проверить (убедитесь!), что $\alpha(x)=1-\cos x$ имеет относительно бесконечно малой величины $\beta(x)=x$ *при* $x\to 0$ *порядок малости* два.

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям.

Например, зная лишь, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, нельзя сказать заранее, чему равен $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Говорят, что имеет место *неопределенность вида* $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Элементарными приемами *раскрытия неопределенностей* являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность
2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x\to\infty$)
3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших
4) использование двух замечательных пределов:

первый замечательный предел $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$,

второй замечательный предел $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e$,

а также следующие свойства :

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{f(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, т.е. $\left\{\dfrac{c}{\infty}\right\}=0$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{f(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, т.е. $\left\{\dfrac{c}{0}\right\}=\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, т.е. $\left\{\dfrac{0}{\infty}\right\}=0$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, т.е. $\left\{\dfrac{\infty}{0}\right\}=\infty$.

4.11. Примеры вычисления пределов

Рассмотрим конкретные примеры вычисления пределов:

1. Вычислить $Z_1=\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+2x+5\right)$.

Воспользуемся свойством предела суммы:

$$Z_1 = \lim_{x\to1} 3x^2 + \lim_{x\to1} 2x + \lim_{x\to1} 5.$$

Воспользуемся свойствами о пределе константы и выносе константы за знак предела:

$$Z_1 = 3\lim_{x\to1} x^2 + 2\lim_{x\to1} x + 5.$$

Так как под знаком предела у нас находятся основные элементарные функции, подставляем вместо x его предельное значение 1 и получаем: Z_1=3+2+5=10.

2. Найти $Z_2 = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)}$.

Под знаком предела стоит композиция основных элементарных функций – элементарная функция. Подставляем вместо x его предельное значение равное 3, получаем в числителе бесконечно большую, а в знаменателе бесконечно малую функцию:

$$\lim_{x\to3} ctg(x-3) = \infty, \qquad \lim_{x\to3} \ln(4-x) = 0 \qquad Z_2 = \infty.$$

3. Вычислить $Z_3 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Так как $\lim\limits_{x\to0} x^2 - 1 = -1$ существует и конечен,

$\lim\limits_{x\to0} 2x^2 - x - 1 = -1$ существует, конечен и не равен 0, то

$$Z_3 = \frac{\lim\limits_{x\to0} x^2 - 1}{\lim\limits_{x\to0} 2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

4. Найти $Z_4 = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{51}{(x-1)^5}$.

Подстановка предельного значения в знаменатель дает предел, равный нулю. Следовательно мы имеем отношение константы к бесконечно малой {C/0} – $Z_4 = \infty$.

5. Найти $Z_5 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-7}{3x^2+4x+12}$.

Подстановка предельного значения приводит к неопределенности $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Поделим на старшую степень x~x^2.

$$Z_5 = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(5 - \dfrac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{12}{x^2}\right)} = \frac{5-0}{3+0+0} = \frac{5}{3}.$$

6. Вычислить $Z_6 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12x^4+5x}{-4x^4+7}$.

Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Так как под знаком предела стоит отношение двух многочленов, то разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, то есть на x^4.

$$Z_6=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\dfrac{5}{x^3}}{-4+\dfrac{7}{x^4}}=\frac{12}{-4}=-3$$ поскольку при $x\to\infty$ функции $\frac{5}{x^3}$ и $\frac{7}{x^4}$ являются бесконечно малыми.

7. Рассмотрим вычисление предела с неопределенностью вида $\{\infty - \infty\}$

$$Z_7=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$$

При раскрытии неопределенности этого вида достаточно домножить и разделить выражение под знаком предела на сопряженное ему выражение:

$$Z_7=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\left\{\frac{3}{\infty}\right\}=0$$

8. Вычислить $Z_8=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}$.

Имеем неопределенность вида $\{0/0\}$. При подстановке предельного значения получается неопределенность вида $\{0/0\}$. Это вызвано тем, что и многочлен в числителе и многочлен в знаменателе имеют -1 своим корнем. Следовательно, надо сократить дробь на критический множитель *(x+1)*, выделив его предварительно:

$$Z_8=\lim_{x\to-1}\frac{3x^4+3x^3-x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\cdot 3x^3-x^2(x+1)+5(x+1)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^3-x^2+5}{x^2-x+1}=$$

подставляем предельное значение и, пользуясь свойствами пределов, получаем:

$$=\frac{3(-1)-1+5}{1-(-1)+1}=\frac{1}{3}$$

9. Найти $Z_9=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

Имеем неопределенность вида $\{0/0\}$ в тригонометрическом выражении. Раскроем ее с помощью первого замечательного предела, но в первом замечательном пределе знаменатель дроби и аргумент синуса должны совпадать. Следовательно, домножим и разделим на *5x*, чтобы получить $\dfrac{\sin 5x}{5x}\underset{x\to 0}{\to}1$

$$Z_9=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{3x}$$ так как при $x\to 0$ и $5x\to 0$, то первый сомножитель стремится к единице и

$$Z_9=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

10. Найти $Z_{10}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Z_{10} содержит неопределенность $\{0/0\}$ в тригонометрическом выражении. Попытаемся обратиться к первому замечательному пределу. Для этого надо числитель заменить выражением, содержащим синус по известной тригонометрической формуле cos двойного угла:

$$Z_{10} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2.$$

11. Нати $Z_{11} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\arcsin(x-1)}$.

Здесь неопределенность $\{0/0\}$, к которой приводит предел выражения, содержащего обратные тригонометрические функции. Сделаем замену переменных. Возьмем за новую переменную arcsin(x-1), тогда мы получим выражение подобное первому замечательному пределу: (y=*arcsin(x-1)*).

Заметим, что при $x \to 1,\ y \to \arcsin(1-1) = \arcsin 0 = 0,$ то есть $y \to 0$,

$$Z_{11} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\arcsin(x-1)} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y(\sin y + 2)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y \to 0}(\sin y + 2) = (0+2) = 2$$

12. Найти $\qquad Z_{12} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{-\frac{1}{\cos x}}$.

Здесь имеет место неопределенность типа $\{1^\infty\}$

При раскрытии неопределенностей такого вида пользуются вторым замечательным пределом.

$$\lim_{\alpha \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = e \text{ или } \lim_{\beta \to 0}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e \qquad Z_{12} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^{-1}$$

Так как при $x \to \dfrac{\pi}{2},\ \cos x \to 0,$ то положим

$$y = \cos x \quad Z_{12} = \lim_{y \to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1} = e^{-1}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое функция? Ее область определения и область значений.
2. Что такое сложная функция?
3. Дайте определение предела функции в т. x_0 слева, справа, вообще определение предела.
4. Какие свойства пределов Вы знаете?
5. Какие бесконечно малые называются бесконечно малыми одного порядка?
6. Какие бесконечно малые называются эквивалентными бесконечно малыми?

Глава 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ

5.1. Теоремы об эквивалентности бесконечно малых величин

Приведем без доказательства несколько свойств бесконечно малых величин.

Свойство 1. Свойство эквивалентности симметрично, то есть $\alpha(x)$ эквивалентно $\beta(x)$: $\alpha(x) \sim \beta(\mathrm{x})$ тогда и только тогда, когда $\beta(x) \sim \alpha(\mathrm{x})$.

Замечание. На языке пределов это утверждение выглядит следующим образом:

$$\text{если } \lim_{x\to a}\alpha(x) = \lim_{x\to a}\beta(x) = 0, \quad \textit{то} \quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Свойство 2. Если $\alpha(x), \beta(x)$ *и* $\gamma(x)$ – бесконечно малые величины при $x \to a$, то из того, что

$(\alpha(x) \sim \gamma(\mathrm{x}))$ *и* $(\beta(x) \sim \gamma(\mathrm{x}))$ *следует, что* $(\alpha(x) \sim \beta(\mathrm{x}))$

(две бесконечно малые величины, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой).

Свойство 3. Для того чтобы две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ была величиной более высокого порядка, чем каждая из бесконечно малых $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$.

Докажем *необходимость.*

Пусть $\alpha(x) \sim \beta(\mathrm{x})$, тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Рассмотрим $.\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(1 - \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - 1 = 0$. Таким образом, доказано, что $\alpha(x) - \beta(x) = \circ(\alpha(x))$. Аналогично доказывается, что $\alpha(x) - \beta(x) = \circ(\beta(x))$.

Приведем эквивалентные бесконечно малые величины, которые полезно иметь в виду при вычислении пределов.

При $x \to 0$ имеем (на основании предыдущего) *sinx~x; tgx~x; arsinx~x;* *1–cosx~*$\dfrac{x^2}{2}$*;* *arctgx~x.*

В дальнейшем полезно помнить также, что при $x \to 0$ выполняется $e^x - 1 \sim x$ *и* $a^x - 1 \sim x \ln a$ $\ln(1+x) \sim x$.

Теорема. Если существует конечный или бесконечный предел отношения двух бесконечно малых функций $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то он не изменится, если каждую из функций заменить на эквивалентную ей бесконечно малую.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$; $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ *при* $x\to a$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$.

Преобразуем выражение

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\bullet\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\bullet\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Что и требовалось доказать.

Эта теорема позволяет упрощать вычисление достаточно сложных пределов, заменяя числитель или знаменатель дроби на эквивалентную бесконечно малую.

Пример. $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{x^2}-1}{\sin(5x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}=\frac{1}{5}$.

(В решении использовано, что $e^{x^2}-1\sim x^2$ и $\sin 5x^2\sim 5x^2$ при $x\to 0$.)

Замечание. Заменять бесконечно малую на эквивалентную можно, если эта бесконечно малая «участвует» в операции деления, но этот прием не применим к разности и к сумме.

Пример. Нужно вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-tgx}{x^3}$.

Если в числителе «заменить» $sinx$ на x ($sinx\sim x$ при $x\to 0$) и tgx на x (опять эквивалентны), получаем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-tgx}{x}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}$, $x-x=0$, значит, получается, что предел равен нулю.

На самом же деле

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-tgx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x\ x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}\cos x}=-\frac{1}{2},$$ где

$cos(x)-1=-1/2*sin^2(x)$ и эквивалентно $(-\frac{x^2}{2})$.

5.2. Непрерывность функции в точке

Определение 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Говорят, что эта функция непрерывна в точке a, если существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и этот предел равен $f(a)$: $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\right)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если:

1) она определена в точке a;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке a.

Функция, не являющаяся непрерывной в точке называется *разрывной* в этой точке.

Определение 2. Говорят, что функция $y=f(x)$ непрерывна на множестве A, если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке этого множества.

Условие непрерывности в точке $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ можно переписать в эквивалентном виде: $\lim\limits_{x\to x} [f(x) - f(a)] = 0.$ $(*)$

Если теперь ввести обозначения x=a+Δx (Δx – «сдвиг», смещение точки x относительно a, или, как принято говорить: приращение аргумента);

$f(x)=f(a)+\Delta f$ (Δf – соответствующее приращение функции), тогда имеем $\Delta x=x-a$; $\Delta f=(x)-f(a)$ и при $x \to a \Rightarrow \Delta \to 0$.

После введения новых обозначений условие $(*)$ принимает следующий эквивалентный вид:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0.$$

В итоге получаем новое (эквивалентное) определение функции, непрерывной в точке.

Определение 3. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Говорят, что функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Геометрический смысл непрерывности функции в точке

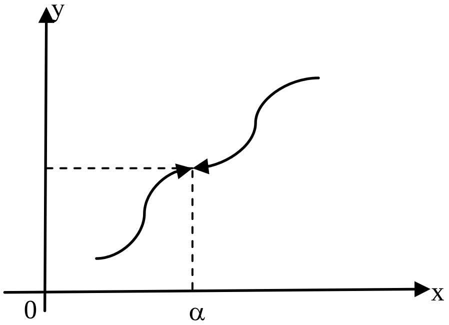


Рис.20

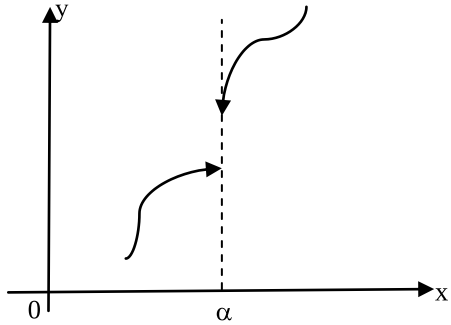


Рис.21

Разница между поведением в точке *a* непрерывной и разрывной функций проиллюстрирована на рис. 20 и 21. В первом случае, если $\Delta x\to 0$, то и $\Delta y\to 0$. Во втором случае, даже если $\Delta x\to 0$ между $f(a)$ и $f(a+\Delta x)$ «расстояние» не сокращается до нуля.

Отметим, что и в "более сложных" случаях термин непрерывности функции в точке совпадает с интуитивными представлениями о непрерывности кривой, являющейся графиком функции.

Замечания

1. Функция $f(x)\equiv c$ непрерывна при любом значении x.
2. Элементарные функции $f_1(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ (многочлен); $f_2(x)=\sin x$; $f_3(x)=\cos x$; $f_4(x)=tgx$; $f_5(x)=ctgx$; $f_6(x)=e^x$; $f_7(x)=\ln(x)$, … непрерывны каждая в своей области определения.

Докажем, например, что функция $f(x)=\sin x$ непрерывна при любом x.

Доказательство $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})$.

Но при $\Delta x\to 0$ имеем $\sin\dfrac{\Delta x}{2}\to 0$, а функция $\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})$ ограничена.

В итоге получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=0.$$

Определение 4. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$, то функция y=f(x) называется непрерывной справа. Аналогично вводится понятие функции непрерывной слева $\left(\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=f(a)\right)$.

Определение 5. Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки *a*, существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$, причем эти пределы равны между собой и равны значению этой функции в этой точке, тогда говорят, что функция y=f(x) непрерывна в точке *a*.

($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке *a*).

5.3. Свойства непрерывных функций

Теорема. Если функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны в точке *a*, то в этой точке непрерывны и функции

$$k\cdot f(x)(k = const); \quad f(x) \pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x).$$

Если $g(a) \neq 0$, *то и функция* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *непрервына в точке* a.

Доказательство. Функции f(x) и g(x) непрерывны в точке *a*, то есть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$

По свойству конечных пределов

1) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x) = kf(a)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) \pm g(a)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)\cdot g(a)$;

4) *Если* $g(a) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$.

Но 1–4 – это и есть непрерывность соответствующих функций в точке *a*.

С помощью метода математической индукции можно доказать непрерывность суммы и произведения любого числа слагаемых и сомножителей.

Примеры

1. Функция $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} = tgx$ как частное двух непрерывных функций непрерывна в любой точке $a \in R$, где $\cos a \neq 0$, то есть в любой точке области определения функции $y = tgx$.

2. Функция $y = cx^n$ непрерывна во всех точках действительной оси, как произведение n непрерывных сомножителей.

3. Многочлен

$P(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$ *непрерывен при всех* $x \in R$.

4. Дробно–рациональная функция

$R(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$ непрерывна всюду, где знаменатель отличен от нуля.

5.4. Непрерывность сложной и обратной функций

Теорема 1. Пусть даны функции *y=f(u)* и *u=g(x)*. Если *u=g(x)* непрерывна в точке $x=x_0$, а функция f(u) непрерывна в соответствующей точке $u_0=g(x_0)$, то сложная функция $y=f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Из непрерывности функции $g(x)$ в точке x_0 имеем $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=u_0.$. По теореме о пределе сложной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$, *если предел* $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ существует. Но функция *f(u)* непрерывна в точке u_0, то есть существует предел $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$, *или* $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f(g(x_0))$, а это и означает непрерывность сложной функции y=f(g(x)) в точке $x=x_0$.

Следствие. Если функция g(x) непрерывна в точке x_0, функция *f(u)* непрерывна в точке $u_0=g(x_0)$, то можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right]$.

Без доказательства сформулируем теорему.

Теорема 2. Пусть y=f(x) монотонно возрастает на интервале (a;b) и непрерывна на нем.

Тогда обратная функция $x=f^{-1}(y)$ также монотонно возрастает и непрерывна на интервале $(f(a);f(b))$.

Аналогичная теорема справедлива для монотонно убывающей непрерывной функции.

Примеры

1. Функция y=sinx монотонно возрастает и непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, принимая значения от $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ *до* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

На интервале от –1 до 1 получаем обратную функцию $x=\arcsin y$, которая принимает значения от $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$.

Функция $x=\arcsin y$ непрерывна в своей области определения (–1;1).

2. Функция $y = e^x$ определена и монотонно возрастает на всей числовой прямой и принимает значения на множестве $(0;+\infty)$.

Обратная функция $x=\ln y$ непрерывна и определена на промежутке $(0;+\infty)$, принимая значения на всём множестве действительных чисел $(-\infty;+\infty)$.

5.5. Точки разрыва функции и их классификация

Определение 1. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в некоторой проколотой окрестности точки a $\left((a-\varepsilon; a+\varepsilon)\setminus\{a\}\right)$, но разрывна в самой точке a, тогда точка a называется точкой разрыва этой функции.

Если хотя бы одно из трех условий непрерывности не выполняется, функция называется разрывной в точке a, а сама точка a – точкой разрыва.

Если в точке a функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то в этой же точке непрерывными являются и функции:

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad и \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad если \quad g(x_0) \neq 0$$

Пример

Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна как частное двух непрерывных функций всюду кроме точки x=0. По определению точка x=0 является точкой разрыва функции $\frac{\sin x}{x}$, так как функция непрерывна в проколотой окрестности точки x=0, но в самой точке функция не определена, то есть разрывна.

Отметим, что в данном случае существует предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *и*, , если определить новую функцию $\tilde{f}(x)$ *по правилу*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & при\, x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

то мы получаем функцию, непрерывную всюду (в том числе и в точке $x=0$). Мы приходим к определению одного из видов точек разрыва.

Определение 2. Точка разрыва функции $y=f(x)$ называется точкой *устранимого разрыва*, если существует предел функции в этой точке, но он не равен значению функции в точке.

Точки устранимого разрыва «получаются» в тех случаях, когда функция либо не определена в указанной точке (рис. 22), либо принимает значение, отличное от предела функции в точке (рис. 23).

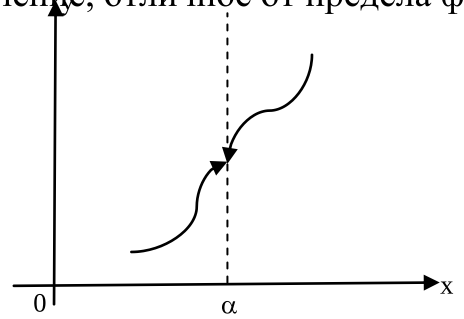


Рис.22

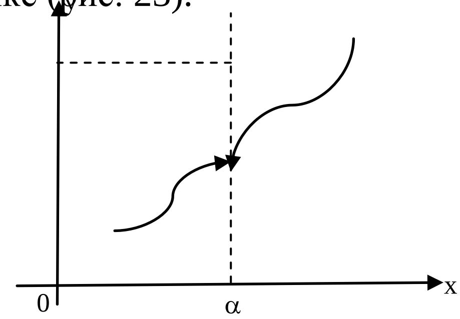


Рис.23

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \quad при \;\; x > 0 \\ -1 \quad при \;\; x < 0. \end{cases}$

График этой функции имеет вид (рис. 24).

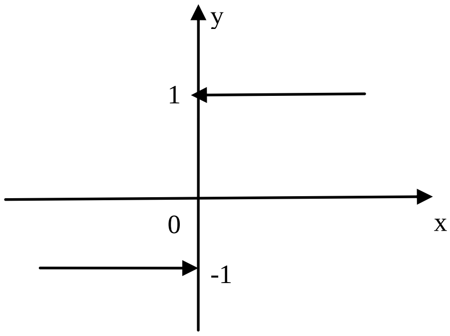


Рис.24

Здесь разрыв не удаётся «устранить», «подправив» значение функции только в одной точке, и мы приходим к ещё одному типу разрыва.

Определение 3. Пусть *a*– точка разрыва функции y=f(x), причем определены конечные односторонние пределы

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A \;\; и \quad \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = B, \quad где \;\; A \neq B,$ тогда говорят, что *a* – точка разрыва первого рода.

Определение 4. Точки разрыва, не являющиеся точками устранимого разрыва или разрыва первого рода, называются точками разрыва второго рода (в них хотя бы один из односторонних пределов *f(a+0)* или *f(a-0)* не существует или бесконечен).

Примеры

1. $y = \frac{1}{x}$ – функция, непрерывная на действительной оси при $x \neq 0$.

В точке *x=0* здесь разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$. (рис. 25).

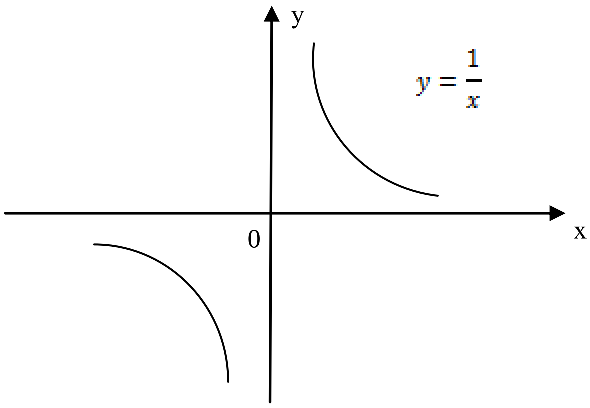


Рис.25

2. Функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)$ разрывна только в точке x=3. Предел $\lim\limits_{x\to 3}\sin\left(\frac{1}{x-3}\right)$ не существует, ни конечный, ни бесконечный (проверьте!).

Поэтому функция $\sin\left(\frac{1}{x-3}\right)$ имеет в точке x=3 разрыв второго рода.

5.6. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Сформулируем без доказательства важнейшие свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 1. Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем:

$$(\exists M: \quad \forall x \in [a;b] \Rightarrow |f(x)| \leq M).$$

Замечание. В этой теореме отрезок нельзя заменить на интервал.

Например, функция *y=tgx* непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, но не является ограниченной на этом интервале.

Теорема 2 (Вейерштрасса). Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на нем своего наименьшего и своего наибольшего значений (рис. 26).

$$(\exists c_1, c_2: \ c_1 \in [a;b] \ и \ c_2 \in [a;b] \ \ и \ f(c_1) = \max_{x\in[a;b]} f(x); \qquad f(c_2) = \min_{x\in[a;b]} f(x))$$

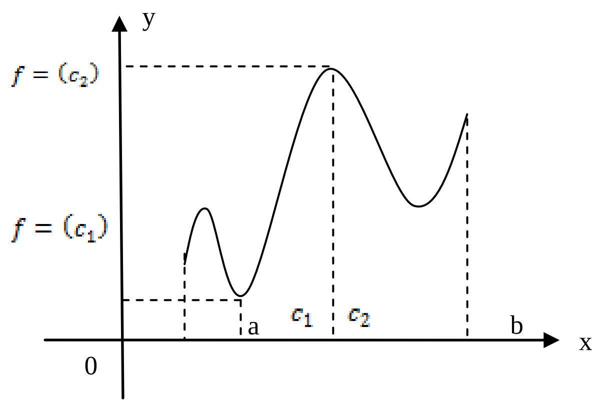


Рис. 26

Замечание. В теореме утверждается существование точек c_1 и c_2, но не утверждается их единственность.

Например, функция y=sin x, непрерывная на отрезке $[0;10\pi]$, достигает своего максимального значения 1 на указанном отрезке 5 раз.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{17\pi}{2}\right) = 1.$$

Теорема 3 (Больцано–Коши). Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке *[a;b]* и на концах отрезка имеем *f(a)=A; f(b)=B*, где $A \neq B$, то для любого числа μ, заключенного между *A* и *B* найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = \mu$ (рис. 27).

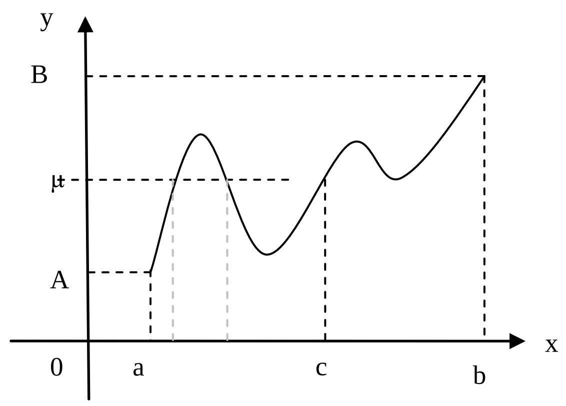


Рис. 27

Замечание. Теорема не утверждает, что точка *C* единственна. В частности, в случае показанном на рис. 27, таких точек три.

Следствие из теоремы 3. Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что *f(c)=0.*

5.7. **Свойство непрерывности сложной функции**

Если функция $u=g(x)$ непрерывна в точке a и функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u=g(a)$, то сложная функция $y=f(g(x))$ непрерывна в точке a.

Основные элементарные функции непрерывны во всех точках своей области определения.

Таким образом, всякая элементарная функция, то есть функция, составленная из основных элементарных, с помощью конечного числа алгебраических действий и композиций, является непрерывной во всех точках своей области определения.

Функция непрерывна на отрезке, если она непрерывна во всех точках отрезка. Рассмотрим на примере,

исследуем функцию $y=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & при \quad x<-1 \\ \sqrt{1-x^2} & при \quad -1\le x\le 0 \\ 1-x & при \quad x>0 \end{cases}$

на непрерывность, найдем точки разрыва и их тип. Построим схематический график функции.

Данная функция определена на всей числовой оси.

а) если $x < -1$, то $y=\dfrac{|x+1|}{x+1}=\dfrac{-(x+1)}{x+1}=-1$ – многочлен нулевой степени – основная элементарная функция, следовательно, при $x < -1$ функция y непрерывна;

б) если $-1<x<0$, то мы имеем $y=\sqrt{1-x^2}=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ композиция степенных функций – элементарная функция, следовательно, при $-1 < x < 0$ функция y непрерывна;

в) если $x>0$, $y=1-x$ – многочлен 1-й степени – непрерывен. «Подозрительными» на разрыв являются только те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, то есть точки $x=-1$, $x=0$.

Вычислим односторонние пределы в этих точках.

Для точки $x=-1$ имеем

Предел слева

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1;$$

Предел справа

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}\sqrt{1-x^2}=0.$$

Видим, что односторонние пределы функции в точке *x=-1* существуют, но не равны между собой. Следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода.

Для точки *x=0* получаем:

предел слева $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\sqrt{1-x^2}=1$;

предел справа $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}(1-x)=1$.

Односторонние пределы существуют и равны между собой. Частное значение функции в точке *x=0, y(0)=1*, так как

$$f(0)=\sqrt{1-x^2}\Big|_{x=0}=1.$$

Следовательно, исследуемая точка является точкой непрерывности.

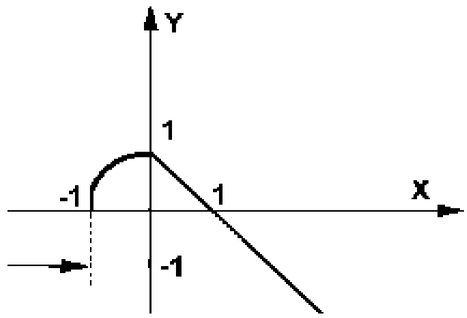


График данной функции:

- на полупрямой *(-∞,-1)* график представляет собой прямую линию: *y = -1;*
- на отрезке *[-1,0]* график представляет собой часть окружности
- на полупрямой *(0, ∞)* график представляет собой прямую линию: *y = 1-x.*

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется непрерывной?
2. Какая функция называется разрывной?
3. Какой разрыв называется устранимым?
4. Какой разрыв называется разрывом 1-го рода?
5. Какой разрыв называется разрывом 2-го рода?
6. Что Вам известно о непрерывности элементарных функций и основных элементарных функций?

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ЗАДАНИЕ 1

Вопрос 1. Что называется функцией?

1. число;
2. правило, по которому каждому значению аргумента x соответствует одно и только одно значение функции y;
3. вектор;
4. матрица;
5. нет правильного ответа.

Вопрос 2. В каком случае можно определить обратную функцию?

1. когда каждый элемент имеет единственный прообраз;
2. когда функция постоянна;
3. когда функция не определена;
4. когда функция многозначна;
5. нет правильного ответа.

Вопрос 3. Какая функция называется ограниченной?

1. обратная;
2. функция f(x) называется ограниченной, если $m \le f(x) \le M$;
3. сложная;
4. функция f(x) называется ограниченной, если $f(x)>0$;
5. функция f(x) называется ограниченной, если $f(x) \le 0$.

Вопрос 4. Какая точка называется предельной точкой множества A?

1. нулевая;
2. точка x_0 называется предельной точкой множества A, если в любой окрестности точки x_0 содержатся точки множества A, отличающиеся от x_0;
3. не принадлежащая множеству A;
4. нет правильного ответа;
5. лежащая на границе множества.

Вопрос 5. Может ли существовать предел в точке в том случае, если односторонние пределы не равны?

1. да;
2. иногда;
3. нет;
4. всегда;
5. нет правильного ответа.

ЗАДАНИЕ 2

Вопрос 1. Является ли произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную бесконечно малой функцией?

1. нет;
2. да;
3. иногда;
4. не всегда;
5. нет правильного ответа.

Вопрос 2. В каком случае бесконечно малые α (x) и β(x) называются бесконечно малыми одного порядка в точке x_0?

1. если они равны;
2. если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$;
3. если $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\to} \beta(x)$;
4. если их пределы равны 0;
5. нет правильного ответа.

Вопрос 3. Сколько видов основных элементарных функций мы изучили?

1. 5;
2. 1;

3. 0;
4. 2;
5. 3.

Вопрос 4. Чему равен предел константы С?

1. 0;
2. e;
3. 1;
4. ∞;
5. c.

Вопрос 5. Является ли степенная функция непрерывной при любом положительном значении показателя степени?

1. нет;
2. да;
3. иногда;
4. при x >1;
5. нет правильного ответа.

ЗАДАНИЕ 3

Вопрос 1. Сформулируйте свойство непрерывности сложной функции:

1. сложная функция непрерывна всегда;
2. если функция u=g(x) непрерывна в точке x_0 и функция y=f(u) непрерывна в точке $u=g(x_0)$, то сложная функция y=f(g(x)) непрерывна в точке x_0;
3. сложная функция, являющаяся композицией непрерывных функций, не является непрерывной;
4. сложная функция разрывна;
5. сложная функция является композицией непрерывных функций и имеет устранимый разрыв.

Вопрос 2. Является ли функция $y=(1-x^2)^3$ непрерывной?

1. нет;
2. иногда;
3. при x >1;
4. да;
5. нет правильного ответа.

Вопрос 3. Что такое производная функции?

1. предел значения этой функции;
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
3. 0;
4. 1;
5. e

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. «Расписать» с помощью логических символов определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty; \quad \lim_{x\to a} f(x) = A; \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty;$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty;$$

2. Привести пример ограниченной расходящейся последовательности.

3. «Придумать» последовательность, для которой все натуральные числа {1;2;3;4;5;…..} являются предельными точками.

4. Доказать, что если последовательность имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то число A будет единственной предельной точки данной последовательности.

5. Доказать, что если множество ограничено сверху и ограничено снизу, то оно ограничено в обычном смысле.

6. Дать определение счетного множества. Привести примеры счетных множеств, примеры несчетных множеств.

7. Доказать, что множество иррациональных чисел несчетно.

8. Задача. Пусть $A \subset R-$ подмножество множества действительных чисел, причем supA=infA=1. Найдите множество A.

9. Дайте определение взаимно однозначного отображения *y=f(x)*. Приведите пример.

10. Докажите, что, если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена, то из нее можно выбрать последовательность, имеющую предел ∞.

11. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+9}-\sqrt{n+2}\right)$	е) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$
б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$	ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$
в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$	з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-3e^{x}+2}{x}$
г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tg^3x-3tgx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$	и) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+2\ln x)}{\ln(1+4\ln x)}$
д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$	к) $\lim\limits_{x\leftarrow\frac{\pi}{4}}\frac{tgx+3tgx}{tg4x}$

12. Показать на примерах, что если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ *и* $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0,$ то предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ может быть равен нулю, бесконечности, конечной константе (неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$).

13. Пусть $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)=\frac{x+1}{x-1}$ при $x\neq -2$ *и* $x\neq 1$. Найти f(x).

14. Найти функцию *f(x)*, удовлетворяющую уравнению $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$.

15. Показать, что функция $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей числовой оси.

16. Доказать (привести пример), что из существования предела $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ не следует существование пределов $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

17. Показать на примерах, что $[1^\infty]$ – неопределенность, то есть, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=1,$ *а* $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty,$ то предел $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x))^{\beta(x)}$ может принимать значения и 0, и 1, и ∞, и многие другие.

18. Записать определения для бесконечно малых величин $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *при* $x\to a$

$$\alpha(x)=0(\beta(x));\quad \alpha(x)=O(\beta(x));\quad \alpha(x)\sim\beta(x).$$

19. Сформулируйте определения функции $y=f(x)$ непрерывной в точке a (по Гейне; по Коши).

20. Разъясните геометрический смысл непрерывности функции в точке.

21. «Придумайте» пример, доказывающий, что из непрерывности произведения функции $f(x)g(x)$ в точке, не следует непрерывность в этой точке функций $f(x)$ b $g(x)$.

22. Дайте определение точки разрыва функции $y=f(x)$. Какие типы разрывов Вы знаете? Покажите на примерах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Арманович. 9–е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 800 с.
2. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн.: Учеб. пособие / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; Под ред. В.А. Садовничего. 2–е изд., перераб. Кн. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – М.: Высш. шк., 2002. – 725 с.: ил.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. 6–е изд. – М.: ОНИКС XXI век, 2002. – 416 с.: ил.
4. Демидович, Б.П. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: Астрель, 2001. – 656 с.
5. Ильин В.А. Основы математического анализа: Учебник. Ч. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. 6–е изд., стер. – М.: Физматлит, 2001. – 648 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. Т. 2 : Учеб. пособие для втузов. / Н.С. Пискунов. Изд. Стер. – М.: Интеграл–пресс, 2001. – 544 с.
7. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике: тридцать шесть лекций. Ч. 1 / Д. Письменный. – М.: Рольф, 2001. – 288 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2002. – 448 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2002. – 464 с.
10. Шипачев В.С. Математический анализ: Учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2001. – 176 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Самостоятельная работа по теме:
«Операции над множествами. Пересечение и объединение множеств»

Вариант № 1
1. Даны множества: A={3,5,7} и B={0,3,5,7,8}.
Найдите пересечение и объединение множеств A и B.
2. Даны множества: A={4,6,8,10} и B={7,8,9,10,11}.
Найдите разность множеств A и B. Найдите дополнение множества A до B.
3. Составьте для каждого из слов «электричество» и «учебник» свое множество.Найдите пересечение и объединение полученных множеств.
4. Изобразите с помощью кругов Эйлера пересечение множеств и равенство множеств.

Вариант № 2
1. Даны множества: A={7,9,3,0,2} и B={0,3,2,1}. Найдите пересечение множеств A и B. Найдите объединение множеств A и B.
2. Даны множества: A={2,3,5,6,9} и B={6,7,8,9,10,11}.
Найдите декартово произведение множеств A и B. Найдите разность множеств A и B.
3. Составьте для каждого из слов «задача» и «карандаш» свое множество.
Найдите пересечение и объединение полученных множеств.
4. Изобразите с помощью кругов Эйлера объединение множеств и подмножество множества.

Вариант № 3
1.Даны множества: A={1, 5, 9}и B={9,8,7,6,5,4,3,2,1}.
Найдите пересечение множеств A и B. Найдите объединение множеств A и B.
2. Даны множества: A={5,4,3}и B={6,7,8,9,10}.
Найдите разность множеств A и B. Найдите дополнение множеств A и B.
3. Составьте для каждого из слов «множество» и «свойство» свое множество.
Найдите пересечение и объединение полученных множеств.
4. Изобразите с помощью кругов Эйлера равенство множеств и подмножество множества.

Вариант № 4
1.Даны множества: A={9,6,5,3,2}и B={1,4,7,8}
Найдите пересечение множеств A и B. Найдите объединение множеств A и B.
2. Даны множества: A={1,3,4,5}и B={6,0,8,1,5}.

Найдите декартово произведение множеств A и B. Найдите дополнение множества A до B.
3. Составьте для каждого из слов свое множество «способ», «подоконник». Найдите пересечение и объединение полученных множеств.
4. Изобразите с помощью кругов Эйлера множества, которые не пересекаются и объединение множеств.

Вариант № 5.
1. Даны множества: A={3,5,7} и B={0,3,5,7,8}
Найдите пересечение множеств A и B. Найдите объединение множеств A и B.
2. Даны множества: A={4,6,8,10} и B={7,8,9,10,11}.
Найдите декартово произведение множеств A и B. Найдите разность множеств A и B.
3. Составьте для каждого из слов свое множество «электричество», «учебник». Найдите пересечение и объединение полученных множеств.
4. Изобразите с помощью кругов Эйлера пересечение множеств и равенство множеств.

Вариант № 6
1. Даны множества: A={7,9,3,0,2} и B={0,3,2,1}
Найдите пересечение множеств A и B. Найдите объединение множеств A и B.
2. Даны множества: A={2,3,5,6,9}и B={6,7,8,9,10,11}.
Найдите дополнение множеств A и B. Найдите разность множеств A и B.
3. Составьте для каждого из слов «задача» и «карандаш» свое множество. Найдите пересечение и объединение полученных множеств.
4. Изобразите с помощью кругов Эйлера объединение множеств и подмножество множества.

Вариант № 7
1. Даны множества: A={1,5, 9}и B={9,8,7,6,5,4,3,2,1}.
Найдите пересечение множеств A и B. Найдите объединение множеств A и B.
2. Даны множества: A={5,4,3}и B={6,7,8,9,10}.
Найдите декартово произведение множеств A и B. Найдите разность множеств A и B.
3. Составьте для каждого из слов «множество» и «свойство» свое множество. Найдите пересечение и объединение полученных множеств.
4. Изобразите с помощью кругов Эйлера равенство множеств и подмножество множества.

Вариант № 8
1. Даны множества: A={9,6,5,3,2}и B={1,4,7,8}.

Найдите пересечение множеств А и В. Найдите объединение множеств А и В.

2. Даны множества: $A=\{1,3,4,5\}$ и $B=\{6,0,8,1,5\}$.

Найдите декартово произведение множеств А и В. Найдите дополнение множеств А и В.

3. Составьте для каждого из слов «способ» и «подоконник» свое множество. Найдите пересечение и объединение полученных множеств.

4. Изобразите с помощью кругов Эйлера множества, которые не пересекаются, и объединение множеств.

Приложение 2

Контрольная работа по теме «Множества»

1. Указать верные записи:
а) $2 \subset\{-2; 2;1\}$; б) $\{2\}\in\{-2; 2;1\}$; в) $\{2\}\subset\{-2; 2;1\}$;
г) $\emptyset \in\{-2; 2;1\}$; д) $\emptyset \subset\{-2; 2;1\}$; е) $2\in\{-2; 2;1\}$.
2. Среди перечисленных ниже множеств указать конечные и бесконечные множества:
а) множество чисел, кратных 13;
б) множество делителей числа 130;
в) множество деревьев в лесу;
г) множество точек отрезка;
д) множество рек Российской Федерации;
е) множество корней уравнения $2(x +5) = 2x +10$;
ж) множество решений неравенства $x +1< 3$.
3. Указать, какие из следующих множеств являются пустыми:
а) множество параллелограммов с неравными противоположными сторонами;
б) множество натуральных чисел, меньших 2;
в) множество натуральных двузначных чисел, меньших 9;
г) множество двузначных чисел, больших 9;
д) множество квадратов, не имеющих центра симметрии;
е) множество городов на Луне.
4. Для каждого из слов СОСНА, ОСКОЛОК, НАСОС, КОЛОС составить множества его различных букв. Есть ли среди них равные множества?
5. Указать равные между собой множества:
а) A – множество всех квадратов;
б) B – множество всех прямоугольников;
в) C – множество всех четырёхугольников с прямыми углами;
г) D – множество всех четырёхугольников с равными сторонами;
д) F – множество всех ромбов с прямыми углами.
6. Записать все подмножества множества $A =\{-2;8;1\}$.
7. Перечислить элементы множеств:
а) $A=\{x|x^5-8x^3 3+16x=; 0\}$ б) $B=\{x|(4x^2-1)\cdot\sqrt{x+6}=0\}$.
8. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $C_R A$, $C_R B$, если:
а) $A =[-2;6]$, $B =(1;10)$; б) $A= (-3;5]$, $B = [6;7)$;
в) A $(0;-1]$, B $(-\infty;2)$; г) $A =(-\infty;8)$, $B=(0;+\infty)$;
д) $A = [2;7]$, $B = [4,5;7]$; е) $A = [3;+\infty)$, $B =[3,2;+\infty)$;
ж) $A=[-10,5;4]$, $B=[0;8]$; з) $A= (-\infty;7]$,$B=[7+;\infty ;)$
и) $A=(-\infty;-5,5]$, $B=(-6;+\infty.)$
9. Найти $A \cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B \setminus A$, если:
а) $A =\{-2;0;3;8;1\}$, $B =\{0;4;5;8;1\}$;

б) A={1;2;3;4;5}, B ={4;1}.
10. Числовое множество E задано в виде E= (A∪B)\ (C∩D), где A=[−10;2], B =(0;5], C =[−3;+∞), D =(−20;−1). Найти $C_R E$.
11. Найти A∩ B, если A – это множество корней уравнения 2x+5x+6=0, а B – это множество корней уравнения 2x−2x−8= 0.
12. Из множеств {a;b;c} и {1; 2} составить кортежи.
13. Сравнить кортежи:
а) (12; 22;32) и (1;16;81);
б) (1; 2; 3) и (3;1; 2);
в) (1; 2; 3) и (1;2;3;4).
14. Пусть A ={1; 2}. Выписать все элементы декартова произведения A× A.
15. Проверить, верно ли, что A(×B)×C=A×(B×C. В качестве множеств A, B и C взять множества A = {1}, B = {4; 5}, C={8 ; 2}.
16. Найти A(×B)∩(C×D) и A(×B)\(C×B), если =A {1;6;9}, B ={5;7}, C ={6}, D ={1;5;6;7;8}.
17. В группе 50 студентов. Из них 33 студента любят болтать на занятиях, 23 – любят решать задачи, 21 – любят на занятиях спать. Среди тех, кто болтает на занятиях, постоянно засыпают 17 человек, а среди тех, кто решает задачи, засыпает только 13. Болтать и решать задачи умеют 18 человек, а 11 человек успевают на одном занятии сделать три дела. Сколько студентов вообще ничего не любят?
18. 10 мальчиков поехали на пикник. При этом 3 из них обгорели, 5 были сильно покусаны комарами, а 4 остались всем довольны. Сколько покусанных комарами мальчиков также и обгорели? Сколько обгоревших мальчиков не были покусаны комарами?
19. Из 40 предложений 30 содержат предлог «в», 27 – предлог «на», в 5 предложениях нет ни того ни другого. Сколько предложений содержат оба предлога?
20. A, B, C – подмножества универсального множества U. Известно, что A∩B∩C=∅. Построить диаграммы Эйлера-Венна для данных множеств и отметить штриховкой области, изображающие следующие множества:
а) A′∪(B∩C;) б) A∪ (B′∪C;)
в) A∩ (B′∪C); г) (A∪ C′)\B;
д) (A∩B′)∪C; е) (A\ B′)∩C;
ж) A\(B∩C′); з) (A\ B) ∪ C′;
и) A ∪(B∩C)′; к) (A′∪B′)∩C.
21. Построить диаграммы Эйлера-Венна для следующих множеств:
а) (A∪B)∩ C; б) A∪B∩C;
в) (A∩B)∪ C; г) A∩B∪C.

Задания типового расчета «Пределы»

1 – доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(n\right)=A.$

2 – 4 – найти пределы указанных последовательностей.

5 – доказать, что $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=A.$

6 –13 – найти пределы указанных функций.

14 – доказать, что функция $f\left(x\right)$ непрерывна в точке x_0.

15,16 – найти точки разрыва указанных функций, определить тип разрыва, построить схематически графики функций.

17 – определить порядок малости (относительно $x, x\to 0$) указанных функций.

Варианты заданий типового расчета

Вариант 1		Вариант 2	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+2)}{n^3-2}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^4-1}{(n+1)(3n-1)(n^2+4)}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+n}}{n+1}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+5)(n^4+1)}-\sqrt{n^6-3n^2+5}\right)$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$
5	$\lim\limits_{x\to3}(2x+1)=7$	5	$\lim\limits_{x\to1}(3x-2)=1$
6	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$	6	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x-2}{x^3+x}$
7	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$	7	$\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$
8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{\sin5x}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 4x}{5x^4}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin4x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x^2+3}\right)^{1-2x}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-x+1}\right)^{8x}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{3x^2}$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)^{x^2+2}$
12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos10x}{e^{x^2}-1}$	12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{7x^2}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{\sin7x-2x}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2 x+x^3}{3\cos^2 x-3}$
14	$f(x)=3x+4,\quad x_0=2$	14	$f(x)=2x^2-1,\quad x_0=3$
15	$y=\frac{2x+3}{x(x^2+1)}$	15	y=tgx
16	$y=\begin{cases}-1, & x<-1\\ x, & \lvert x\rvert\le1\\ e^{\frac{1}{x-1}}, & x>1\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}\ln\lvert x\rvert, & x\le e\\ 1, & x>e\end{cases}$
17	$f(x)=e^{x^2}-1$	17	$f(x)=\sqrt{1+x^3}-1$

Вариант 3		**Вариант 4**	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)=3$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+8}{(2n-3)(n+10)}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^4+n^3-7n^2+1}{3n^4+5n+2}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n+2}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5}-\sqrt{n^4-8}\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^2-5}\right)n\sqrt{n}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$
5	$\lim\limits_{x\to2}(5x-3)=7$	5	$\lim\limits_{x\to1}(3x-8)=-5$
6	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{\left(x^3+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$	6	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$
7	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$	7	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
8	$\lim\limits_{n\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{tg10x}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2-6x}{\sin 3x}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{\cos 7x-\cos 2x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2x}$
11	$\lim\limits_{x\to0}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{ctgx}$	11	$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+4x+x^3}{8x^2-3x^3}$	12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+2x)^4-1}{7x}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-7x)}{\sin[\pi(x+7)]}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1-x^3\right)+x^2}{xtg^2x}$
14	$f(x)=2x^2-8,\quad x_0=3$	14	$f(x)=x^2+2x-1,\quad x_0=1$
15	$y=\frac{3}{1-x^2}$	15	$y=e^{\frac{1}{x-2}}$
16	$y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \lvert x\rvert\le1\\ 0, & \lvert x\rvert>1\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}e^{2x}, & x<0\\ x+2, & 0\le x\le1\\ 2^x, & x>1\end{cases}$
17	$f(x)=\arcsin x^2-x$	17	$f(x)=\arcsin x^3+5x^4$

Вариант 5		Вариант 6	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n}=2$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-1}{n+1}=7$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{(n-1)(n^3+4)}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+1)^2+(n-1)^2}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-6^{n+1}}{5^{n+1}+6^{n+1}}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-3n+1}-n\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n^2+5n}\right)$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-2}{10n^3+1}$
5	$\lim\limits_{x\to1}(3x+2)=5$	5	$\lim\limits_{x\to7}(2x-3)=11$
6	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$	6	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+2x+1)^2}{x^4+2x+1}$
7	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$	7	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{6+x^2}-\sqrt{4+3x^2}}{x-1}$
8	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$	8	$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{tg\pi x}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{tg2\pi x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+2}{2x^2-5}\right)^{x^2}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-5}\right)^{2x+4}$
11	$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$	11	$\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$
12	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+5tgx)}$	12	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{(x-1)^2}-\cos(x-1)}{(x-1)^2}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1+x^4}{x^3+8\sin x}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\sqrt{x}+tg^2x}{x+x^2}$
14	$f(x)=4x^2+2x-1,\quad x_0=2$	14	$f(x)=x^2+2,\quad x_0=2$
15	$y=2^{\frac{1}{x-3}}$	15	$y=8^{\frac{1}{2-x}}$
16	$y=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x^2, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}4+x, & x<0\\ x, & x=0\\ 4-x, & x>0\end{cases}$
17	$f(x)=7\sin^2x+3x^3$	17	$f(x)=tg^3x+x^2$

Вариант 7		**Вариант 8**	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{n+1}=5$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}=2$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3+(n+3)^3}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2+2n+3}\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^3+5n^2+2n+1}{8n^4-3n^2+n+3}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^7+8n^2-5n+1}{4n^6+7n^5+7}$
5	$\lim\limits_{x\to1}\left(1+\frac{1}{x}\right)=2$	5	$\lim\limits_{x\to1}(4x+2)=6$
6	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+5x+2}{4x^2+7x-2}$	6	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$
7	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-2x}}{3x^2-4x+1}$	7	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$
8	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x-\cos3x}{x^2}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{7x^2}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$
10	$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$	10	$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\sin2x}}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x+1}{2x^2-1}\right)^{x^2}$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+10}{x+1}\right)^{3x+5}$
12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{6x}$	12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{-2x}}{2arctgx-\sin x}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\arcsin x)+x^2}{tg2x}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{x^2+1}-e}$
14	$f(x)=x^2-4x,\quad x_0=1$	14	$f(x)=1+x^2,\quad x_0=3$
15	$y=e^{\frac{1}{2x}}$	15	$y=\frac{\lvert x-3\rvert}{x-3}$
16	$y=\begin{cases}0, & x\le0\\ e^{2x}, & 0<x<1\\ x-1, & x\ge1\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}-1, & x<-1\\ x, & \lvert x\rvert\le1\\ e^x, & x>1\end{cases}$
17	$f(x)=e^x-\cos x^2$	17	$f(x)=x^2\sin\sqrt{x}$

Вариант 9		**Вариант 10**	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{1+n^2}=-1$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n}=4$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(n-1)^2-(2n+2)^2}{n+5}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+5}{8n^4-3n^2+n+3}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1!)}{(3n)\,!(n-1)}$
5	$\lim\limits_{x\to1}(x+7)=8$	5	$\lim\limits_{x\to0}(2x^2+1)=1$
6	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$	6	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$
7	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x^2+x}$	7	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$
8	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$	8	$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$
9	$\lim\limits_{x\to-4}\frac{tg\pi x}{x+4}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{\sin[2\pi(x+10)]}$
10	$\lim\limits_{x\to0}(1+tgx)^{\frac{4}{\sin3x}}$	10	$\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^3 2x)^{\frac{1}{x^3}}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x-7}{8x+4}\right)^{3x}$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+7}\right)^{2x+5}$
12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-3^x}{x}$	12	$\lim\limits_{x\to2\pi}\frac{\sin7x-\sin3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+2x^3}{\ln(1+x)+x^2}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2x+8x^3}{\ln^2(1+2x)+x^4}$
14	$f(x)=2x+3,\quad x_0=4$	14	$f(x)=4-2x^3,\quad x_0=0$
15	$y=\frac{\sin3x}{2x}$	15	$y=\frac{4}{x(x-2)}$
16	$y=\begin{cases}x+1, & x<-1\\ 3x-1, & x\ge-1\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}e^{-x}, & x\le1\\ x+1, & 1<x<2\\ e^x, & x\ge2\end{cases}$
17	$f(x)=x^2\left(e^{2x}-1\right)$	17	$f(x)=2\sqrt{\sin x}$

Вариант 11		**Вариант 12**	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{1-2n}=-\frac{1}{2}$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=2$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n-1)^2-4(n+1)^2}{n^2+4}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+1}}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\sqrt{n}-\sqrt{n^5+3}\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{5+8n^2}-2n\right)$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^7+4n^2+6}{(n+2)(n^2+1)}$
5	$\lim\limits_{x\to2}(4x-2)=6$	5	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x-1}=4$
6	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{4x^2-2x-2}{7x^2-8x+1}$	6	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+x^2-x+1}$
7	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x}}$	7	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$
8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\cdot tgx}{\sin 2x^2}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{tgx}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$
10	$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^3-x+1}{x^3+x-1}\right)^{-x^2}$	10	$\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{s^2+x}}$
11	$\lim\limits_{x\to0}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{ctgx}$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+7}{5x+3}\right)^x$
12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{2^x-1}$	12	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x+5x^2}{xtgx+x^3}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 8x-1+x^4}{xtgx}$
14	$f(x)=16x^2-1,\quad x_0=0$	14	$f(x)=x^2-8,\quad x_0=4$
15	$y=ctgx$	15	$y=\frac{x^2-3x}{\lvert x-3\rvert}$
16	$y=\begin{cases}2^x, & x<0\\ 3^x, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}x^2-2x+1, & x<1\\ x+1, & x\ge1\end{cases}$
17	$f(x)=\sqrt{tg3x}$	17	$f(x)=tg^2 5x+\sqrt{x}$

Вариант 13		Вариант 14	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{n^2}=-2$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{1-n^2}=-3$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n^2+7}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2-\sqrt{n(n+2)}\right]$
5	$\lim\limits_{x\to 0}2^x=1$	5	$\lim\limits_{x\to 0}3^x=1$
6	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$	6	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{4x^2+x-2}$
7	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$	7	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$
8	$\lim\limits_{x\to -0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$	8	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$
9	$\lim\limits_{x\to -0}\frac{\arcsin x}{4x}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin[2\pi(x+10)]}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^x$	10	$\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^{-3}}$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^{x^2}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+tg2x}{x\sin 3x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2x^2+tg^4x}{\sqrt{1-x}+2x^4}$
13	$\lim\limits_{\alpha\to 1}\frac{2^{\alpha-1}-1}{\sin\pi(\alpha-1)}$	13	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\ln(1+7x)}{\sin^4 4x}$
14	$f(x)=2x^2+3x,\quad x_0=1$	14	$f(x)=x^3+x,\quad x_0=1$
15	$y=\frac{1}{x^2-4}$	15	$y=\frac{4}{x(x-2)}$
16	$y=\begin{cases}2x, & x<0\\ 4, & x=0\\ 3^x, & x>0\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}arctg\frac{1}{x}, & при\, x\le 1\\ x, & при\, x>1\end{cases}$
17	$f(x)=\sin\sqrt{x\sqrt{x}}$	17	$f(x)=2\sin^3 3x+x^4$

Вариант 15		Вариант 16	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n^3-1}=3$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n}{(n+1)^4(n-1)^4}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+3}\right)$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\,!}{(n+1)\,!-n\,!}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+5}{n^3-4n+3}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^5+4n^4+3}{6n^5-4n^3+5}$
5	$\lim\limits_{x\to1}(2x+2)=4$	5	$\lim\limits_{x\to5}(2x+3)=13$
6	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+2x^2-4x-8}$	6	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$
7	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{x^2}$	7	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$
8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{tg3x}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx+\sin x}{x}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos3x}{tgx}$
10	$\lim\limits_{x\to0}(2tgx+1)^{\frac{1}{\sin x}}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-4}{2x^2-1}\right)^{-x^2}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$	11	$\lim\limits_{x\to0}(\sin x+1)^{\frac{1}{tg3x}}$
12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2 x+3tg^2x}{x^4+x^2}$	12	$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\log_2 x}$
13	$\lim\limits_{x\to1}\frac{3^{5x-3}-3^{2x}}{tg\pi x}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{\sin3x-\sin5x}$
14	$f(x)=4x^2+4,\quad x_0=7$	14	$f(x)=5x^2+3,\quad x_0=1$
15	$y=\frac{2}{x(x-4)}$	15	y= $\frac{x+2}{x^2-1}$
16	$y=\begin{cases}2^x, & x<0\\ 2^{-x}, & x\ge0\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & \lvert x\rvert\le1\\ -x^2+1, & \lvert x\rvert>1\end{cases}$
17	$f(x)=2\sqrt{tg^3x}$	17	$f(x)=\cos x^3-\sqrt{\cos x}$

Вариант 17		Вариант 18	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+1}=3$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+15}{n+1}=5$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3+(n+1)^3}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+5}{8n^2-3n+1}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}-\sqrt{n(n^2+3)}\right)$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^8+4n^2-6}{5n^7+4n^6+3n^5+n+1}$
5	$\lim\limits_{x\to3}(2x+3)=9$	5	$\lim\limits_{x\to-2}(2x+4)=0$
6	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{4x^2+8x-12}{2x^3+x-15}$	6	$\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2+6x+5}{2x^2-3x-35}$
7	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$	7	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$
8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3 3x}{x^3}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x-x^2}$
11	$\lim\limits_{x\to0}(2-\cos x)^{\frac{1}{2tgx}}$	11	$\lim\limits_{x\to0}(3tgx+1)^{\frac{1}{\sin 2x}}$
12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^4)+x^6}{tg^2x+tg^4x}$	12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x+x^2}{\ln(1+2x^3)+2x^2}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2-1}}{tg^2x}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\sqrt{x}\ln(1+8\sqrt{x})}{\sin x}$
14	$f(x)=x^2+x+1,\quad x_0=1$	14	$f(x)=x^2+2x,\quad x_0=2$
15	$y=arctg\frac{1}{x-2}$	15	y= $\frac{1}{1-2^x}$
16	$y=\begin{cases}x^2-1, & x\le1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}x+5, & x\le2\\ \ln(x-1), & x>2\end{cases}$
17	$f(x)=arctg4x+3x^2$	17	$f(x)=tg^3x+\sin3x^2$

Вариант 19		Вариант 20	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-n^2}{1+n^2}=-1$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=2$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{(n-1)^2}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^7+6n^5+n^3+2}{8n^7+1}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)}-\sqrt{n^2-2}\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+1}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$
5	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$	5	$\lim\limits_{x\to1}(3x+4)=7$
6	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$	6	$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^3-4x^2+2x-8}{x^2-16}$
7	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$	7	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{2}}{x^3-1}$
8	$\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-7}{2x^2+9}\right)^{2x+1}$	9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos x}{\sin 5x}$
10	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x+1}{2+1x}\right)^{\frac{1}{x}}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x+1}{3x^2+2x-1}\right)^{5x}$
11	$\lim\limits_{x\to0}\frac{tg3x}{tg8x}$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+4}\right)^{5x^2}$
12	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{4+x}-1}{3+x}$	12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(\sqrt{1+x}-1)}{x^3}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+8x)+x^4}{3\sin^3 x}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x+4x^3}{xtgx}$
14	$f(x)=\frac{x}{1+x^2},\quad x_0=0$	14	$f(x)=x^2+1,\quad x_0=0$
15	$y=\frac{\|x+1\|}{x^2+x}$	15	y= $\frac{e^x-1}{x}$
16	$y=\begin{cases}x+2, & 0<x<1\\ 2, & x=1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}2\ln\|x\|, & \|x\|\le e\\ \ln x^2, & \|x\|>e\end{cases}$
17	$f(x)=x+x^2+\sin^3 x$	17	$f(x)=tg\sqrt{x}+x^2$

Вариант 21		**Вариант 22**	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}=\frac{3}{5}$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-2}{2n+1}=2$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(n^2-1\right)n}-\sqrt{n^3}\right)$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2-(2n+1)^2}{n^2+n+1}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+4n^2+n-3}{2n^2+7n+5}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^6+4n^2+2}{7n^6+5n^5}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}(2-3x)=-1$	5	$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5\right)=5$
6	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+2x+2}{4x^2+2x-2}$	6	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+2x+6}{x^2+2x-3}$
7	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{2-\sqrt[3]{x}}$	7	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{5x}$	8	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 7x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5x}{3x^2+5x+7}\right)^{x+1}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{\frac{x+1}{3}}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos x}\right)^{\frac{1}{tgx}}$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{3x+1}\right)^{-x^2}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x+5\sin x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1+x^3+2x^2}{tg^2x+2\sin x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4x}$	13	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-1}{4\ln(1+5x)}$
14	$f(x)=\sin x,\quad x_0=0$	14	$f(x)=x^2-8,\quad x_0=4$
15	$y=2^{\frac{1}{x^2}}$	15	$y=arctg\frac{1}{x}$
16	$y=\begin{cases}\ln\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert\le e\\ 1, & x>e\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}3x+2, & x\le -1\\ x, & -1<x<2\\ x^2+1, & x\ge 2\end{cases}$
17	$f(x)=x\sin^3 2x$	17	$f(x)=\sin^3 x+3x^2+x$

Вариант 23		Вариант 24	
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{n^2}=-2$	1	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)=3$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-2)^3}{(n+1)^4-n^4}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-3n+2}{2n^4+3n}$	3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$
5	$\lim\limits_{x\to2}x^2=4$	5	$\lim\limits_{x\to3}(4x-10)=2$
6	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x-1}{x^5-x^4+5x-5}$	6	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-6}{x^4-2x^3-x+2}$
7	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$	7	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$
8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{4-4\cos4x}{x\sin x}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$
9	$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin2x}{\sin3x}$	9	$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}$
10	$\lim\limits_{x\to0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)^x$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+6x+5}{x^2-5x+3}\right)^{3x+2}$	11	$\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos\pi x}}$
12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$	12	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\ln(1+2x)+x^4}{e^{x^2}-1+x+x^2}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{(tgx)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\sin^3 x}$	13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{\left(1+x^2\right)^3}-1}{x^{\frac{3}{2}}}$
14	$f(x)=4x+1,\quad x_0=1$	14	$f(x)=x^2-1,\quad x_0=4$
15	$y=4^{\frac{1}{x-3}}$	15	y= $arctg\,\frac{2}{x-1}$
16	$y=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$	16	$y=\begin{cases}x^2-2x, & x<0\\ -x^2+2x, & x\ge0\end{cases}$
17	$f(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$	17	$f(x)=x^5+arctg^4 3x$

Приложение 4

Решение типовых задач

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если $a_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}$, $a = -\dfrac{2}{3}$.

Решение. Число a называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$,n$\in$N,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует (найдется) такой номер

$N(\varepsilon)$, что при n>N, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Чтобы доказать утверждение что $-\dfrac{2}{3}$ есть предел числовой последовательности $a_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}$, надо указать N – число, зависящее от ε, начиная с которого будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{2n-1}{2-3n} + \dfrac{2}{3}\right| <$ ε, где ε – любое положительное число.

Под знаком модуля сделаем преобразования:

$$\left|\frac{6n-3+4-6n}{3(2-3n)}\right| < \varepsilon\ ,\ \left|\frac{1}{3(2-3n)}\right| < \varepsilon\ ,\left|\frac{1}{6-9n}\right| < \varepsilon\ .$$

Поскольку n – натуральное число, то при любом n выражение, стоящее под знаком модуля, будет отрицательным. Следовательно, раскрывая модуль, имеем: $\dfrac{1}{9n-6} < \varepsilon$.

Умножим обе части неравенства на (9n–6)>0 .

$$1< \varepsilon(9n-6),\quad 1+6\varepsilon < 9\varepsilon n,\quad n > \frac{1+6\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Таким образом, мы нашли, что N=$\left[\dfrac{1+6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]+1$ – (где [M] – целая часть числа M) – номер, начиная с которого будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{2n-1}{2-3n} + \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

Задача 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$.

Решение. Число *a* азывается пределом функции *y=f(x)* в точке x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число

$\delta(\varepsilon)$>0 такое, что из условия $|x-x_0|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Значит, чтобы доказать утверждение, что –7 есть предел функции

f(x)=$\frac{2x^2+5x-3}{x+3}$, надо указать такое $\delta(\varepsilon)$, что из неравенства

$|x+3|<\delta$, следовало бы $\left|\frac{2x^2+5x-3}{x+3}+7\right|<\varepsilon$.

Сделаем преобразования под знаком модуля. Корни квадратного трехчлена $2x^2+5x-3$ есть $1/2$ и –3. Следовательно,

$2x^2+5x-3=2(x-1/2)(x+3)$. Тогда

$$\left|\frac{2(x-1/2)(x+3)}{x+3}+7\right|<\varepsilon,\quad |2(x-1/2)+7|<\varepsilon,$$

$$|2x+6|<\varepsilon,\qquad 2|x+3|<\varepsilon,\ |x+3|<1/2\ \varepsilon.$$

Следовательно, мы смогли указать $\delta=1/2\ \varepsilon$ такое, что из неравенства $|x+3|<\varepsilon$.

следует $\left|\frac{2(x-1/2)(x+3)}{x+3}+7\right|<\varepsilon$.

Задача 3. Доказать, что функция $f(x)=3x^2-3$ непрерывна в точке $x_0=4$.

Решение. По определению, функция *y=f(x)* непрерывна в точке x_0, если функция *f(x)* определена в точке x_0, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, *где* $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Для нашего случая, функция $f(x)=3x^2-3$ в точке $x_0=4$ определена, f(4)=45.

$$f(x_0+\Delta x)=f(4+\Delta x)=3(4+\Delta x)^2-3,$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}[(3(4+\Delta x)^2-3)-45]=3*16-48=0.$$

Функция в точке $x_0=4$ непрерывна.

Задача 4. Найти точки разрыва функции и указать их тип.

Решение

1) y(x)=$\begin{cases} x+2, & 0<x<1 \\ 2, & x=1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$.

Функция в точке x_0=1, определена, ее значение равно 2. Рассмотрим односторонние пределы.

Предел справа: x стремится к 1, оставаясь при этом больше 1.

Значение функции в этом случае равно (2–x).

$$\lim_{x\to 1+0}(2-x)=1.$$

Предел слева: x стремится к 1, оставаясь при этом меньше 1.

Значение функции в этом случае равно (x+2).

$$\lim_{x\to 1-0}(x+2)=3.$$

Односторонние пределы различны и конечны, *разрыв 1–го рода.*

2) $y=\dfrac{2x+3}{x(x^2+1)}$.

В точке x_0=0 значение функции не определено. Рассмотрим односторонние пределы :

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{2x+3}{x(x^2+1)}=\infty, \qquad \lim_{x\to 0-0}\frac{2x+3}{x(x^2+1)}=\infty.$$

Разрыв 2–го рода.

Задача 5. Определить порядок малости функции *f(x)* относительно x, $x\to 0$.

$$f(x)=e^{x^2}-1.$$

Решение. Пусть $\alpha(x)$ и β(x) – бесконечно малые величины при $x\to x_0$

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c, \quad c\neq 0$, то $\alpha(x)$ и β(x) называют бесконечно малыми одного порядка. При *c=1* $\alpha(x)$ и β(x) эквивалентны ($\alpha(x)\sim\beta$(x)). Если *c*=0, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем β(x). Если при этом существует действительное число ι>0 такое, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^{\iota}}\neq 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка ι относительно β(x).

В нашем случае $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

Для вычисления предела воспользовались эквивалентными бесконечно малыми величинами $(e^x - 1) \sim x$, $x \to 0$.

Получили, что величина $(e^{x^2} - 1)$ более высокого порядка, чем (x), и существует число t=2, при котором значение предела не равно 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Задача 6. Вычислить $\lim_{n \to \infty} \frac{(n+6)^3 - (n-1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$.

Решение. Для вычисления пределов такого типа используется следующее правило:

если $P_n(x) = a_0 x^n + ... + a_n$, $Q_m(x) = b_0 x^m + ... + b_m$, то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

Сделаем преобразование числителя и знаменателя.

$(n+6)^3 - (n+1)^3 = n^3 + 18n^2 + 108n + 216 - n^3 + 3n^2 - 3n - 1 =$
$15n^2 + 105n + 215$.

$(2n+3)^2 + (n+4)^2 = 4n^2 + 12n + 9 + n^2 + 8n + 16 = 5n^2 + 20n + 25$.

Получили, что в числителе и в знаменателе стоят многочлены второго порядка.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+6)^3 - (n-1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{15n^2 + 105n + 215}{5n^2 + 20n + 25} = \frac{15}{5} = 3.$$

Задача 7. Вычислить $\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$.

Решение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^2 - 2n - 1}{n^3 - 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + n}{-6n^2} = -\infty$$

Чтобы «избавиться от неопределенности» в полученном после преобразований пределе $\lim_{x \to \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + n}{-6n^2}$, разделим и числитель, и знаменатель дроби на n^3 (в общем случае x^k, где k=max $\{nl;m\}$, где n и m – степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$).

Тогда имеем $\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + n}{-6n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{-6}{n}} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty.$

(Так как $n \to \infty$, то $\frac{2}{n} \to 0, \frac{1}{n^2} \to 0, \frac{-6}{n} \to 0.$ Так как числитель дроби стремится к 1, то эта величина ограниченная. Знаменатель является величиной бесконечно малой. Отношение величины ограниченной и величины малой является бесконечно большой величиной.)

Задача 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$.

Решение. Из–под каждого радикала вынесем большую степень n и в числителе, и в знаменателе:

$$\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}=\sqrt{n(1-\tfrac{1}{n})}-\sqrt{n^2(1+\tfrac{1}{n^2})}=n^{1/2}\sqrt{1-\tfrac{1}{n}}-n\sqrt{1+\tfrac{1}{n^2}}=$$

$$=n(n^{-1/2}\sqrt{1-\tfrac{1}{n}}-\sqrt{1+\tfrac{1}{n^2}})$$

$$\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}=\sqrt[3]{n^3(3+\tfrac{3}{n^3})}+\sqrt[4]{n^3(1+\tfrac{1}{n^3})}=n\cdot\sqrt[3]{(3+\tfrac{3}{n^3})}+n^{3/4}\cdot\sqrt[4]{(1+\tfrac{1}{n^3})}=$$

$$=n(\sqrt[3]{(3+\tfrac{3}{n^3})}+n^{-1/4}\sqrt[4]{(1+\tfrac{1}{n^3})}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^{-1/2}\sqrt{1-\tfrac{1}{n}}-\sqrt{1+\tfrac{1}{n^2}})}{n(\sqrt[3]{(3+\tfrac{3}{n^3})}+n^{-1/4}\sqrt[4]{(1+\tfrac{1}{n^3})}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

так как $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ стремятся к 0 при n, стремящемся к ∞.

Задача 9. Вычислить:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{7/2}\sqrt{1+\tfrac{5}{n^7}}-n^{1/2}\sqrt{1-\tfrac{5}{n}}}{n\sqrt[7]{1+\tfrac{5}{n^7}}+n^{1/2}\sqrt{1-\tfrac{5}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{7/2}(\sqrt{1+\tfrac{5}{n^7}}-n^{-3}\sqrt{1-\tfrac{5}{n}})}{n(\sqrt[7]{1+\tfrac{5}{n^7}}+n^{-1/2}\sqrt{1-\tfrac{5}{n}})}=$$

$$=\frac{n^{5/2}(\sqrt{1+\tfrac{5}{n^7}}-n^{-3}\sqrt{1-\tfrac{5}{n}})}{\sqrt[7]{1+\tfrac{5}{n^7}}+n^{-1/2}\sqrt{1-\tfrac{5}{n}}}=\infty$$

так как $n^{5/2}\to\infty$ при $n\to\infty$.

Задача 10. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n-1)})$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $[\infty-\infty]$ выражение, стоящее под знаком предела умножим и разделим на величину $(n+\sqrt{n(n-1)})$ и вычисление полученного предела сведется к вычислению пределов из задачи 7.

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n-1)})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n(n-1)})\cdot(n+\sqrt{n(n-1)})}{n+\sqrt{n(n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n(n-1)}{n+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2+n}{n+n\sqrt{1-1/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+n\sqrt{1-1/n}}=\frac{1}{2}$$

.

Задача 11. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)}$.

Решение. В числителе и знаменателе стоят суммы арифметических прогрессий.

Сумма арифметической прогрессии $S_n=\frac{a_1+a_n}{2n}\cdot n$, где α_1– первый член арифметической прогрессии, α_n – n–й член арифметической прогрессии.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2+2n)n}{(1+2n-1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+2n}{2n}=1.$$

Задача 12. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

По определению n!=1*2*3*...*n. Тогда
(2n+1)!=1*2*...*(2n+1),
(2n+2)!=1*2*...*(2n+1)(2n+2)= (2n+2) *(2n+1)!
(2n+3)!=1*2*...*(2n+1)(2n+2)(2n+3)=(2n+2)(2n+3)*(2n+1)!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!*(1+2n+2)}{(2n+1)!*(2n+2)(2n+3)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4n^2+10n+6}=0.$$

Задача 13. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n+7^{n-1}}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на 7^n:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2/7)^n+1}{(2/7)^n+1/7}$=7 так как $(2/7)^n$ стремится к 0 при $n\to\infty$.

Задача 14. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right]^{-n^3}$.

Решение. В числителе 7n представим как 3n+4n. Тогда числитель равен $(2n^2+3n–1)+4n$.

Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n^2+3n-1)+4n}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}$$

Величина $\dfrac{4n}{2n^2+3n-1}$ стремится к 0 при $n\to\infty$. Применим второй замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

Для этого показатель степени умножим и разделим на величину $\dfrac{4n}{2n^2+3n-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{2n^2+3n-1}\right)^{\frac{2n^2+3n-1}{4n}*(-n)^3*\frac{4n}{2n^2+3n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^4}{2n^2+3n-1}}=$$

$$\left[e^{-\infty}\right]=\left[\frac{1}{e^{+\infty}}\right]=0.$$

Задача 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

Решение. Неопределенность типа $[\frac{0}{0}]$ раскрывается путем сокращения общих множителей числителя и знаменателя.

При $x=2$, $x^3–3x–2=0$, то есть $x=2$ есть корень уравнения и многочлен $x^3–3x–2$ можно представить в виде произведения

$(x–2)(x^2+2x+1)$. Многочлен $(x^3–3x–2)$ разделим на многочлен $(x–2)$:

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^3-3x-2 & \underline{x-2} \\
\underline{x^3-2x^2} & x^2+2x+1 \\
\quad -\,2x^2-3x-2 & \\
\quad \underline{2x^2-4x} & \\
\qquad\quad -\,x-2 & \\
\qquad\quad \underline{x-2} &
\end{array}$$

$x^3–3x–2=(x–2)(x^2+2x+1)$

0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x-2}{(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-2)}=\lim_{x\to\infty}(x^2+2x+1)\equiv\infty.$$

Задача 16. Вычислить: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

Решение. $x=-2$ есть корень уравнения x^3+5x^2+8x+4 и корень уравнения x^3+3x^2-4.

$$\begin{array}{l|l} \_x^3+5x^2+8x+4 & \underline{x+2} \\ \underline{x^3+2x^2} & x^2+3x+2 \\ \quad \_3x^2+8x+4 & \\ \quad \underline{3x^2+6x} & \\ \qquad \_2x+4 & \\ \qquad \underline{2x+4} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \_x^3+3x^2-4 & \underline{x+2} \\ \underline{x^3+2x^2} & x^2+x-2 \\ \quad \_x^2-4 & \\ \quad \underline{x^2+2x} & \\ \qquad \_-2x-4 & \\ \qquad \underline{2x-4} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+3x+2)}{(x+2)(x^2+x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$$

=

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{3}.$$

Задача 17. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $[\frac{0}{0}]$ избавимся от иррациональности в числителе и знаменателе.

Если $\sqrt{1+2x}-3$ умножим на $\sqrt{1+2x}+3$, то будем иметь:

$(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)=(\sqrt{1+2x})^2-3^2=1+2x-9=2x-8.$

Аналогично:

$(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=(\sqrt{x})^2-2^2=x-4.$

Для эквивалентного преобразования числитель и знаменатель умножим и разделим на $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(2x-8)}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

Задача 18. Вычислить: $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Решение

$(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)=(\sqrt{1-x})^2-3^2=1-x-9=-(8+x)$,

$(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(x)^2})=2+(\sqrt[3]{x})^3=8+x$.

Для эквивалентного преобразования числитель и знаменатель умножим на величину $(\sqrt{1-x}+3)$ $(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(x)^2})$.

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(x)^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(x)^2})(\sqrt{1-x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{-(8+x)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(x)^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}=\lim_{x\to -8}\frac{-(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(x)^2})}{(\sqrt{1-x}+3)}=-\frac{4+4+4}{3+3}=$$

$$-2.$$

Задача 19. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{Sin\left(\pi\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)}$.

В числителе применим эквивалентность $(e^{4x}-1)\sim 4x,\ x\to 0$.

В знаменателе применим эквивалентность $sin(x)\sim x,\ x\to 0$.

$$Sin\left(\pi\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)=Sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}x\right)=-Sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\approx-\frac{\pi}{2}\cdot x,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{Sin\left(\pi\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{-\frac{\pi}{2}x}=-\frac{8}{\pi}.$$

Задача 20. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+cos(x-\pi)}{(e^{3x}-1)^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+cos(x-\pi)}{(e^{3x}-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+cos(\pi-x)}{(e^{3x}-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{(e^{3x}-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{(3x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot 9x^2}=\frac{1}{18}.$$

Применим эквивалентность $1-\cos(x)\sim\dfrac{x^2}{2},\ x\to 0$ и $(e^{3x}-1)\sim 3x,\ x\to 0$.

Задача 21. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\frac{5}{2}\pi\right)}{\arcsin 2x^2}$.

Решение. $\cos(\frac{5}{2}\pi + x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, далее воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми величинами arcsin(x) ~ x, $x \to 0$ и sin(x) ~ x, $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{5}{2}\pi\right)}{\arcsin 2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{\arcsin 2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x^2} = \infty.$$

Задача 22. Вычислить: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+8x}{2+11x}\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$.

В пределе при $x \to 0$ нет неопределенности. Поэтому непосредственно подставляя предельное значение, получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+8x}{2+11x}\right)^{\frac{1}{x^2+1}} = \frac{1}{2}.$$

Задача 23. Вычислить: $\lim_{x\to 0}\left(\sin(x+2)\right)^{\frac{3}{3+x}}$.

Решение. В пределе при $x \to 0$ нет неопределенности. Поэтому, непосредственно подставляя предельное значение, получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin(x+2)\right)^{\frac{3}{3+x}} = \sin 2.$$

Задача 24. Вычислить: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Раскрываем неопределенность $[\frac{0}{0}]$, раскладывая на множители многочлен в числителе дроби

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)^{\frac{1}{x^2}} = 3^1 = 3$$

Задача 25. Вычислить: $\lim_{x\to \pi/4}(tgx)^{ctgx} = 1.$

Нет неопределенности.

Задача 26. Вычислить : $\lim_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

Решение. Введем новую переменную $y = x - 2\pi$, тогда $y \to 0$, $x = y + 2\pi$, $\cos(2\pi + y) = \cos(y)$, $\sin(4\pi + 2y) = \sin(2y)$. Из тригонометрии известно, что

$\cos(x) = 1 - 2\sin^2(\frac{y}{2})$.

$$\lim_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{1}{\sin^2 2y}}=\lim_{y\to o}(1-2\sin^2\frac{y}{2})^{\frac{1}{\sin^2 2y}}=$$

$$=\lim_{y\to o}\left(1-2\sin^2\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2(\frac{y}{2})}\bullet\frac{1}{2\sin^2 2y}\bullet(-2\sin^2\frac{y}{2})}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{y}{2}}{\sin^2 2y}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{y}{2}}{\sin^2 2y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{-2\frac{y^2}{4}}{4y^2}}=e^{\frac{-1}{8}}.$$

Задача 27. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

Решение. Сделаем замену $y=x-\frac{\pi}{2}$, $y\to 0$, $tg\frac{x}{2}=tg(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})$; по формуле для тангенса суммы двух углов имеем

$tg(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})=\dfrac{tg\frac{y}{2}+1}{1-tg\frac{y}{2}}$, так как $tg\frac{\pi}{4}=1$. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{tg\frac{y}{2}+1}{1-tg\frac{y}{2}}\right)^{\frac{1}{y}}$.

Для раскрытия неопределенности $[1]^{\infty}$ преобразуем

$$\frac{tg\frac{y}{2}+1}{1-tg\frac{y}{2}}=1+\frac{tg\frac{y}{2}+1}{1-tg\frac{y}{2}}-1=1+\frac{tg\frac{y}{2}+1-1+tg\frac{y}{2}}{1-tg\frac{y}{2}}=1+\frac{tg\frac{y}{2}+1}{1-tg\frac{y}{2}}.$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\frac{tg\frac{y}{2}+1}{1-tg\frac{y}{2}}\right]^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left[\left[\left(1+\frac{2tg\frac{y}{2}}{1-tg\frac{y}{2}}\right)^{\frac{1-tg\frac{y}{2}}{2tg\frac{y}{2}}}\right]^{\frac{2tg\frac{y}{2}}{1-tg\frac{y}{2}}}\right]^{\frac{1}{y}}=e^1=e.$$

где $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2tg\frac{y}{2}}{1-tg\frac{y}{2}}\cdot\dfrac{1}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\cdot\frac{y}{2}}{\left(1-tg\frac{y}{2}\right)}\cdot\dfrac{1}{y}=1.$

Приложение 5

Перечень умений студентов

Умение	Алгоритмы
Найти область определения функции	1. Выписать элементарные функции, из которых состоит данная функция. 2. Записать в виде системы неравенств и равенств области определения выделенных элементарных функций. 3. Найти решение полученной системы. 4. Выписать область определения исходной функции – решение системы.
Вычисление пределов функций а) представляющих дробно – рациональную функцию; b) содержащих тригонометрические функции с) имеющих вид $(1+\alpha)^{\beta}$, где $\alpha \to 0,\ \beta \to \infty$	1. Подставить предельное значение аргумента в исследуемое выражение. Если при этом получено конечное значение, то оно является пределом данной функции. 2. Определить тип неопределенности: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [0,\infty], \left[1^{\infty}\right]$. Заметим, что $\left[\frac{1}{\infty}\right]$ и $\left[\frac{1}{0}\right]$ не являются неопределенностью, в первом случае предел равен нулю, во втором - ∞. Пояснение: a) если функция является дробно – рациональной (сл. а), то далее выполняются пункты 3, 4, 5 алгоритма; b) если функция содержит тригонометрические выражения, а неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ (сл. b), то далее выполняются пункты 6, 7 алгоритма. c) Если выражение представляет неопределенность типа $\left[1^{\infty}\right]$ (сл. с), выполняется пункт 8. 3. Выписать старшую степень числителя и знаменателя x^n, если функция представляет собой дробно – рациональную и получена неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. 4. Поделить числитель и знаменатель функции на x^n. 5. Найти предел полученного выражения. 6. Заменить данное выражение эквивалентным ему более простым выражением, используя таблицу эквивалентных бесконечно – малых (следствие из 1 замечательного предела): при $\alpha \to 0$ $\sin\alpha \sim \alpha \qquad tg\alpha \sim \alpha$ $1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha}{2};\ \arcsin\alpha \sim \alpha$. 7. Найти предел эквивалентного выражения. 8. Преобразовать выражение к виду, позволяющему использовать 2 замечательный предел.

Приложение 6

Условные обозначения

Греческий алфавит	Символы
$A\alpha$ – альфа	$\subset$ – содержится
$B\beta$ – бета	$\exists$ – существует
$\Gamma\gamma$ – гамма	$\forall$ – для каждого, любой
$\Delta\delta$ – дельта	$\left.\begin{matrix} : \\ \mid \end{matrix}\right\}$ – такое, что
$E\varepsilon$ – эпсилон	$!$ – единственный (пусть)
$Z\zeta$ – дзета	∞ – бесконечность
$H\eta$ – эта	$\wedge$ – и
$\Theta\theta(\vartheta)$ – тэта	$\vee$ – или
$I\iota$ – йота	$\varnothing$ – пустое множество
$K\kappa$ – каппа	$\rightarrow$ – стремится
$\Lambda\lambda$ – ламбда	$\Rightarrow$ — знак следования
$M\mu$ – мю	$\Leftrightarrow$ — знак равносильности (эквивалентности)
$N\nu$ – ню	$\in$ — знак принадлежности
$\Xi\xi$ – кси	$\notin$ — знак «не принадлежит»
$O o$ – омикрон	$\subset$ — знак включения
$\Pi\pi$ – пи	$\not\subset$ — знак «не включается»
$P\rho$ – ро	$\cup$ — знак объединения
$\Sigma\sigma(\varsigma)$ – сигма	$\cap$ — знак пересечения
$T\tau$ – тау	$\approx$ — знак приближенного равенства
$\Phi\phi(\varphi)$ – фи	$\backsim$ — знак подобия
$X\chi$ – хи	$\int$ — знак интеграла
$\Upsilon\upsilon$ – ипсилон	
$\Psi\psi$ – пси	
$\Omega\omega(\varpi)$ – омега	

Приложение 7

Обозначения

N — множество всех натуральных чисел.
Z — множество всех целых чисел.
Z_0 — множество всех неотрицательных целых чисел.
Q — множество всех рациональных чисел.
R — множество всех действительных чисел, числовая прямая.
R_+ — множество всех положительных действительных чисел.
R^2 — числовая плоскость.

$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b, причем $a < b$.

$]a; b[$ — открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b, причем $a<b$.

$]a; b]$ — полуоткрытый промежуток (открыт слева) с началом a, концом b, причем $a<b$.

$[a; b[$ — полуоткрытый промежуток (открыт справа) с началом a, концом b, причем $a<b$.

$[a, +\infty[$ — бесконечным промежуток, луч числовой прямой, a — начало луча (a включается в промежуток).

$]a, +\infty[$ — бесконечный промежуток, луч числовой прямой, a — начало луча (a не включается в промежуток).

$]-\infty, b]$ — бесконечный промежуток, луч числовой прямой, b — начало луча (b включается в промежуток).

$]-\infty, b[$ — бесконечный промежуток, луч числовой прямой, b — начало луча (b не включается в промежуток).

$]-\infty, +\infty[$ — бесконечный промежуток, числовая прямая.

$\Rightarrow$ — обозначение следования.

Пример: $(y>8) \Rightarrow (y>4)$/ Этот знак в программировании означает пересылку значения. *Пример*: $a \Rightarrow б$ — переменная b принимает значение переменной a.

$\Leftrightarrow$ — обозначение равносильности (эквивалентности). *Пример*: $[(x-1)(y+1) = 0] \Leftrightarrow [x-1 = 0$ или $y+1 = 0]$.

$\rightarrow$ — обозначение соответствия.

Примеры: $1 \rightarrow 15$; $(x, y) \rightarrow М(x; y)$.

$n \in N$ — число n принадлежит множеству N.

$A \in Ф$ — точка A принадлежит фигуре Ф.

$n \notin M$ — число n не принадлежит множеству M.

$B \notin Ф$ — точка B не принадлежит фигуре Ф.

$C \subset D$ — множество C включено в множество D, или C есть подмножество множества D, или множество D содержит множество C.

$Ф_1 \subset Ф$ — $Ф_1$ является подмножеством фигуры Ф.

$C \not\subset D$ — множество C не включается в множество D.

$\Phi_1 \not\subset \Phi$ — Φ_1 не является подмножеством Φ.
$\Phi_1 = \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 совпадают.
$\Phi_1 \neq \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 не совпадают.
$C \cup D$ — объединение множеств C и D.
$\Phi_1 \cup \Phi_2$ — объединение фигур Φ_1 и Φ_2.
$C \cap D$ — пересечение множеств C и D.
$\Phi_1 \cap \Phi_2$ — пересечение фигур Φ_1 и Φ_2.
$\Phi_1 \cong \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны.
$\Phi_1 \backsim \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 подобны.

$\vec{a}$ — вектор a.

$\overrightarrow{AB}$ — вектор АВ, отображающий точку A в точку B.

$\overrightarrow{ÀÀ}$, $\vec{0}$ — нулевые векторы.

$\left|\vec{à}\right|$ — длина вектора a.

$\left|\overrightarrow{ÀÂ}\right|$ — длина вектора AB.

$\vec{a}(x_0, \quad y_0)$ — вектор, отображающий точку (0; 0) в точку $(x_0;\ y_0)$. Числа x_0 и y_0 называются координатами вектора.

$x_{\vec{a}}$ — абсцисса вектора a.

$Y_{\vec{a}}$ — ордината вектора a.

$\vec{a}(x, \quad y, \quad z)$ — вектор с координатами x; y; z.

$\left(\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}\right)$ — прямоугольный базис.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов a и b.

$\overrightarrow{ÀÂ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ — векторы AB и CD сонаправлены.

$\overrightarrow{ÀÂ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ — векторы AB и CD противоположно направлены.
$Ì\ (x, \quad y, \quad z)$ — точка с координатами $(x, \quad y, \quad z)$.

$x_{À}$ — абсцисса точки A.

$Ì_{\;õ}$ — точка на числовой оси с абсциссой x.
$]a - \varepsilon;\ a + \varepsilon[$ — ε-окрестность точки a.
$\{a;\ b;\ \ldots\}$ — множество, состоящее из элементов a; b; …
$M = \{1;\ a;\ 7\}$ — множество M состоит из элементов 1; a; 7.
$P = \varnothing$ — множество P пусто.
$(a;\ b)$ — упорядоченная пара.
$(a;\ b;\ c)$ — упорядоченная тройка. Если a, b, c попарно различны, то $(a;b)$, $(a;\ b;\ c)$ обозначают также упорядоченные множества.

$n!$ — n факториал.

P_n — число перестановок из n элементов.

$À_{ï}^{ò}$ — число размещений из n по m.

$Ñ_{ï}^{ò}$ — число сочетаний из n по m.

$[AB]$ — отрезок прямой с концами A и B.

$(A\backslash B)$ — прямая, проходящая через точки A и B.

$|AB|$ — длина отрезка AB.

$|AB)$ — луч AB.

$(AB) \parallel (CD)$ — прямая AB параллельна прямой CD.

$(AB) \nparallel (CD)$ — прямая AB не параллельна прямой CD.

$(AB) \perp (CD)$ — прямая AB перпендикулярна прямой CD.

$[AB] \perp [CD]$ — отрезок AB перпендикулярен отрезку CD.

$(AB) \perp \alpha$ — прямая AB перпендикулярна плоскости α.

$(AB) \dot{-} (CD)$ — прямые AB и CD скрещиваются.

$\angle A$ — угол A.

$\angle ABC$ — угол ABC.

$\angle \alpha à \beta$ —двугранный угол между плоскостями α и β с ребром a.

$\hat{A}$ — величина угла A.

$À\hat{Â}Ñ$ — величина угла ABC.

$(l_1, \hat{\ } \ l_2)$ — угол между направлениями лучей l_1 и l_2.

$(à, \hat{\ } \ b)$ — угол между прямыми a и b.

$\left(\vec{à}, \hat{\ } \ \vec{b}\right)$ — угол между векторами a и b.

$(\alpha, \hat{\ } \ \beta)$ — угол между плоскостями α и β.

$\cup AB$ — дуга AB.

$\cup ABC$ — дуги ABC.

$À\breve{Â}Ñ$ — угловая величина дуги ABC.

$70°36'15''$ — 70 градусов 36 минут 15 секунд — величина угла, дуги.

(O, R) — окружность с центром O и радиусом R.

(O, R) — круг с центром O и радиусом R.

(ABC) — плоскость, проходящая через точки A, B, C.

f — преобразование f.

$f(x)$ — образ точки x при преобразовании f.

E — тождественное преобразование.

f^{-1} — обратное преобразование.

$f \circ g$ — композиция преобразовании f и g.

F — перемещение (произвольное): F, G, H …

Z_0 — симметрия относительно точки O (центра).

S_l — симметрия относительно прямой l (оси).
$S_l(x)$ — точка, симметричная точке x относительно прямой l.
$S(x)$ — точка, симметричная точке x относительно прямой (известной из контекста).
S_α — симметрия относительно плоскости α.
$Í_o^k$ — гомотетия с центром O и коэффициентом k.
R_o^α — поворот плоскости (луча вектора) на угол α вокруг точки O.
R^α — поворот плоскости (луча вектора) на угол α вокруг начала координат.
$A_1A_2...A_n$ — ломаная.
9:2=4(ост. 1)—деление с остатком.
$9=2\cdot4+1$ — —„—„—
$5< x <7$ — двойное неравенство.
$\overline{abc}$ — запись числа где a, b, c — цифры соответствующих разрядов.
$à_1; à_2;...; à_ï$ — последовательность состоящая из n чисел.
(a_n) — бесконечная последовательность.
$f(x)$ — значение функции f в точке x.
$D(f)$ — область определения функции f.
$E(f)$ — множество значений функции f.
$F\text{o}g$ — композиция функций f и g, то есть сложная функция, составленная из функций f и g. Если $h=f\text{o}g$, то $h(x)=f(g(x))$.
Δx — приращение переменной x.
$\left.\begin{matrix}\Delta f(x)\\ \Delta f\end{matrix}\right\}$ — приращение функции f в точке x_0.

$\lim f(x)=b$ — число b является пределом функции f при x, стремящемся к a.
f'_{x_0} — производная функции f в точке x_0.
$\max\limits_{[a;\,b]} f$ — наибольшее значение функции f на отрезке $[a;\ b]$.
$\min\limits_{[a;\,b]} f$ — наименьшее значение функции f на отрезке $[a;\ b]$.
$\int\limits_a^b f(x)dx$ — интеграл функции f в пределах от a до b.

$[x]$ — целая часть числа x.
$\{x\}$ — дробная часть числа x.
$|x|$ — модуль числа x.
$\sqrt{x}$ — арифметический квадратный корень из числа x.
sin — функция синус.
cos — функция косинус.

tg — функция тангенс.
ctg — функция котангенс.
$\exp_a$ — показательная функция с основанием a.
exp — показательная функция с основанием e.
$\log_a$ — логарифм с основанием a.
lg — десятичный логарифм.
1n — натуральный логарифм.
arcsin — функция арксинус.
arcos — функция арккосинус.
arctg — функция арктангенс.
arcctg — функция арккотангенс.

$\sin x$ — значение функции sin в точке x. Аналогично $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$,
$\exp_a x$, $\exp x$, $\log_a x$, $\lg x$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ — значения соответствующих функций в точке x.

Приложение 8

1 Окрестности точки

Терминология	Определения
Окрестность (*r*-окрестность) точки $a \in \mathbf{R}$	$(a - r, a + r),\ \ r > 0$
Проколотая окрестность (проколотая *r*-окрестность) точки $a \in \mathbf{R}$	$(a - r, a + r) \setminus \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r),\ r > 0$
Проколотая окрестность (окрестность, *r*-окрестность) точки $+\infty$	$(r, +\infty),\ \ r > 0$
Проколотая окрестность (окрестность, *r*-окрестность) точки $-\infty$	$(-\infty, -r),\ \ r > 0$
Проколотая окрестность (окрестность, *r*-окрестность) ∞	$(-\infty, -r) \cup (r, +\infty),\ \ r > 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует
$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ не существует
$\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} (x \pm \sin\frac{1}{x})$ не существует
$\lim\limits_{x \to 0} x \cos\frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} (x \pm \cos\frac{1}{x})$ не существует

Предел функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности E точки a, где $a \in \mathbf{R}$, $a = +\infty$, $a = -\infty$ или $a = \infty$.

Терминология	Обозначения	Эквивалентные определения
Число A называется **предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к точке a,** или **в точке a**	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x\to a}{\to} A$ $(a \in \mathbf{R})$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x$: $0 < \lvert x - a \rvert < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ **(по Коши)**
		$\forall \{x_n\} \subset E \ / \ x_n \to a, x_n \neq a \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_n) \to A$ **(по Гейне)**
	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x\to +\infty}{\to} A$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x$: $x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ **(по Коши)**
		$\forall \{x_n\} \subset E \ / \ x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to A$ **(по Гейне)**
	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x\to \ \infty}{\to} A$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x$: $x < -\delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ **(по Коши)**
		$\forall \{x_n\} \subset E \ / \ x_n \to -\infty \Rightarrow f(x_n) \to A$ **(по Гейне)**
	$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x\to \infty}{\to} A$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x$: $\lvert x \rvert > \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ **(по Коши)**
		$\forall \{x_n\} \subset E \ / \ x_n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to A$ **(по Гейне)**

Функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности E точки a, где $a \in \mathbf{R}$, $a = +\infty$, $a = -\infty$ или $a = \infty$

$\forall \{x_n\} \subset E \ / \ x_n \to a, x_n \neq a \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Если функция имеет предел *при* $x \to a$, то он единственный

2 Свойства предела функции

Терминология	Определения
Функция $f(x)$ **ограничена на множестве** X	$\exists M > 0 \ / \ \forall x \in X \ \lvert f(x) \rvert \le M$
	$\exists A, B \in \mathbf{R} \ / \ \forall x \in X \ f(x) \in [A, B]$
Функция $f(x)$ **ограничена сверху на множестве** X	$\exists M > 0 \ / \ \forall x \in X \ f(x) \le M$
	$\exists A \in \mathbf{R} \ / \ \forall x \in X \ f(x) \le A$
Функция $f(x)$ **ограничена снизу на множестве** X	$\exists M > 0 \ / \ \forall x \in X \ f(x) \ge M$
	$\exists B \in \mathbf{R} \ / \ \forall x \in X \ f(x) \ge B$

Пусть функция *f(x)* определена в некоторой проколотой окрестности E точки *a*.

$\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = A}$ $\Rightarrow$ В некоторой проколотой окрестности точки a функция $f(x)$ ограничена

$\boxed{\lim f(x) = A \ne 0}$ $\Rightarrow$ $\exists$ проколотая окрестность $U(a)$ / $\forall x \in U(a)$ $f(x) > \dfrac{A}{2}$, если $A > 0$,

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A_1 \\ \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A_2 \\ f_1(x) \le f_2(x) \end{array} \Rightarrow A_1 \le A_2$$

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A \\ \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A \\ f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) \end{array} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$$

Критерий Коши существования конечного предела

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) < \infty$	$\Leftrightarrow$	Функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности E точки a, где $a \in \mathbf{R}$, $a = +\infty$, $a = -\infty$ или $a = \infty$, и $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$-окрестность $U(a)$ точки a / $\forall x', x'' \in U(a) \Rightarrow \lvert f(x') - f(x'') \rvert < \varepsilon$

Пусть функция *f(x)* определена в некоторой проколотой окрестности E точки *a*.

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) < \infty$, $a \in \mathbf{R}$	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ / $\forall x', x''$: $\lvert x' - a \rvert < \delta(\varepsilon)$, $\lvert x'' - a \rvert < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x') - f(x'') \rvert < \varepsilon$
$\exists \lim\limits_{x\to \infty} f(x) < \infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ / $\forall x', x''$: $\lvert x' \rvert > \delta(\varepsilon)$, $\lvert x'' \rvert > \delta(\varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x') - f(x'') \rvert < \varepsilon$
$\exists \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) < \infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ / $\forall x', x''$: $x' > \delta(\varepsilon)$, $x'' > \delta(\varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x') - f(x'') \rvert < \varepsilon$
$\exists \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) < \infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ / $\forall x', x''$: $x' < -\delta(\varepsilon)$, $x'' < -\delta(\varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x') - f(x'') \rvert < \varepsilon$

Арифметические свойства предела

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = A} \\[2ex] \boxed{\lim\limits_{x\to a} g(x) = B} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big) = A\pm B} \\[2ex] \boxed{\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = A\cdot B} \\[2ex] \boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B\neq 0)} \end{array}$$

Бесконечно малые функции при $x \to$ a

Терминология	Обозначения	Определения
Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой при $x\to a$**,	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ или	Функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности E точки a и $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$-окрестность $U(a)$ точки a / $\forall x\in U(a),\ x\neq a \Rightarrow \lvert f(x)\rvert<\varepsilon$ **(по Коши)** или

Обозначения	Определения
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ 0<\lvert x-a\rvert<\delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ \lvert x\rvert>\delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ x>\delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ x<-\delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)\rvert<\varepsilon$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = A<\infty} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{f(x) = A + \text{б. м.}}$$

$$\boxed{\text{бесконечно малая}}\ \boxed{\times}\ \boxed{\text{ограниченная}}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{бесконечно малая}}$$

Бесконечно малые функции при $x \to$ a

$x^n,\ n \in \mathbf{N}$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} x$
$1 - \cos x$	$a^x - 1,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\log_a(1+x),\ a > 0,\ a \neq 1$		

Бесконечно малые функции при $x \to$ a

$\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbf{N}$	$a^{-x},\ a > 1$	$\dfrac{1}{\log_a x},\ a > 0,\ a \neq 1$
	$a^x,\ 0 < a < 1$	

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

3 Бесконечные пределы

Пусть функция *f(x)* определена в некоторой проколотой окрестности E точки *a*.

Терминология	Обозначения	Определения
Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой при $x \to a$**, где $a \in \mathbf{R}$, $a = +\infty$, $a = -\infty$ или $a = \infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или б. б. при $x \to a$	Функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности E точки a и $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$-окрестность $U(a)$ точки a / $\forall x \in U(a),\ x \neq a \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > \varepsilon$ **(по Коши)** или $\forall \{x_n\} \subset E$ / $x_n \to a,\ x_n \neq a \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_n) \to 0$ **(по Гейне)**

Частные случаи бесконечно больших при *x*→ a функций

Обозначения	Определения
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ 0 < \lvert x-a\rvert < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ \lvert x\rvert > \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ x < -\delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > \varepsilon$

Обозначения	Определения
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ 0 < \lvert x-a\rvert < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ 0 < \lvert x-a\rvert < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ \lvert x\rvert > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ \lvert x\rvert > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ x < -\delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall x\colon\ x < -\delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими при $x \to a$ функциями

$$\boxed{\begin{matrix} f(x) - \text{б. м.} \\ \text{при } x \to a \end{matrix}} \quad \underset{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \boxed{\frac{1}{f(x)} - \text{б. б.}}$$

$$\Uparrow\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0} \qquad\qquad \boxed{\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty}$$

$$\left.\begin{matrix} \boxed{\exists M > 0 \ / \ \forall x \in E \ |f(x)| \geq M} \\ \boxed{\lim_{x \to a} g(x) = \infty} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to a} f(x) g(x) = \infty}$$

Бесконечно большие при $x \to 0$ функции

$\boxed{\dfrac{1}{x^n}, n \in \mathbf{N}}$ $\boxed{\dfrac{1}{\sin x}}$ $\boxed{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}$ $\boxed{\dfrac{1}{\arcsin x}}$ $\boxed{\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}}$ $\boxed{\dfrac{1}{1 - \cos x}}$

$\boxed{\dfrac{1}{a^x - 1}, a > 0, a \neq 1}$ $\boxed{\dfrac{1}{\log_a (1 + x)}, a > 0, a \neq 1}$ $\boxed{\log_a x, a > 0, a \neq 1}$

Бесконечно большие при $x \to \infty$ функции

$\boxed{x^n, n \in \mathbf{N}}$ $\boxed{a^x, a > 1}$ $\boxed{\log_a x, a > 0, a \neq 1}$

Терминология

Функция $f(x)$ не имеет предела в точке a	$\Leftrightarrow$	Функция $f(x)$ не имеет в точке a ни конечного, ни бесконечного пределов
Функция $f(x)$ не имеет конечного предела в точке a	$\Leftrightarrow$	Функция $f(x)$ не имеет в точке a ни конечного, ни бесконечного пределов или Функция $f(x)$ имеет бесконечный предел в точке a

Определенности: $\infty - \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$

$\infty - \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$	Эти пределы могут быть равны любому числу, $+\infty$, $-\infty$, ∞ или не существовать
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$	
$0 \cdot \infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	

4 Предел суперпозиции функций

Функция $f(y)$ определена в точке $y_0 \in \mathbf{R}$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$ $(x_0 \in \mathbf{R},\ x_0 = \pm\infty$ или $x_0 = \infty)$

$\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$ $(x_0 \in \mathbf{R},\ x_0 = \pm\infty$ или $x_0 = \infty$, $y_0 \in \mathbf{R},\ y_0 = \pm\infty$ или $y_0 = \infty)$

$g(x) \neq y_0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0

$\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = A$

$\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{tg} \frac{1}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x \to \infty} x \arcsin \frac{1}{x} = 1$

5 Односторонние пределы
Односторонние окрестности точки

Терминология	Определения
Правая окрестность (правая r-окрестность) точки $a \in \mathbf{R}$	$[a, a + r),\ r > 0$
Левая окрестность (левая r-окрестность) точки $a \in \mathbf{R}$	$(a - r, a],\ r > 0$
Правая проколотая окрестность (правая проколотая r-окрестность) точки $a \in \mathbf{R}$	$(a, a + r),\ r > 0$
Левая проколотая окрестность (левая проколотая r-окрестность) точки $a \in \mathbf{R}$	$(a - r, a),\ r > 0$
Левая проколотая окрестность (левая проколотая r-окрестность) точки $+\infty$	$(r, +\infty),\ r > 0$
Правая проколотая окрестность (правая проколотая r-окрестность) точки $-\infty$	$(-\infty, -r),\ r > 0$

Односторонние пределы функций

Пусть функция *f(x)* определена в некоторой проколотой правой или левой окрестности E точки *a.*

Терминология	Обозначения	Определения
Число A называется **пределом справа функции $f(x)$ в точке a**	$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ /\ \forall x$: $a < x < a + \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
		$\forall \{x_n\} \subset E\ /\ x_n \to a, x_n > a \Rightarrow f(x_n) \to A$
Число A называется **пределом слева функции $f(x)$ в точке a**	$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ /\ \forall x$: $a - \delta(\varepsilon) < x < a \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
		$\forall \{x_n\} \subset E\ /\ x_n \to a, x_n < a \Rightarrow f(x_n) \to A$

Бесконечно большие функции

Обозначения	Определения
Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой при $x \to a + 0$**	
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $f(a+0)=\infty$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ a<x<a+\delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \lvert f(x)\rvert>\varepsilon$
Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой при $x \to a - 0$**	
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $f(a-0)=\infty$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ a-\delta(\varepsilon)<x<a\ \Rightarrow\ \lvert f(x)\rvert>\varepsilon$

Частные случаи бесконечно больших функций

Обозначение	Определение
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ a<x<a+\delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ f(x)>\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ a<x<a+\delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ f(x)<-\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ a-\delta(\varepsilon)<x<a\ \Rightarrow\ f(x)>\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ /\ \forall x:\ a-\delta(\varepsilon)<x<a\ \Rightarrow\ f(x)<-\varepsilon$

$$\boxed{\exists \lim_{x\to a} f(x)} \iff \boxed{\exists \lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)}$$

$$\boxed{\exists \lim_{x\to \infty} f(x)} \iff \boxed{\exists \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)}$$

6 Пределы монотонных функций

Монотонно возрастающие
на множестве X функции $f(x)$:
$f(x) \nearrow$ на X

Возрастающие на X функции

$\Downarrow\Uparrow$

$\forall x_1, x_2 \in X \;/\; x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Неубывающие на X функции

$\Downarrow\Uparrow$

$\forall x_1, x_2 \in X \;/\; x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

Монотонно убывающие
на множестве X функции $f(x)$:
$f(x) \searrow$ на X

Убывающие на X функции

$\Downarrow\Uparrow$

$\forall x_1, x_2 \in X \;/\; x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Невозрастающие на X функции

$\Downarrow\Uparrow$

$\forall x_1, x_2 \in X \;/\; x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

$x^{2n} \nearrow$ на $[0, +\infty)$ $(n \in \mathbf{N})$

$x^{2n} \searrow$ на $(-\infty, 0]$ $(n \in \mathbf{N})$

$x^{2n-1} \nearrow$ на $(-\infty, +\infty)$ $(n \in \mathbf{N})$

Свойства монотонно возрастающих функций

Пусть функция *f(x)* определена на ограниченном или неограниченном интервале *(а,в)*

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(x)\nearrow \text{ на } (a,b)}\\ \boxed{\begin{array}{c}f(x) \text{ ограничена}\\ \text{сверху на } (a,b)\end{array}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x\to b-0} f(x) < \infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(x)\nearrow \text{ на } (a,b)}\\ \boxed{\begin{array}{c}f(x) \text{ не ограничена}\\ \text{сверху на } (a,b)\end{array}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(x)\nearrow \text{ на } (a,b)}\\ \boxed{\begin{array}{c}f(x) \text{ ограничена}\\ \text{снизу на } (a,b)\end{array}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x\to a+0} f(x) < \infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(x)\nearrow \text{ на } (a,b)}\\ \boxed{\begin{array}{c}f(x) \text{ не ограничена}\\ \text{снизу на } (a,b)\end{array}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty}$$

Пусть функция *f(x)* определена на отрезке *[а,в]*

$$\boxed{f(x)\nearrow \text{ на } [a,b]} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in (a,b)\ \ \exists f(x-0) < \infty, f(x+0) < \infty\\ \text{и}\\ f(x-0) \le f(x) \le f(x+0)\end{array}}\\ \boxed{\begin{array}{c}\exists f(a+0) < \infty, f(b-0) < \infty\\ \text{и}\\ f(a) \le f(a+0) \le f(b-0) \le f(b)\end{array}}\end{array}\right.$$

Свойства монотонно убывающих функций

Пусть функция *f(x)* определена на ограниченном или неограниченном интервале *(а,в)*

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(x)\searrow \text{ на } (a,b)}\\ \boxed{f(x) \text{ ограничена снизу на } (a,b)}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x\to b-0} f(x) < \infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(x)\searrow \text{ на } (a,b)}\\ \boxed{f(x) \text{ не ограничена снизу на } (a,b)}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x\to b-0} f(x) = -\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(x)\searrow \text{ на } (a,b)}\\ \boxed{f(x) \text{ ограничена сверху на } (a,b)}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x\to a+0} f(x) < \infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(x)\searrow \text{ на } (a,b)}\\ \boxed{f(x) \text{ не ограничена сверху на } (a,b)}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty}$$

Пусть функция *f(x)* определена на отрезке *[а,в]*

$$\boxed{f(x)\searrow \text{ на } [a,b]} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in (a,b)\ \exists f(x-0) < \infty, f(x+0) < \infty\\ \text{и}\\ f(x-0) \ge f(x) \ge f(x+0)\end{array}}\\ \boxed{\begin{array}{c}\exists f(a+0) < \infty, f(b-0) < \infty\\ \text{и}\\ f(a) \ge f(a+0) \ge f(b-0) \ge f(b)\end{array}}\end{array}\right.$$

7 Асимптотичекое сравнение функций

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $U(a)$ точки a.

Терминология	Обозначение	Определение
Функция $f(x)$ есть **О-большое** относительно функции $g(x)$ при $x \to a$	$f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$	$f(x) = \alpha(x) g(x)$ и функция $\alpha(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a

Условия		Следствие
$f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$	$\Rightarrow$	При $x \to a$ функция $f(x)$ – бесконечно малая порядка не ниже, чем $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\Rightarrow$	При $x \to a$ функция $f(x)$ растет не быстрее, чем $g(x)$, или $f(x)$ – бесконечно большая порядка не выше, чем $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$	$\Rightarrow$	Бесконечно малые (бесконечно большие) функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют один порядок малости (роста) при $x \to a$

Условия		Следствие
$g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a; $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$	$\Rightarrow$	Бесконечно малые (бесконечно большие) функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют один порядок малости (роста) при $x \to a$

Терминология	Обозначение	Определение
Функция $f(x)$ есть **о-малое** относительно функции $g(x)$ при $x \to a$	$f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$	$f(x) = \alpha(x)\, g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$

$f(x) = o(g(x))$ при a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\Rightarrow$	При $x \to a$ функция $f(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $g(x)$, или $f(x)$ стремится к 0 быстрее, чем $g(x)$
$f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\Rightarrow$	При $x \to a$ функция $f(x)$ – бесконечно большая более низкого порядка, чем $g(x)$, или $f(x)$ растет медленнее, чем $g(x)$

Если $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Терминология	Обозначение	Определение
Функции $f(x)$ и $g(x)$ **эквивалентны** при $x \to a$	$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$	$f(x) = \alpha(x)\, g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$

Если $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ $\Rightarrow$ $\exists$ проколотая окрестность точки a, в которой $f(x) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to a \\ g(x) \sim h(x) \text{ при } x \to a \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \sim h(x) \text{ при } x \to a$$

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to a$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \sim f_1(x) \text{ при } x \to a \\ g(x) \sim g_1(x) \text{ при } x \to a \\ f_1(x) \neq 0,\ g_1(x) \neq 0 \text{ в некоторой проколотой окрестности точки } a \\ \exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ и } \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Терминология

$n \in \mathbf{N}$		
$x \to a$	$\Rightarrow$	$(x-a)^n$ – бесконечно малая порядка n
$x \to +\infty$	$\Rightarrow$	x^n – бесконечно большая порядка n

$f(x) \to 0$ при $x \to a$		
$f(x) = O((x-a)^n)$	$\underset{\text{при } x \to a}{\Rightarrow}$	порядок малости функции $f(x)$ не ниже n
$f(x) = o((x-a)^n)$	$\underset{\text{при } x \to a}{\Rightarrow}$	порядок малости функции $f(x)$ выше n
$f(x) \sim (x-a)^n$	$\underset{\text{при } x \to a}{\Rightarrow}$	порядок малости функции $f(x)$ равен n

$f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$		
$f(x) = O(x^n)$	$\underset{\text{при } x \to +\infty}{\Rightarrow}$	порядок роста функции $f(x)$ не выше n
$f(x) = o(x^n)$	$\underset{\text{при } x \to +\infty}{\Rightarrow}$	порядок роста функции $f(x)$ ниже n
$f(x) \sim x^n$	$\underset{\text{при } x \to +\infty}{\Rightarrow}$	порядок роста функции $f(x)$ равен n

8 Непрерывные функции

Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности E точки $a \in \mathbf{R}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$	$\Rightarrow$	Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $a \in \mathbf{R}$

Пусть функция *f(x)* определена в некоторой проколотой окрестности *E* точки *a*.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbf{R}$	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x$: $\lvert x - a \rvert < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x) - f(a) \rvert < \varepsilon$
	$\Leftrightarrow$	$\forall \{x_n\} \subset E \ / \ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(a)$
	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$

Свойства непрерывных функций

Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a \in \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	Функции $f(x) \pm g(x)$ непрерывны в точке $a \in \mathbf{R}$
	$\Rightarrow$	Функция $f(x) \cdot g(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbf{R}$
	$\underset{g(a)\neq 0}{\Rightarrow}$	Функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $a \in \mathbf{R}$

Односторонняя непрерывность

Функция $f(x)$ определена в некоторой правой окрестности E точки $a \in \mathbf{R}$

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$

$\Rightarrow$ Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа в точке** $a \in \mathbf{R}$

Функция $f(x)$ определена в некоторой левой окрестности E точки $a \in \mathbf{R}$

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$

$\Rightarrow$ Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева в точке** $a \in \mathbf{R}$

Точки разрыва

Функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности E точки $a \in$ R

Функция $f(x)$ не определена в самой точке $a \in$ R

$\Rightarrow$

Функция $f(x)$ определена в окрестности E точки $a \in$ R

Функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $a \in$ R

$\Rightarrow$

Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$

Классификация точек разрыва

Точка $a \in \mathbf{R}$ – точка разрыва функции $f(x)$

$\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) < \infty, \ \lim\limits_{x \to a-0} f(x) < \infty$ $\Rightarrow$ Точка разрыва a называется **точкой разрыва первого рода**

$\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) < \infty$ $\Rightarrow$ Точка разрыва a первого рода называется **точкой устранимого разрыва**

$f(x) = \begin{cases} 1, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Точка 0 – точка устранимого разрыва функции $f(x)$

$f(x) = \begin{cases} -1, \ x < 0, \\ 0, \ x = 0, \\ 1, \ x > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Точка 0 – точка разрыва первого рода (неустранимого) функции $f(x)$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Точка 0 – точка разрыва второго рода функции $f(x)$

9 Непрерывные на отрезке функции

Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b)

Функция $f(x)$ непрерывна справа в точке $a \in \mathbf{R}$

Функция $f(x)$ непрерывна слева в точке $b \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow$ Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$

Теоремы Вейерштрасса

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ $\underset{\text{I теорема}}{\Rightarrow}$ Функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ $\underset{\text{II теорема}}{\Rightarrow}$ $\exists \max\limits_{x\in[a,b]} f(x), \ \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Теоремы Больцано-Коши

$$\left.\begin{array}{c}\text{Функция } f(x) \\ \text{непрерывна на отрезке } [a, b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0\end{array}\right\} \underset{\text{I теорема}}{\Rightarrow} \exists c \in (a, b) \ / \ f(c) = 0$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Функция } f(x) \\ \text{непрерывна на отрезке } [a, b] \\ f(a) = A, f(b) = B, A \neq B\end{array}\right\} \underset{\text{II теорема}}{\Rightarrow} \begin{array}{c}\forall \text{ числа } C\text{, заключенного} \\ \text{между } A \text{ и } B, \\ \exists c \in (a, b) \ / \ f(c) = C\end{array}$$

10 Непрерывность монотонных функций

Функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$ $\Rightarrow$ $\forall x \in [a, b]$

- $f(x)$ непрерывна в точке x (в точке a – непрерывна справа, в точке b – слева)

или

- $f(x)$ имеет в точке x разрыв первого рода

Функция $f(x)$ монотонна на ограниченном или неограниченном интервале (a, b) $\Rightarrow$ $\forall x \in (a, b)$

- $f(x)$ непрерывна в точке x

или

- $f(x)$ имеет в точке x разрыв первого рода

Критерий непрерывности монотонных функций

Функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ числа C из отрезка с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in [a, b]$ / $f(c) = C$

$\Leftrightarrow$ Функция $f(x)$ отображает отрезок $[a, b]$ на отрезок с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$

11 Непрерывность обратной функции
Терминология

Функцией f, действующей из $X \subseteq \mathbf{R}$ в $Y \subseteq \mathbf{R}$, называется правило, по которому

каждой точке $x \in X$ — сопоставляется — одна точка $y \in Y$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Множество X называется **областью определения** функции $f(x)$ и обозначается $D(f)$

Множество $E(f) = \{y\colon y = f(x)$, где $x \in D(f)\}$ называется **множеством значений** функции $f(x)$

$\forall x_1, x_2 \in D(f) \; / \; x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$ $\Rightarrow$ Функция $f(x)$ называется **взаимно однозначной**

Функция f^{-1} каждой точке $y \in E(f)$ сопоставляет точку $x \in D(f) \; / \; y = f(x)$ $\Rightarrow$ Функция f^{-1} называется **обратной** к функции f

$$D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \underset{x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y}{\overset{y = f(x) = \operatorname{tg} x}{\rightleftarrows}} E(f) = (-\infty, +\infty)$$

$$D(f) = (-\infty, +\infty) \underset{x = f^{-1}(y) = \ln y}{\overset{y = f(x) = e^x}{\rightleftarrows}} E(f) = (0, +\infty)$$

Теоремы об обратной функции

Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$

Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

$\Rightarrow$

$\exists$ обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная на отрезке с концами в точках $f(a), f(b)$

Обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на отрезке с концами в точках $f(a), f(b)$

Обратная функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a), f(b)$

Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на ограниченном или неограниченном интервале (a, b)

Функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a, b)

$\Rightarrow$

$\exists$ обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная на интервале с концами в точках $f(a+0), f(b-0)$

Обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на интервале с концами в точках $f(a+0), f(b-0)$

Обратная функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на интервале с концами в точках $f(a+0), f(b-0)$

Это утверждение верно также для ограниченных или неограниченных интервалов $[a, b)$, где $a \in \mathbf{R}$, и $(a, b]$, где $b \in \mathbf{R}$

В этих случаях обратная функция определена на интервалах с концами в точках $f(a), f(b-0)$ и $f(a+0), f(b)$ соответственно

12 Непрерывность элементарных функций

Показательная функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Область определения
$D(f) = (-\infty, +\infty)$

Множество значений
$E(f) = (0, +\infty)$

$a > 1$ $\Rightarrow$ Функция a^x возрастает, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$0 < a < 1$ $\Rightarrow$ Функция a^x убывает, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

$\forall x, y \in (-\infty, +\infty) \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Функция a^x непрерывна в любой точке $x \in (-\infty, +\infty)$

Функция a^x имеет
монотонную непрерывную обратную функцию,
определенную на интервале $(0, +\infty)$

Показательная функция e^x называется **экспонентой**

Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Область определения
$D(f) = (0, +\infty)$

Множество значений
$E(f) = (-\infty, +\infty)$

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной к показательной функции $x = a^y$

$a > 1$ $\Rightarrow$ Функция $\log_a x$ возрастает, $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

$0 < a < 1$ $\Rightarrow$ Функция $\log_a x$ убывает, $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

$\forall x, y \in (0, +\infty)$ $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Функция $\log_a x$ непрерывна в любой точке $x \in (0, +\infty)$

$\log_e x = \ln x$
Логарифмы по основанию e называются **натуральными**

$\log_{10} x = \lg x$
Логарифмы по основанию 10 называются **десятичными**

Степенная функция $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$

$$x^{\alpha} = \left(e^{\ln x}\right)^{\alpha} = e^{\alpha \ln x},\ \alpha \in \mathbf{R}$$

Область определения
$D(f) = (0, +\infty)$

Множество значений
$E(f) = (0, +\infty)$

$\alpha > 0$ $\Rightarrow$ Функция x^{α} возрастает, $\lim\limits_{x \to 0+0} x^{\alpha} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$

$\alpha < 0$ $\Rightarrow$ Функция x^{α} убывает, $\lim\limits_{x \to 0+0} x^{\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$

$\forall x, y \in (0, +\infty) \quad (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha}$

$\forall x \in (0, +\infty) \quad x^{\alpha} x^{\beta} = x^{\alpha + \beta}$

Функция x^{α} непрерывна в любой точке $x \in (0, +\infty)$

По определению полагают, что $0^{\alpha} = 0$ при $\alpha > 0$,
и считают, что это выражение не определено при $\alpha \le 0$

Если $\alpha = \dfrac{m}{n} \neq 0$, где n – нечетное целое число,
то степенную функцию x^{α} можно определить для всех $x < 0$, полагая:

$y = |x|^{\alpha}$, если m – четное целое число,
$y = -|x|^{\alpha}$, если m – нечетное целое число

Функция вида $u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$, называется
показательно-степенной функцией
и определяется равенством
$$u(x)^{v(x)} = e^{\ln\left(u(x)^{v(x)}\right)} = e^{v(x)\ln u(x)}$$

Эта функция определена на множестве
$D(v) \cap \{x \in D(u) : u(x) > 0\}$

Тригонометрические функции:
$\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

Функция $f(x) = \sin x$

Область определения
$D(f) = (-\infty, +\infty)$

Множество значений
$E(f) = [-1, +1]$

Функция $\sin x$ возрастает на каждом отрезке
$$[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}],\ k \in \mathbf{Z}$$

Функция $\sin x$ убывает на каждом отрезке
$$[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}],\ k \in \mathbf{Z}$$

$\forall x \in (-\infty, +\infty) \quad |\sin x| \le |x|$

Функция $\sin x$ непрерывна в любой точке $x \in (-\infty, +\infty)$

Функция $\cos x$ непрерывна в любой точке $x \in (-\infty, +\infty)$

Функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны
во всех точках их областей определения

Обратные тригонометрические функции:
$\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$

Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные к сужениям функций $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ на определенные интервалы, где эти функции непрерывны и возрастают или убывают

$f(x) = \arcsin x$

функция, обратная к сужению функции $\sin x$ на отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$D(f) = [-1, 1]$, $E(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

возрастает и непрерывна на отрезке $[-1, 1]$

$f(x) = \arccos x$

функция, обратная к сужению функции $\cos x$ на отрезок $[0, \pi]$

$D(f) = [-1, 1]$, $E(f) = [0, \pi]$

убывает и непрерывна на отрезке $[-1, 1]$

$f(x) = \mathrm{arctg}\, x$

функция, обратная к сужению функции $\mathrm{tg}\, x$ на интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$D(f) = (-\infty, +\infty)$, $E(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

возрастает и непрерывна на всей числовой оси

$f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$

функция, обратная к сужению функции $\mathrm{ctg}\, x$ на интервал $(0, \pi)$

$D(f) = (-\infty, +\infty)$, $E(f) = (0, \pi)$

убывает и непрерывна на всей числовой оси

13 Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\quad a>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Асимптотические неравенства

при $x \to 0$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$a^x - 1 \sim \ln a \cdot x,\ a>0$$

$$(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

Функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to 0$ и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки 0

$$(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \sim e$$

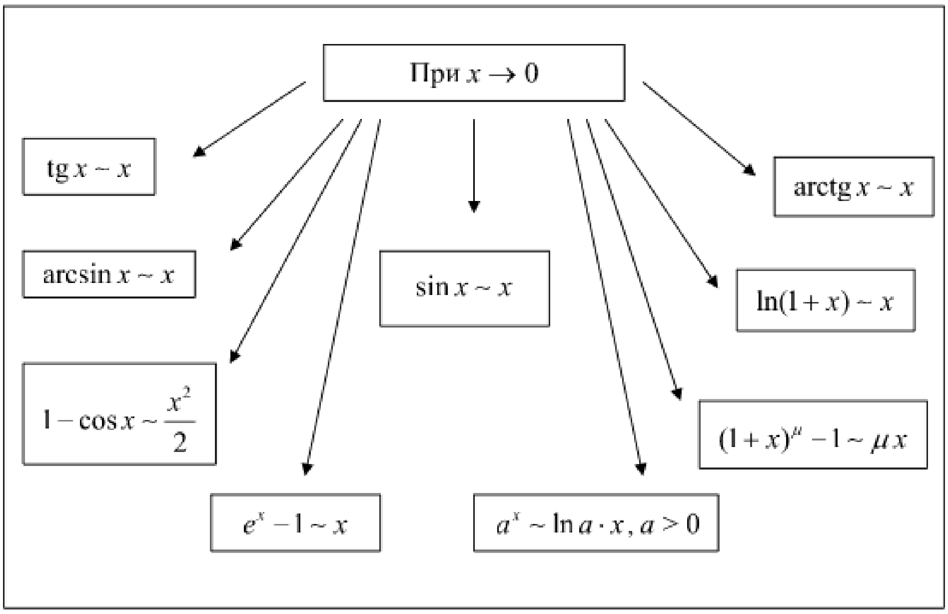
$$a^{f(x)} - 1 \sim \ln a \cdot f(x),\quad a>0$$

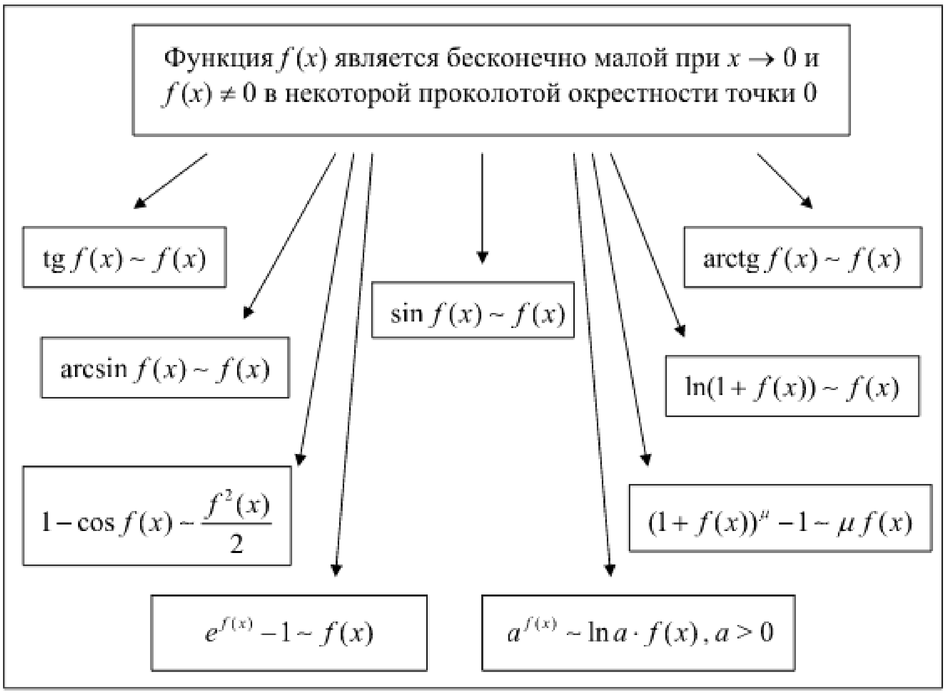
$$\ln(1+f(x)) \sim f(x)$$

$$(1+f(x))^{\mu} - 1 \sim \mu f(x)$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$$

14 Таблицы эквивалентных при $x \to 0$ бесконечно малых функций





15 Равномерная непрерывность

Пусть множество X – произвольный интервал (ограниченный или неограниченный)

Терминология	Определения
Функция $f(x)$ называется **непрерывной на множестве X**	Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$ т. е. $\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ / \ \forall x \in X$: $\lvert x - x_0 \rvert < \delta(\varepsilon, x_0) \ \Rightarrow \ \lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$
Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной на множестве X**	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x_1, x_2 \in X$: $\lvert x_1 - x_2 \rvert < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \lvert f(x_1) - f(x_2) \rvert < \varepsilon$
Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве X	$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in X$: $\lvert x_1 - x_2 \rvert < \delta, \ \lvert f(x_1) - f(x_2) \rvert \geq \varepsilon$

Свойства равномерно непрерывных на множестве X функций

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X	$\Rightarrow$	Функция $f(x)$ непрерывна на множестве X
	$\Rightarrow$	Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на любом непустом множестве $X_0 \subset X$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Светлана Станиславовна Ахтамова

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Редактор И.А. Вейсиг
Компьютерная вёрстка С.С. Ахтамовой

Подписано в печать 08.08.2019 Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная Тираж 50 экз.
Усл. печ. л. 8,7 Печать плоская
Заказ № ___

Библиотечно–издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел/факс (391) 206–26–67; http:/bik.sfu–kras.ru
e–mail: publishing_house@sfu–kras.ru