Министерство образования и науки РФ
Сибирский федеральный университет

И.В. Яковлев, Е.Н. Яковлева

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям: 050201.65 «Математика»; 050202.65 «Информатика»; по направлению 050100.62 «Педагогическое образование» (профили «Математика», «Информатика»).

Красноярск, Лесосибирск

2012

УДК 519.8

ББК 22.17

Я 26

Рецензенты: В.И. Сенашов, д-р физ.-мат. наук, профессор;

З.У. Колокольникова, канд. пед. наук, доцент

Яковлев И.В.

Я 26 Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие/ И.В. Яковлев, Е.Н. Яковлева. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. – 83 с.

ISBN 978-5-7638-2666-1

Пособие содержит основные разделы теории вероятностей и математической статистики. Приведены примеры решения задач, а также вопросы и упражнения для контроля усвоения изучаемых тем.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям: 050201.65 «Математика»; 050202.65 «Информатика»; по направлению 050100.62 «Педагогическое образование», профили обучения «Математика», «Информатика» и всех использующих вероятностные и статистические методы.

ISBN 978-5-7638-2666-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В различных разделах науки и техники нередко возникают ситуации, когда результат каждого из многих проводимых опытов заранее предугадать невозможно, однако можно исследовать закономерности, возникающие при проведении серии опытов. Нельзя, например, точно сказать, какая сторона монеты окажется сверху при данном броске: герб или цифра, но при большом количестве бросков число выпадений герба приближается к половине количества бросков; нельзя заранее предсказать результат одного выстрела из данного орудия по данной цели, но при большом числе выстрелов частота попадания приближается к некоторому постоянному числу.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. Исследование вероятностных закономерностей массовых однородных явлений составляет предмет **теории вероятностей**. При этом под случайным понимают явление, предсказать исход которого невозможно.

Экономика и производственные процессы – одна из важнейших сфер применения теории вероятности и математической статистики.

Уже давно исследование и прогнозирование экономических явлений трудно представить без использования методик статистического оценивания, проверки гипотез, регрессионного анализа, трендовых и сглаживающих эконометрических моделей и других методов, опирающихся на теорию вероятностей. А с развитием общества мировая экономика все более усложняется и, следовательно, по законам развития динамических систем должен усиливаться статистический характер законов, описывающих социально-экономические явления.

Все это предопределяет необходимость овладения методами теории вероятностей и математической статистики как важнейшим инструментом анализа и прогнозирования экономических явлений и процессов.

ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. События. Пространство элементарных событий

Основным интуитивным понятием классической теории вероятностей является ***случайное событие***. События, которые могут произойти в результате опыта (эксперимента, испытания, наблюдения), можно подразделить на три вида:

а) ***достоверное событие*** – событие, которое всегда происходит при проведении опыта;

б) ***невозможное событие*** – событие, которое в результате опыта произойти не может;

в) ***случайное событие*** – событие, которое может либо произойти, либо не произойти. Например, при броске игральной кости достоверным событием является выпадение числа очков, не превышающего 6, невозможным – выпадение 10 очков, а случайным – выпадение 3 очков.

События обозначают, как правило, заглавными буквами латинского алфавита. Достоверное событие будем обозначать Ω, а невозможное – $\varnothing$.

Определение. ***Суммой A+B*** двух событий A и B называют событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A и B. ***Суммой нескольких событий***, соответственно, называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

Пример 1. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Если событие A – попадание первого стрелка, а событие B – второго, то сумма $A+B$ – это хотя бы одно попадание при двух выстрелах.

Пример 2. Если при броске игральной кости событием A_i назвать выпадение i очков, то выпадение нечетного числа очков является суммой событий $A_1+A_3+A_5$.

Назовем все возможные результаты данного опыта его *исходами* и предположим, что множество этих исходов, при которых происходит событие A (исходов, *благоприятных* событию A), можно представить в виде некоторой области на плоскости. Тогда множество исходов, при которых произойдет событие $A+B$, является объединением множеств исходов, благоприятных событиям A или B.

Определение. ***Произведением AB*** событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло и событие A, и событие B. Аналогично ***произведением нескольких событий*** называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события.

Пример 3. В примере 1 (два выстрела по мишени) событием AB будет попадание обоих стрелков.

Пример 4. Если событие A состоит в том, что из колоды карт извлечена карта пиковой масти, а событие B – в том, что из колоды вынута дама, то событием AB будет извлечение из колоды дамы пик.

Геометрической иллюстрацией множества исходов опыта, благоприятных появлению произведения событий A и B, является пересечение областей, соответствующих исходам, благоприятным A и B.

Определение. ***Разностью A\B*** событий A и B называется событие, состоящее в том, что A произошло, а B – нет.

Пример 5. Вернемся к примеру 1, где $A\setminus B$ – попадание первого стрелка при промахе второго.

Пример 6. В примере 4 $A\setminus B$ – извлечение из колоды любой карты пиковой масти, кроме дамы. Наоборот, $B\setminus A$ – извлечение дамы любой масти, кроме пик.

Введем еще несколько категорий событий.

Определение. События A и B называются ***совместными***, если они могут произойти оба в результате одного опыта. В противном случае (то есть если они не могут произойти одновременно) события называются ***несовместными.***

Примеры: совместными событиями являются попадания двух стрелков в примере 1 и появление карты пиковой масти и дамы в примере 4; несовместными – события A_1 – A_6 в примере 2.

Если изобразить графически области исходов опыта, благоприятных несовместным событиям, то они не будут иметь общих точек.

Из определения несовместных событий следует, что их произведение является невозможным событием.

Определение. Говорят, что события A_1, A_2,…, A_n образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в результате опыта обязательно происходит только одно из событий этой группы.

События полной группы называют ***элементарными событиями***.

Пример. В примере 2 события A_1 – A_6 (выпадение одного, двух,…, шести очков при одном броске игральной кости) образуют полную группу несовместных событий.

Определение. События называются ***равновозможными***, если нет оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другое.

Примеры: выпадение любого числа очков при броске игральной кости, появление любой карты при случайном извлечении из колоды, выпадение герба или цифры при броске монеты и т.п.

Определение. ***Противоположным*** событию A называется событие $\overline{\quad}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

$A + B = B + A$, $A{\cdot}B = B{\cdot}A$ (коммутативность),

$(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A{\cdot}B){\cdot}C = A\cdot (B{\cdot}C)$ (ассоциативность),

$(A+B)C = AC + BC$, $(A{\cdot}B) + C = (A + C) \cdot (B+ C)$ (дистрибутивность),

$A + A = A$, $A\cdot A = A$,

$A + \Omega = \Omega$, $A{\cdot}\Omega = A$,

$A + \overline{\quad} = \Omega$, $A\cdot\overline{\quad}\qquad \varnothing$,

$\overline{\quad} = \Omega$, $\overline{\quad}\qquad\qquad$,

$A/B = A\cdot\overline{\quad}$,

1.2. Классическое определение вероятности

При изучении случайных событий возникает необходимость количественно сравнивать возможность их появления в результате опыта. Например, при последовательном извлечении из колоды пяти карт более возможна ситуация, когда появились карты разных мастей, чем появление пяти карт одной масти; при десяти бросках монеты более возможно чередование гербов и цифр, нежели выпадение подряд десяти гербов, и т.д. Поэтому с каждым таким событием связывают по определенному правилу некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Это число называется ***вероятностью события*** и служит вторым основным понятием теории вероятностей.

Отметим, что само понятие вероятности, как и понятие случайного события, аксиоматическое и поэтому не поддается строгому определению. То, что в дальнейшем будет называться различными определениями вероятности, представляет собой способы вычисления этой величины.

Определение 1.7. Если все события, которые могут произойти в результате данного опыта:

а) попарно несовместны;

б) равновозможны;

в) образуют полную группу,

то говорят, что имеет место ***схема случаев.***

Можно считать, что случаи представляют собой все множество исходов опыта. Пусть их число равно n (число возможных исходов), а при m из них происходит некоторое событие A (число благоприятных исходов).

Определение. ***Вероятностью события А*** называется отношение числа исходов опыта, благоприятствующих этому событию, к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

$$P(A)=m/n \tag{1.1}$$

- ***классическое определение вероятности***.

Свойства вероятности

Из определения 1.8 вытекают следующие свойства вероятности:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Доказательство. Так как достоверное событие всегда происходит в результате опыта, то все исходы этого опыта являются для него благоприятными, то есть $m = n$, следовательно,

$P(A) = 1$.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство. Для невозможного события ни один исход опыта не является благоприятным, поэтому $m = 0$ и $P(A) = 0$.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Доказательство. Случайное событие происходит при некоторых исходах опыта, но не при всех, следовательно, $0 < m < n$, значит, $0 < m/n < 1$, $0 < P(A) < 1$.

Пример. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Будем считать элементарными событиями, или исходами опыта, извлечение из урны каждого из имеющихся в ней шаров. Очевидно, что эти события удовлетворяют всем условиям, позволяющим считать их схемой случаев. Следовательно, число возможных исходов равно 10, а число исходов, благоприятных событию A (появлению белого шара), 6 (таково количество белых шаров в урне). Значит, $P(A) = 6/10=3/5$.

1.3. Относительная частота. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности применимо только для очень узкого класса задач, где все возможные исходы опыта можно свести к схеме случаев. В большинстве реальных задач эта схема неприменима. В таких ситуациях требуется определять вероятность события иным образом. Для этого введем вначале понятие ***относительной частоты*** $\boldsymbol{W(A)}$ события A как отношения числа опытов, в которых наблюдалось событие A, к общему количеству проведенных испытаний:

$$W(A) = m / n, \qquad (1.2)$$

где n – общее число опытов, m – число появлений события A.

Из определений вероятности и относительной частоты видно, что определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Большое количество экспериментов показало, что если опыты проводятся в одинаковых условиях, то для большого количества испытаний относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это число можно считать вероятностью рассматриваемого события.

Определение. **Статистической вероятностью события** считают его относительную частоту или число, близкое к ней.

Замечание 1. Из формулы (1.2) следует, что свойства вероятности, доказанные для ее классического определения, справедливы и для статистического определения вероятности.

Замечание 2. Для существования статистической вероятности события A требуется:

1) возможность производить неограниченное число испытаний;

2) устойчивость относительных частот появления A в различных сериях достаточно большого числа опытов.

Замечание 3. Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Пример. Если в задаче задается вероятность попадания в мишень для данного стрелка (скажем, $p = 0{,}7$), то эта величина получена в результате изучения статистики большого количества серий выстрелов, в которых этот стрелок попадал в мишень около семидесяти раз из каждой сотни выстрелов.

1.3. Элементы комбинаторики

При вычислении вероятностей часто приходится использовать некоторые формулы ***комбинаторики*** – науки, изучающей комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества. Комбинаторику можно рассматривать как часть теории конечных множеств – любую комбинаторную задачу можно свести к задаче о конечных множествах и их отображениях.

Правило произведения. При решении многих комбинаторных задач полезно пользоваться следующим правилом произведения: если элемент x можно выбрать n способами, а элемент y – m способами, то упорядоченную пару (x,y) можно выбрать $n\ m$ способами. С помощью метода математической индукции это правило можно обобщить на случай любого числа множеств.

Пример. В столовой имеется 2 первых блюда, 4 – вторых и 3 – третьих. Сколькими способами можно составить из них обед?

Решение. Обозначим первые блюда буквами r, s, вторые – $а$, $б$, $в$, $г$, и третьи – цифрами 1, 2, 3. Тогда любой обед «шифруется» комбинацией из двух букв и цифры. Такая комбинация является элементом декартова произведения $X\times Y\times Z$ множеств $X = \{r, s\}$, $Y = \{а, б, в\}$, $Z = \{1, 2\}$. Известно, что $n(X\times Y)=n(X)$, поэтому в нашем случае, т.к. $n(X)=2$, $n(Y)=4$, $n(Z)=3$, то $n(X\times Y\times Z)=2$ 24. Значит, существуют 24 возможных выбора обеда.

Определение 1.10. ***Перестановки*** – это комбинации, составленные из всех n элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения. Число перестановок из n элементов обозначается P_n, P – первая буква французского слова *permutation* – перестановка. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!, \qquad (1.3)$$

где $n!$=1 n, полагаем P_0= 0! = 1.

Пример. Сколько различных списков (отличающихся порядком фамилий) можно составить из 7 различных фамилий?

Решение. $P_7 = 7! = 2·3·4·5·6·7 = 5040$.

Определение 1.11. ***Размещения*** – комбинации из m элементов множества, содержащего n различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений из n элементов по m обозначается A - первая буква французского слова arrangement – размещение) и вычисляются по формуле

(1.4)

или , при этом $P_n = n!$.

Пример. Сколько возможно различных вариантов пьедестала почета (первое, второе, третье места), если в соревнованиях принимают участие 10 человек?

Решение. .

Определение 1.12. ***Сочетания*** – неупорядоченные наборы из m элементов множества, содержащего n различных элементов (т.е. наборы, отличающиеся только составом элементов). Число всех возможных размещений из n элементов по m обозначается – первая буква французского слова combinaison – сочетание) и вычисляются по формуле

. (1.5)

Пример. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?

Решение. В отличие от предыдущего примера, здесь не важен порядок финалистов, следовательно, ищем число сочетаний из 10 по 3:

— .

Свойства чисел

Для любых m и n таких, что $0 \le m \le n$, верны равенства:

1)

2) +

3) .

Перестановки с повторениями

Сосчитаем, сколько различных «слов» (т.е. не обязательно имеющих смысл) можно составить, переставляя буквы в слове «кишмиш». Вообще говоря, шесть букв можно переставлять друг с другом 6!=720 способами. Но в этом слове имеются повторяющиеся пары букв, и поэтому при перестановке второй и пятой буквы слово не изменится. Поэтому сосчитаем, сколькими способами можно переставить в этом слове буквы, чтобы оно не изменилось. Нетрудно заметить, что число таких способов равно четырем: можно оставить все буквы на месте, можно поменять переставить местами две буквы «и», либо поменять две буквы «ш», либо поменять обе пары букв. Значит, число перестановок в слове «кишмиш» будет в четыре раза меньше, чем 720, т.е. 180. Перестановки с повторениями данного состава вычисляются по формуле

$P(\quad)= \overline{\qquad}.$

Пример. Сколькими способами можно расставить черные фигуры на восьмой горизонтали шахматной доски: два коня, два слона, 2 ладьи, ферзя и короля?

Решение. В этой задаче надо найти число кортежей длины 8, имеющих заданный состав (2,2,2,1,1). Число таких кортежей, т.е. перестановок с повторениями, равно $P(2,2,2,1,1)$=—————=5040.

Размещения с повторениями

Кортежи длины m, составленные из n-элементного множества X, называют также размещениями с повторениями из n элементов по m

Пример. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно что, никто из них не получил «неудовлетворительно»?

Решение. Каждый студент мог получить три отметки: «удовлетворительно», «хорошо», «отлично». В этой задаче надо найти число кортежей длины 4, каждый элемент такого кортежа принимает одно из трех значений. Поэтому $3^4 = 81$ способами могут быть выставлены отметки. Задачу легко можно решить по правилу произведения: получаем: 3·3·3·3=81.

Сочетания с повторениями

Различные составы кортежей длины m, компоненты которых принадлежат данному n-элементному множеству X, называют также сочетаниями с повторениями из n элементов по m

Пример. Сколькими способами можно составить набор из 5 пирожных, если имеется 3 вида пирожных?

Решение. Поскольку в этой задаче порядок пирожных не играет роли, то каждый набор задается кортежем длины 5 из 3 элементов (названий видов пирожных), причем порядок компонент кортежа не играет роли. Иными словами, нам надо найти число различных составов таких кортежей, т.е. число сочетаний с повторениями из 3 элементов по 5. Имеем:

Значит, существует 21 набор пирожных.

1.5. Геометрическая вероятность

Одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. В таких случаях можно воспользоваться понятием ***геометрической вероятности***.

Пусть на отрезок L наудачу брошена точка. Это означает, что точка обязательно попадет на отрезок L и с равной возможностью может совпасть с любой точкой этого отрезка. При этом вероятность попадания точки на любую часть отрезка L не зависит от расположения этой части на отрезке и пропорциональна его длине. Тогда вероятность того, что брошенная точка попадет на отрезок l, являющийся частью отрезка L, вычисляется по формуле

$$P(A) = l/L, \tag{1.6}$$

где l – длина отрезка l, а L – длина отрезка L.

Можно дать аналогичную постановку задачи для точки, брошенной на плоскую область S, и вероятности того, что она попадет на часть этой области s:

$$P(A) = s/S, \tag{1.7}$$

где s – площадь части области, а S – площадь всей области.

В трехмерном случае вероятность того, что точка, случайным образом расположенная в теле V, попадет в его часть v, задается формулой

$$P(A) = v/V, \tag{1.8}$$

где v – объем части тела, а V – объем всего тела.

Пример. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, не попадет в правильный шестиугольник, вписанный в него.

Решение. Пусть радиус круга равен R , тогда сторона шестиугольника тоже равна R. При этом площадь круга $S = \pi R^2$, а площадь шестиугольника

. Следовательно, площадь вне шестиугольника $S_1 = S - S_ш = \pi R^2 -$

. Тогда искомая вероятность $P(A) =$.

В общем случае рассматриваем область Ω, а в ней область D. В области Ω случайно выбирается точка X. Этот выбор можно интерпретировать как бросание точки X в область Ω. Пусть событие $A = \{X \in D\}$, т.е. брошенная точка попадет в область D.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области D, благоприятствующей событию A, к мере всей области Ω, т.е.

——.

1.6. Теорема сложения вероятностей

Теорема* 1 *(теорема сложения). Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство. Введем обозначения: n – общее число возможных элементарных исходов испытания; m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A; m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B.

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно m_1+m_2. Следовательно,

$$P(A + B) = (m_1+m_2)/n = m_1/n + m_2/n.$$

Так как $m_1/n = P(A)$ и $m_2/n = P(B)$, окончательно получим

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Пример. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара (событие A) $P(A) = 10/30 = 1/3$. Вероятность появления синего шара (событие B) $P(B) = 5/30 = 1/6$.

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность $P\ (A + B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2$.

***Теорема* 2.** Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) +\ldots+ P(A_n) = 1$.

Доказательство. Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то

$$P(A_1 + A_2 +\ldots+ A_n) = 1. \qquad (1.9)$$

Любые два события полной группы несовместны, поэтому можно применить теорему сложения:

$$P(A_1 + A_2 +\ldots+ A_n) = P(A_1) + P(A_2) +\ldots+ P(A_n). \qquad (1.10)$$

Из формул (1.9) и (1.10) получим

$$P(A_1) + P(A_2) +\ldots+ P(A_n) = 1.$$

***Теорема* 3.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{\ }) = 1. \qquad (1.11)$$

Доказательство. Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице по теореме 2.

Замечание. В ряде задач проще искать не вероятность заданного события, а вероятность события, противоположного ему, а затем найти требуемую вероятность по формуле (1.11).

Пример. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие , противоположное заданному, заключается в том, что из урны вынуто 5 шаров одного цвета, а так как белых шаров в ней всего два, то этот цвет может быть только черным. Множество возможных исходов опыта: а множество исходов, благоприятных событию, – это

число возможных наборов по 5 шаров только из шести черных m = .
Тогда $P(\overline{\ }) = 6/56 = 3/28$, следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{\ }) = 25/28$.

1.7. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей

Определение. ***Условной вероятностью** $p(B/A)$ **события** B* называют вероятность события B при условии, что событие A произошло. Условная вероятность события B при условии, что событие A уже произошло, по определению, равна $P(B/A) = P(AB) / P(A)$.

Замечание. Понятие условной вероятности используется в основном в случаях, когда осуществление события A изменяет вероятность события B.

Примеры:

1) пусть событие A – извлечение из колоды в 32 карты туза, а событие B – то, что и вторая вынутая из колоды карта окажется тузом. Тогда, если после первого раза карта была возвращена в колоду, то вероятность вынуть вторично туз не меняется. Если же первая карта в колоду не возвращается, то осуществление события A приводит к тому, что в колоде осталась 31 карта, из которых только 3 туза;

2) если событие A – попадание в самолет противника при первом выстреле из орудия, а B – при втором, то первое попадание уменьшает маневренность самолета, поэтому $P(B/A)$ увеличится по сравнению с $P(A)$.

Теорема* 4 *(теорема умножения). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (1.12)$$

Доказательство. По определению условной вероятности

$$P(B/A) = P(AB) / P(A).$$

Отсюда $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Пример. Для поражения цели необходимо попасть в нее дважды. Вероятность первого попадания равна 0,2, затем она не меняется при промахах, но после первого попадания увеличивается вдвое. Найти вероятность того, что цель будет поражена первыми двумя выстрелами.

Решение. Пусть событие A – попадание при первом выстреле, а событие B – попадание при втором. Тогда $P(A) = 0{,}2$, $P(B/A) = 0{,}4$, $P(AB) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

Следствие 1. Если подобным образом вычислить вероятность события BA, совпадающего с событием AB, то получим, что $P(BA) = P(B) \cdot P(A/B)$. Следовательно,

$$P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (1.13)$$

Следствие 2. Теорема умножения вероятностей обобщается на случай n событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$

Определение. Событие B называется ***независимым*** от события A, если появление события A не изменяет вероятности B, т. е. $P(B/A) = P(B)$.

Замечание. Если событие B не зависит от A, то и A не зависит от B. Действительно, из (1.13) следует при этом, что $P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B)$, откуда $P(A/B) = P(A)$. Значит, свойство независимости событий взаимно.

Теорема умножения для независимых событий имеет вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \quad (1.14)$$

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

Равенство (1.14) часто используют в качестве еще одного определения независимых событий: события A и B называются *независимыми*, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Понятие независимости может быть распространено на случай n событий. События A_1, A_2, ..., A_n называются *независимыми* (или *независимыми в совокупности*), если каждое из них не зависит от произведение любого числа остальных событий и от каждого в отдельности. В противном случае события A_1, A_2, ..., A_n называются *зависимыми.*

Из попарной независимости событий A_1, A_2, ..., A_n (любые два из них независимы) не следует их независимость в совокупности. Поясним сказанное на примере.

Пример. Производится выбор (наудачу) флага из четырех имеющихся в наличии: красного, голубого, белого и трехцветного (красно-бело-голубого). Исследовать на независимость события: *К* – выбранный флаг имеет красный цвет, *Г* – имеет голубой цвет, *Б* – имеет белый цвет.

Решение. Возможных исходов выбора 4. Событию *К* благоприятствуют 2 исхода (красный цвет имеется у двух флагов). Поэтому $P(К) = 2/4 = 1/2$. Аналогично находим, что $P(Г) = P(Б) = 1/2$. Событию $К{\cdot}Г$ – выбран флаг, имеющий красный и голубой цвета, – благоприятствует один исход. Поэтому $P(К{\cdot}Г) = 1/4$. И так как $P(К{\cdot}Г) = 1/4 = 1/2{\cdot}1/2 = P(К){\cdot}P(Г)$, то события *К* и *Г* независимы. Аналогично убеждаемся в независимости событий *К* и *Б, Б* и *Г*. Значит, события *К, Б, Г* попарно независимы. Но так как $P(К{\cdot}Г{\cdot}Б) = 1/4 \neq P(К){\cdot}P(Г)\ {\cdot}P(Б) = 1/8$, то события *К, Г* и *Б* не являются независимыми в совокупности.

Как известно (теорема 1), вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. Выведем формулу вероятности двух совместных событий.

Теорема **5.** Вероятность $P(A + B)$ суммы совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.15)$$

Доказательство. Поскольку события A и B, по условию, совместны, то событие $A+B$ наступит, если наступит одно из следующих трех несовместных событий: $\overline{}\ \overline{}B$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A + B) = P(\overline{}) + P(\overline{}B) + P(AB). \qquad (1.16)$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $\overline{\ \ }$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий получим $P(A) = P(\overline{\ \ }) + P(AB)$. Отсюда

$$P(\overline{\ \ }) = P(A) - P(AB). \qquad (1.17)$$

Аналогично находим

$$P(B) = P(\overline{\ }B) + P(AB).$$

Отсюда

$$P(\overline{\ }B) = P(B) - P(AB). \qquad (1.18)$$

Подставив (1.17) и (1.18) в (1.16), окончательно получим

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Следствие 1. Теорему 5 можно распространить на случай суммы любого числа событий. Например, для суммы трех событий A, B и C

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \qquad (1.19)$$

и т.д.

Следствие 2. Если события A и B несовместны, то их совмещение есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB) = 0$. Тогда вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей (получили теорему 1):

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

При решении задач теоремы сложения и умножения обычно применяются вместе.

Пример. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятности следующих событий:

A – хотя бы одно попадание при двух выстрелах;

B – ровно одно попадание при двух выстрелах;

C – два попадания;

D – ни одного попадания.

Решение. Пусть событие H_1 – попадание первого стрелка, H_2 – попадание второго. Тогда $A = H_1 + H_2$, $B = H_1 \overline{} + \overline{} H_2$, $C = H_1 \cdot H_2$, $D = \overline{}\ \overline{}$. События H_1 и H_2 совместны и независимы, поэтому теорема сложения применяется в общем виде, а теорема умножения – в виде (1.14). Следовательно, $P(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$, $P(A) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$,

$P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}46$ (так как события несовместны),

$P(D) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$. Заметим, что события A и D противоположные, поэтому $P(A) = 1 - P(D)$.

Вероятность появления хотя бы одного события

***Теорема* 6.** Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, $A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $_1$, $_2$, …, $_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n \,, \tag{1.20}$$

где q_i – вероятность события, противоположного событию A_i .

Доказательство. Если событие A заключается в появлении хотя бы одного события из $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то события A и $_1 \ _2 \ldots \ _n$ (ни одно из событий не наступило) противоположны, поэтому по теореме 3 сумма их вероятностей равна единице: $P(A) + P(_1 \ _2 \ldots \ _n) = 1$. Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим $P(A) = 1 - P(_1 \ _2 \ldots \ _n) = 1 - P(_1)P(_2) \ldots P(_n)$, или $P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$.

Пример. Сколько нужно произвести бросков монеты, чтобы с вероятностью не менее 0,9 выпал хотя бы один герб?

Решение. Вероятность выпадения герба при одном броске равна вероятности противоположного события (выпадения цифры) и равна 0,5. Тогда вероятность выпадения хотя бы одного герба при n бросках равна $1 - (0{,}5)^n$. Тогда из решения неравенства $1 - (0{,}5)^n > 0{,}9$ следует, что $n > \log_2 10$, $n \geq 4$.

1.8. Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть событие A может произойти только совместно с одним из событий H_1, $H_2,\ldots$, H_n, образующих полную группу несовместных событий. События H_1, $H_2,\ldots$, H_n называются ***гипотезами***.

***Теорема* 7.** Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий H_1, $H_2,\ldots$, H_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) +\ldots+ P(H_i)\, P(A/H_i) +\ldots+ P(H_n)P(A/H_n), \qquad (1.21)$$

где $P(H_i)$ – вероятность i-й гипотезы, а $P(A/H_i)$ – вероятность события A при условии реализации этой гипотезы. Формула (1.21) носит название ***формулы полной вероятности***.

Доказательство. По условию, событие событие A может наступить, если наступит одно из несовместных событий H_1, $H_2,\ldots$, H_n. Другими словами, появление события A означает осуществление одного, безразлично какого, из несовместных событий H_1A, $H_2A,\ldots$, H_nA. Пользуясь для вычисления вероятности события А теоремой сложения, получим

$$P(A) = P(H_1A) +\ldots+ P(H_iA) +\ldots+ P(H_nA). \qquad (1.22)$$

Остается вычислить каждое из слагаемых. По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем $P(H_1A) = P(H_1)P(A/H_1)$, $P(H_2A) = P(H_2)P(A/H_2)$, $\ldots$, $P(H_nA) = P(H_n)P(A/H_n)$. Подставив эти выражения в формулу (1.22), получим формулу полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) +\ldots+ P(H_i)\, P(A/H_i) +\ldots+ P(H_n)P(A/H_n).$$

Пример. Имеются два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь стандартная.

Решение. Обозначим через A событие «извлеченная деталь стандартна». Деталь может быть извлечена либо из первого набора (гипотеза H_1), либо из второго (гипотеза H_2). Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(H_1) = 1/2$. Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, $P(H_2) = 1/2$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P(A/H_1) = 0,8$. Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь, $P(A/H_2) = 0,9$. Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) = 0,5\cdot 0,8 + 0,5\cdot 0,9 = 0,85.$$

Следствием формулы (1.21) является формула Байеса (теорема гипотез). Она относится к той же ситуации, что и формула полной вероятности (событие A может наступить только вместе с одним из n несовместных событий $H_1, H_2,\ldots, H_n$).

***Теорема* 7.** Пусть события $H_1, H_2,\ldots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) при условии, что событие А произошло, вычисляется по формуле

$$P(H_i/A) = P(H_i)\,P(A/H_i) \,/\, P(A), \tag{1.23}$$

где $P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) +\ldots+ P(H_i)\,P(A/H_i) +\ldots+ P(H_n)P(A/H_n)$ – формула полной вероятности. Формула (1.23) называется ***формулой Байеса***.

Доказательство. По теореме умножения имеем

$P(H_iA) = P(H_i)\,P(A/H_i) = P(A)\,P(H_i\,/A)$.

Отсюда $P(H_i/A) = P(H_i)\,P(A/H_i) \,/\, P(A)$.

Пример. В некоторой отрасли 60 % продукции производится фабрикой I, 25 % продукции – фабрикой II, а остальная часть продукции – фабрикой III. На фабрике I в брак идет 1 % всей производимой ею продукции, на фабрике II – 1,5 %, на фабрике III – 2 %.

Купленная покупателем единица продукции оказалась браком. Какова вероятность того, что она произведена фабрикой I?

Решение. Введем обозначения для событий: A – купленное изделие оказалось браком; H_1 – изделие произведено фабрикой I, H_2 – изделие произведено фабрикой II, H_3 – изделие произведено фабрикой III.

Имеем: $P(H_1) = 0{,}30$; $P(H_2) = 0{,}25$; $P(H_3) = 0{,}45$; $P(A/H_1) = 0{,}01$; $P(A/H_2) = 0{,}015$; $P(A/H_3) = 0{,}02$; $P(A) = 0{,}01\cdot 0{,}3+0{,}015\cdot 0{,}25+0{,}02\cdot 0{,}45=0{,}015$. $P(H_1/A) = P(H_1)\, P(A/H_1) / P(A)$, $P(H_1/A) = (0{,}01\cdot 0{,}3)/0{,}015 = 0{,}2$.

Таким образом, из всех бракованных изделий отрасли в среднем 20 % выпускаются фабрикой I.

1.9. Схема повторения испытаний. Формула Бернулли

Рассмотрим серию из n испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется ***схемой повторения испытаний, или схемой Бернулли*.**

Найдем вероятность того, что в такой серии событие A произойдет ровно k раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что A произошло в некоторых k испытаниях и не произошло в остальных $n - k$ испытаниях.

Теорема* 8.** Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а вероятность его непоявления равна $q = 1 - p$, то вероятность того, что событие A произойдет k раз, определяется ***формулой Бернулли

——— . (1.24)

Доказательство. Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A произойдет k раз и не наступит $n - k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна . Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. . Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Так как вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

или .

Пример. Монета бросается 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет при этом ровно 3 раза?

Решение. В данном случае успехом считается выпадение герба, вероятность p этого события в каждом опыте равна 1/2. Отсюда

Предельные теоремы в схеме Бернулли

Формула Бернулли требует громоздких расчетов при большом количестве испытаний. Вычисление вызывает затруднения также при малых значениях $p(q)$. Возникает необходимость в отыскании приближенных формул для вычисления , обеспечивающих необходимую точность. Такие формулы дают нам предельные теоремы; они содержат так называемые асимптотические формулы, которые при больших значениях испытаний дают сколь угодно малую относительную погрешность.

***Теорема* 9.** Если число испытаний неограниченно увеличивается ($n \to \infty$) и вероятность p наступления события A в каждом испытании неограниченно уменьшается ($p \to 0$), но так, что их произведение np является постоянной величиной ($np=\lambda=const$), то вероятность удовлетворяет предельному равенству

. (1.25)

Доказательство. Преобразуем формулу Бернулли с учетом того, что $p=\lambda/n$:

=

=

= — – – — – –

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим —

(–).

Из предельного равенства (1.25) при больших n и малых p вытекает ***приближенная формула Пуассона***

$$—, \ \lambda = np, \ k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (1.26)$$

Приближенную формулу (1.26) обычно используют, когда $n \geq 50$, а $np \leq 10$.

В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p не близка к нулю ($p \neq 0$, $p \neq 1$), для вычисления вероятностей используют теоремы Муавра-Лапласа.

***Теорема* 10 (*локальная теорема Муавра-Лапласа*).** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность может быть вычислена по приближенной формуле

$$(1.27)$$

Формулу (1.27) можно записать в виде Имеются таблицы, в которых помещены значения функции , соответствующие положительным значениям аргумента. Для отрицательных значений аргумента используют свойство четности функции

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, т.е. или , используют интегральную теорему Муавра-Лапласа.

***Теорема* 11 (*интегральная теорема Лапласа*).** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность может быть вычислена по приближенной формуле

$$. \qquad (1.28)$$

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами. В таблице даны значения функции . нечетная функция. В таблице приведены значения интеграла лишь до $x = 5$, так как для $x>5$ можно принять $= 0{,}5$. Функцию часто называют функцией Лапласа.

Для того чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, преобразуем формулу (1.28):

$$=$$

$$=$$

Итак, вероятность того, что событие *A* появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, ,

где .

Вопросы

1. Какие события называются совместными, несовместными?
2. Что называют суммой событий, произведением событий?
3. Что называют относительной частотой?
4. Дайте определение понятий «размещение», «перестановка», «сочетание с повторениями и без». Перечислите их основные свойства.
5. Дайте определение геометрической вероятности.
6. Что называют условной вероятностью?
7. Сформулируйте предельные теоремы в схеме Бернулли.

Упражнения

1. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно образовать, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5? А сколько правильных дробей?

2. Сколько трехцветных полосатых различных флагов можно сшить, если в наличии имеется материал пяти различных цветов:

а) все полосы различные;

б) полосы могут повторяться;

в) полосы могут располагаться не только горизонтально, но и вертикально?

3. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии, а всего было сыграно 210 партий?

4. Сколько диагоналей имеет выпуклый многоугольник?

5. Шесть одинаковых предметов распределяются по трем ящикам. Сколькими способами можно это сделать, если каждый ящик может вместить все шесть предметов?

6. Найдите число членов разложения $(a+b+c+d)^4$.

7. Сколько чисел меньших, чем миллион, можно составить из цифр 8, 9, 0?

8. Для фотографирования группы, состоящей из 8 мужчин и 6 женщин, фотограф хочет посадить в первый ряд двух женщин и трех мужчин так, чтобы лица одного пола не сидели рядом. Сколькими способами может быть сформирован первый ряд?

9. Сколько делителей имеет число 210?

10. Сколькими способами можно на шахматной доске расставить 8 ладей одного цвета так, чтобы они не били друг друга?

11. Найти число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов.

12. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более четырех символов (не более пяти символов)?

13. Из партии изготовленных шестерен, среди которых 20 годных и 5 бракованных, для контроля наудачу взято 8 штук. Определить вероятность, что среди них 3 бракованных.

14. Два спортсмена должны выполнить норму мастера спорта. Вероятность того, что первый выполнит норму, равна 0,95; для второго – 0,9. Найти вероятность, что норма будет выполнена: а) обоими спортсменами; б) только одним спортсменом; в) хотя бы одним.

15. Имеются три одинаковых корзинки. В первой 5 красных яблок и 2 зеленых; во второй – 3 красных и 4 зеленых, в третьей – 4 красных и 4 зеленых. Выбирается наугад одна корзина и вынимается одно яблоко. Какова вероятность, что оно зеленое?

16. Вероятность позвонить любому абоненту на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят четыре абонента?

17. В партии из 50 деталей 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу 3 деталей все детали нестандартные.

18. Разыскивая определенную книгу, студент обходит три библиотеки. Вероятность того, что книга есть в каждой из трех библиотек, равна 0,8; а вероятность того, что имеющая книга не выдана, равна 0,5 для каждой библиотеки. Какова вероятность того, что студент найдет книгу в одной из библиотек ?

19. На поляне около реки пасется 20 коров, из них 6 рыжих, остальные черно-белые. Вероятность того, что рыжая корова в течение часа подойдет к реке попить, равна 0,7; для черно-белой – 0,6. В течение часа корова подошла к реке напиться. Найти вероятность, что это рыжая корова.

20. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Виды случайных величин, способы задания

Определение. ***Случайной величиной*** называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита (X, Y, $Z,\ldots$), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами (x_i, $y_i,\ldots$).

Примеры: число очков, выпавших при броске игральной кости; число появлений герба при 10 бросках монеты; число выстрелов до первого попадания в цель; расстояние от центра мишени до пробоины при попадании.

Можно заметить, что множество возможных значений для перечисленных случайных величин имеет разный вид: для первых двух величин оно конечно (соответственно 6 и 11 значений), для третьей величины множество значений бесконечно и представляет собой множество натуральных чисел, а для четвертой – все точки отрезка, длина которого равна радиусу мишени. Таким образом, для первых трех величин множество значений из отдельных (дискретных), изолированных друг от друга значений, а для четвертой оно представляет собой непрерывную область. По этому показателю случайные величины подразделяются на две группы: дискретные и непрерывные.

Определение. Случайная величина называется ***дискретной***, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Определение. Случайная величина называется ***непрерывной***, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется ***законом распределения*** случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется ***рядом распределения***:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
p	p_1	p_2	…	p_n	…

Заметим, что событие, заключающееся в том, что случайная величина примет одно из своих возможных значений, является достоверным, поэтому $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $p_1 + p_2 + \ldots$ сходится и его сумма равна единице.

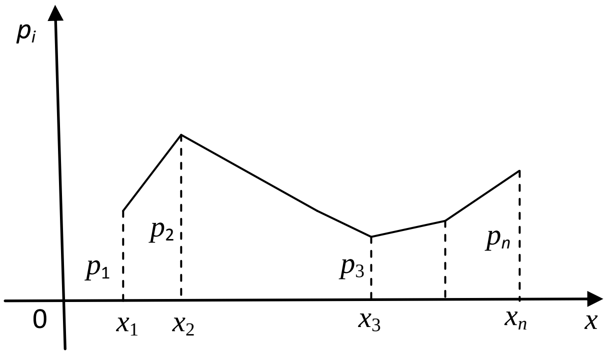
Пример. В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные – черные. Из них вынимают наудачу 3 шара. Найти закон распределения числа белых шаров в выборке.

Решение. Возможные значения случайной величины X – числа белых шаров в выборке есть $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ и $x_4 = 3$. Вероятности их, соответственно, будут p_1 —— —, —— —,

—, —. Закон распределения запишем в виде таблицы:

X	0	1	2	3
p	1/56	15/56	30/56	10/56

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде ***многоугольника распределения*** – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).



Пусть производится определенное число n независимых испытаний. В каждом из них с одной и той же вероятностью p может наступить некоторое событие A. Рассматривается случайная величина x – число наступлений события A в n испытаниях. Соответствующая таблица имеет вид

X	0	1	…	n-1	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	…	$P_n(n\text{-}1)$	$P_n(n)$

,

где (k = 0, 1, …, n) по формуле Бернулли. Данный закон распределения называется ***биномиальным законом***. Такое название связано с тем фактом, что числа $P_n(0)$, $P_n(1)$, …, $P_n(n)$ являются членами бинома $(p + q)^n$.

Говорят, что случайная величина x распределена ***по закону Пуассона***, если соответствующая таблица имеет вид

X	0	1	2	…
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…

,

где ——, $\lambda = np$, k = 0, 1, 2, … .

Распределение Пуассона выражает закон распределения массовых (n велико) и редких (p мало) событий.

2.2 Функция распределения вероятностей

Определение. ***Функцией распределения F(x)*** случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x:

$$F\ (x) = p\ (X < x). \tag{2.1}$$

Свойства функции распределения.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$. Действительно, так как функция распределения представляет собой вероятность, она может принимать только те значения, которые принимает вероятность.

2. Функция распределения является неубывающей функцией, т. е. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Это следует из того, что $F(x_2) = p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \leq X < x_2) \geq F(x_1)$.

3. В частности, если все возможные значения X лежат на интервале $[a, b]$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ и $F(x) = 1$ при $x \geq b$. Действительно, $X < a$ – событие невозможное, а $X < b$ – достоверное.

4. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[a, b]$, равна разности значений функции распределения на концах интервала:

$p\ (\ a < X < b\ ) = F(b) - F(a)$.

Справедливость этого утверждения следует из определения функции распределения (см. свойство 2).

Для дискретной случайной величины значение $F(x)$ в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции: $F(x) =$.

2.3 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения полностью определяет случайную величину. Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства закона распределения случайной величины. Такие числа принято называть числовыми характеристиками случайной величины.

Важнейшими среди них являются характеристики положения: математическое ожидание (центр распределения с.в.), мода, медиана;

характеристики рассеяния: дисперсия (отклонение с.в. от ее центра), среднее квадратическое отклонение и др.

Определение. ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения x_1, x_2, …, x_n, вероятности которых соответственно p_1, p_2, ..., p_n. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$.

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то $M(X) =$ причем математическое ожидание существует, если ряд в правой часть равенства сходится абсолютно.

Замечание. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Определение. ***Произведением постоянной величины С на дискретную случайную величину X*** называется дискретная случайная величина CX, возможные значения которой равны произведениям постоянной C на возможные значения X; вероятности возможных значений CX равны вероятностям соответствующих возможных значений X.

Определение. ***Произведением независимых случайных величин X и Y*** называется случайная величина XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей. Некоторые произведения $x_i y_i$ могут оказаться равными между собой. В этом случае вероятность возможного значения произведения равна сумме соответствующих вероятностей.

Определение. ***Суммой случайных величин X и Y*** называется случайная величина $X+Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности возможных значений $X+Y$ *для независимых величин* равны произведениям вероятностей слагаемых; для зависимых величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность другого. Некоторые суммы x_i+y_i могут оказаться равными между собой. В этом случае вероятность возможного значения суммы равна сумме соответствующих вероятностей.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной величине, т.е. $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(CX) = CM(X)$.

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых, т.е. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих случайных величин, т.е. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Доказательство. 1. Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, которая принимает лишь одно значение с вероятностью 1. Поэтому $M(C) = C\cdot 1=C$.

2. Так как дискретная случайная величина CX принимает значения Cx_i с вероятностями p_i, то $=CM(X)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

3. Так как дискретная случайная величина $X+Y$ принимает значения x_i+y_i с вероятностями p_{ij}, то

4. Так как случайные величины X и Y независимы, то $p_{ij} = p_i \cdot p_j.$ Следовательно,

$M(XY) =$

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p.

***Теорема* 12.** Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:

$$M(X) = np.$$

Доказательство. Пусть случайная величина X – число наступления события A в n независимых испытаниях. Если X_1 – число появлений события в первом испытании, X_2 – во втором, …, X_n – в n-м, то общее число появлений события $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

По третьему свойству математического ожидания

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n). \quad (2.2)$$

Каждое из слагаемых правой части равенства есть математическое ожидание числа появлений события в одном испытании, а значит равно вероятности события. $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = p$. Подставляя в правую часть равенства (2.2) вместо каждого слагаемого p, получим $M(X) = np$.

Определение. ***Дисперсией*** (рассеянием) дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X\text{-}M(X)]^2.$$

Из определения дисперсии следует формула для ее вычисления:

$$D(X) = \qquad\qquad . \quad (2.3)$$

***Теорема* 13.** Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Доказательство. Математическое ожидание $M(X)$ есть постоянная величина, следовательно, $2M(X)$ и $M^2(X)$ есть также постоянные величины. Пользуясь свойствами математического ожидания, получим:

$D(X) = M[X\text{-}M(X)]^2 = M[X^2\text{-}2XM(X)+ M^2(X)] = M(X^2) – 2M(X)M(X)+ M^2(X) =$
$=M(X^2) –2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$

Эта теорема позволяет записать формулу для вычисления дисперсии в виде

$$D(X) = \quad . \qquad (2.4)$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной равна нулю: $D(C) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2D(X)$.

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

4. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины: $D(C+X) = D(X)$.

Доказательство. 1. $D(C) = M[C\text{-}M(C)]^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0$.

2. $D(CX) = M[CX\text{-}M(CX)]^2 = M[CX\text{-}CM(X)]^2 = M(C^2[X\text{-}M(X)]^2) = C^2M [X - -M(X)]^2 = C^2D(X)$.

3. $D(X+Y) = M((X+Y)^2) - [M(X+Y)]^2 = M(X^2) +2M(XY) + M(Y^2) - [M(X)]^2 - -2M(X)M(Y)\text{-}[M(Y)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2 +M(Y^2) - [M(Y)]^2 +2[M(XY) - M(X)M(Y)] = =D(X) + D(Y) - 2[M(X)M(Y) - M(X)M(Y)] =D(X) + D(Y)$.

4. $D(C+X) = D(C) + D(X) = D(X)$.

Определение. ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии:

Пример. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $M(X)$, $D(X)$,

Решение. Используем формулу $M(X) = x_1 p_1+ x_2 p_2+ \ldots + x_n p_n$.

$M(X)$ = -1·0,2 + 0·0,1+1·0,3+2·0,4 = 0,9. Дисперсию найдем по формуле $D(X)$ = . $D(X) = (-1-0,9)^2 \cdot 0,2 + (0-0,9)^2 \cdot 0,1 + (1-0,9)^2 \cdot 0,3 + (2-0,9)^2 \cdot 0,4 = 1,29$. =

2.4 Плотность распределения непрерывной случайной величины. Равномерное распределение вероятностей

Определение и свойства функции распределения сохраняются и для непрерывной случайной величины, для которой функцию распределения можно считать одним из видов задания закона распределения. Но для непрерывной случайной величины вероятность каждого отдельного ее значения равна 0. Это следует из свойства 4 функции распределения: $p(X = a) = F(a) - F(a) = 0$. Поэтому для такой случайной величины имеет смысл говорить только о вероятности ее попадания в некоторый интервал.

Вторым способом задания закона распределения непрерывной случайной величины является так называемая плотность распределения (плотность вероятности, дифференциальная функция).

Определение. Функция $f(x)$, называемая ***плотностью распределения*** непрерывной случайной величины, определяется по формуле

$$f(x) = F'(x), \qquad (2.2)$$

т. е. является производной функции распределения.

Свойства плотности распределения

1. $f(x) \geq 0$, так как функция распределения является неубывающей.
2. $F(x)$ = , что следует из определения плотности распределения.
3. Вероятность попадания случайной величины в промежуток $[a, b]$ равна определенному интегралу от ее плотности в пределах от a до b, т.е.

$$P\{a \leq X \leq b\} = \quad . \qquad (2.3)$$

4. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице (условие нормировки):

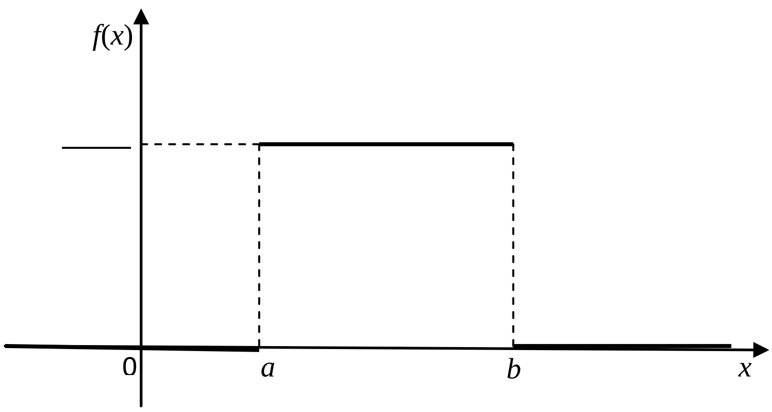
. (2.4)

Равномерный закон распределения

Часто на практике мы имеем дело со случайными величинами, распределенными определенным типовым образом, т. е. такими, закон распределения которых имеет некоторую стандартную форму. Выше были рассмотрены примеры таких законов распределения для дискретных случайных величин (биномиальный и Пуассона). Для непрерывных случайных величин тоже существуют часто встречающиеся виды закона распределения, и в качестве первого из них рассмотрим равномерный закон.

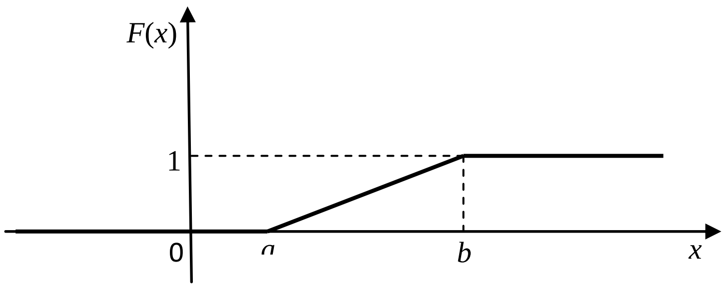
Определение. Закон распределения непрерывной случайной величины называется **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение ($f(x)$ = const при $a \le x \le b$, $f(x) = 0$ при $x < a$, $x > b$):

График плотности $f(x)$ для равномерного распределения непрерывной случайной величины имеет вид



Функция распределения $F(x)$ для равномерного распределения непрерывной случайной величины X выражается формулой

График имеет $F(x)$ вид



Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют определенный интеграл

(2.5)

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси, то

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют определенный интеграл

$f(x)dx$;

если возможные значения принадлежат всей числовой оси, то

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для дискретной величины, равенством

2.5. Нормальный закон распределения вероятностей. Показательное распределение

Определение. Непрерывная случайная величина называется распределенной по **нормальному закону**, если ее плотность распределения имеет вид

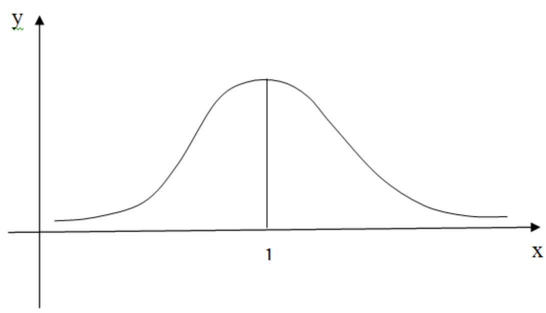
$$\qquad (2.6)$$

Замечание. Таким образом, нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ.

График плотности нормального распределения называют **нормальной кривой (кривой Гаусса)**. Выясним, какой вид имеет эта кривая, для чего исследуем функцию (2.6).

1. Область определения этой функции: $(-\infty, +\infty)$.
2. $f(x) > 0$ при любом x (следовательно, весь график расположен выше оси Ox).
3. Ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$.
4. Функция $f(x)$ имеет один максимум при $x = a$, равный $f(a) =$.
5. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$.
6. Точки графика ($a - \sigma$,) и ($a + \sigma$,) являются точками перегиба.

Пользуясь результатами исследования, строим график.



Покажем, что вероятностный смысл параметров a и σ в формуле (2.6) таков: a есть математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

По определению математического ожидания непрерывной случайной величины Введем новую переменную $z = (x - a)/\sigma$. Отсюда $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$. Так как новые пределы интегрирования равны старым, получим

Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интеграла – нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Второе из слагаемых равно a (интеграл Пуассона).

Итак, $M(X) = a$, т.е. математическое ожидание нормального распределения равно параметру a.

По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что $M(X) = a$, имеем

Введем новую переменную $z = (x - a)/\sigma$. Отсюда $x - a = \sigma z$, $dx = \sigma dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим

Интегрируя по частям, положив $u = z$, $dv = z$, найдем $D(X) = \sigma^2$.

Следовательно,

Итак, среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины вычисляется по формуле

где – функция Лапласа.

Для вычисления значений $F(x)$ приходится пользоваться таблицами. Они составлены для случая, когда $a = 0$, а $\sigma = 1$.

Определение. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется **нормированным**, а его функция распределения

– **функцией Лапласа**. (2.7)

Правило «трех сигм»: если случайная величина распределена нормально, то модуль ее отклонения от $x = a$ не превосходит 3σ.

Определение. **Показательным (экспоненциальным)** называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

где $\lambda>0$ – параметр распределения.

Функция распределения показательного распределения имеет вид

Пример. Пусть время безотказной работы элемента распределено по показательному закону с плотностью распределения $f(t) = 0{,}1\ e^{-0{,}1t}$ при $t \geq 0$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 10 часов.

Решение. Так как $\lambda = 0{,}1$, $R(10) = e^{-0{,}1\cdot 10} = e^{-1} = 0{,}368$.

2.6. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

Неравенство Чебышева

Теорема 14. Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X) = a$ и дисперсию $D(X)$, то для любого ε>0 справедливо неравенство Чебышева

(2.8)

Доказательство. Докажем неравенство для непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)$. Вероятность есть вероятность попадания X в область, лежащую вне промежутка $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. Можно записать

так как область интегрирования $|x – a| \geq \varepsilon$ можно записать в виде $(x - a)^2 \geq \varepsilon^2$, откуда следует Имеем

так как интеграл от неотрицательной функции при расширении области интегрирования может только возрасти. Таким образом,

т.е. .

Аналогично доказывается неравенство Чебышева и для дискретной случайной величины X, принимающей значения x_1 , x_2 , x_3 ,… с вероятностями p_1 , p_2 , p_3 ,…

Отметим, что неравенство Чебышева можно записать в другой форме:

(2.9)

Неравенство Чебышева справедливо для любых случайных величин. В частности, для случайной величины $X = m$, имеющей биномиальное распределение с математическим ожиданием $M(X) = a = np$ и дисперсией $D(X) = npq$, оно принимает вид

. (2.10)

Оценку вероятности попадания случайной величины X в промежуток $[\varepsilon, \infty)$ дает неравенство Маркова: для любой неотрицательной случайной величины X, имеющей математическое ожидание $M(X)$ и $\varepsilon > 0$, справедливо неравенство .

Теорема Чебышева

Определение. Случайные величины X_1 , X_2 , …, X_n ,… сходятся по вероятности к величине A (случайной или неслучайной), если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события $\{|X_n - A| < \varepsilon\}$ при $n \to \infty$ стремится к единице, т.е.

.

Теорема 15 (закон больших чисел в форме Чебышева). Если случайные величины X_1 , X_2 , …, X_n,… независимы и существует такое число $C > 0$, что $D(X_i) \le C_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то для любого $\varepsilon > 0$

т.е. среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Доказательство. Так как $D(X_i) \le C_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то

Тогда, применяя к случайной величине

неравенство Чебышева (2.8), имеем

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что вероятность любого события не превышает 1, получаем

Вопросы

1. Дайте определение числовых характеристик дискретных случайных величин.
2. Дайте определение числовых характеристик непрерывных случайных величин.
3. Что называют равномерным распределением вероятностей?
4. Охарактеризуйте нормальный и показательный законы распределения вероятностей.
5. Сформулируйте закон больших чисел.

Упражнения

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну и ту же цель. Вероятность попадания в цель для первого равна 0,6; для второго – 0,5. Составить закон распределения числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует регулировки – 0,9; второй – 0,8; третий – 0,7. Составить закон распределения числа станков, которые в течение часа не потребуют регулировки. Найти его $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	3
p	0,7	0,3

Найти ее функцию распределения вероятностей.

4. Случайная величина X распределена по нормальному закону a =10, σ = 2. Записать $f(x)$ и построить ее график. Найти $P(12 < X < 14)$.

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	5
p	0,4	0,6

Найти ее функцию распределения вероятностей.

ЧАСТЬ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ГЛАВА 3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Историческая справка. Первые начала математической статистики можно найти уже в сочинениях создателей теории вероятностей - Я. Бернулли (конец 17 - начало 18 веков), П. Лапласа (2-я половина 18 - начало 19 веков) и С. Пуассона (1-я половина 19 века). В России методы математической статистики в применении к демографии и страховому делу развивал на основе теории вероятностей В.Я. Буняковский (1846). Решающее значение для всего дальнейшего развития этой науки имели работы русской классической школы теории вероятностей 2-й половины 19 - начала 20 веков (П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн). Многие вопросы теории статистических оценок были по существу разработаны на основе теории ошибок и метода наименьших квадратов (К. Гаусс, 1-я половина 19 века, и А. А. Марков, конец 19 - начало 20 веков). Работы А. Кетле (19 век, Бельгия), Ф. Гальтона (19 век, Великобритания) и К. Пирсона (конец 19 - начало 20 веков, Великобритания) имели большое значение, но по уровню использования достижений теории вероятностей отставали от работ русской школы. К. Пирсоном была широко развёрнута работа по составлению таблиц функций, необходимых для применения методов математической статистики. В создании теории малых выборок, общей теории статистических оценок и проверки гипотез (освобожденной от предположений о наличии априорных распределений), последовательного анализа весьма значительна роль представителей англо-американской школы (Стьюдент (псевдоним У. Госсета), Р. Фишер, Э. Пирсон - Великобритания, Ю. Нейман, А. Вальд - США), деятельность которых началась в 20-х годах 20 века. В СССР значительные результаты в области математической статистики были получены В.И. Романовским, Е.Е. Слуцким, которому принадлежат важные работы по статистике связанных стационарных рядов, Н.В. Смирновым, заложившим основы теории непараметрических методов математической статистики, Ю. В. Линником, обогатившим аналитический аппарат этой науки новыми методами. На основе математической статистики особенно интенсивно разрабатываются статистические методы исследования и контроля массового производства, статистические методы в области физики, гидрологии, климатологии, звёздной астрономии, биологии, медицины и др.

3.1. Предмет и метод математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. При этом статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Статистическое описание совокупности объектов занимает промежуточное положение между индивидуальным описанием каждого из объектов совокупности, с одной стороны, и описанием совокупности по её общим свойствам, совсем не требующим её расчленения на отдельные объекты, — с другой. По сравнению с первым способом статистические данные всегда в большей или меньшей степени обезличены и имеют лишь ограниченную ценность в случаях, когда существенны именно индивидуальные данные (например, учитель, знакомясь с классом, получит лишь весьма предварительную ориентировку о положении дела из одной статистики числа выставленных его предшественником отличных, хороших, удовлетворительных и неудовлетворительных оценок). С другой стороны, по сравнению с данными о наблюдаемых извне суммарных свойствах совокупности статистические данные позволяют глубже проникнуть в существо дела. Например, данные гранулометрического анализа породы (т. е. данные о распределении образующих породу частиц по размерам) дают ценную дополнительную информацию по сравнению с испытанием нерасчленённых образцов породы, позволяя в некоторой мере объяснить свойства породы, условия её образования и прочее.

Метод исследования, опирающийся на рассмотрение статистических данных о тех или иных совокупностях объектов, называется статистическим. Статистический метод применяется в самых различных областях знания. Однако черты статистического метода в применении к объектам различной природы столь своеобразны, что было бы бессмысленно объединять, например, социально-экономическую статистику, физическую статистику, звёздную статистику и тому подобное в одну науку.

Общие черты статистического метода в различных областях знания сводятся к подсчёту числа объектов, входящих в те или иные группы, рассмотрению распределения количеств, признаков, применению выборочного метода (в случаях, когда детальное исследование всех объектов обширной совокупности затруднительно), использованию теории вероятностей при оценке достаточности числа наблюдений для тех или иных выводов и т. п. Эта формальная математическая сторона статистических методов исследования, безразличная к специфической природе изучаемых объектов, и составляет предмет математической статистики.

Связь математической статистики с теорией вероятностей. Связь математической статистики с теорией вероятностей имеет в разных случаях различный характер. Теория вероятностей изучает не любые явления, а явления случайные и именно «вероятностно случайные», т. е. такие, для которых имеет смысл говорить о соответствующих им распределениях вероятностей. Тем не менее, теория вероятностей играет определённую роль и при статистическом изучении массовых явлений любой природы, которые могут не относиться к категории вероятностно случайных. Это осуществляется через основанные на теории вероятностей теорию выборочного метода и теорию ошибок измерений. В этих случаях вероятностным закономерностям подчинены не сами изучаемые явления, а приёмы их исследования.

Более важную роль играет теория вероятностей при статистическом исследовании вероятностных явлений. Здесь в полной мере находят применение такие основанные на теории вероятностей разделы математической статистики, как теория статистической проверки вероятностных гипотез, теория статистической оценки распределений вероятностей и входящих в них параметров и так далее. Область же применения этих более глубоких статистических методов значительно уже, так как здесь требуется, чтобы сами изучаемые явления были подчинены достаточно определённым вероятностным закономерностям. Например, статистическое изучение режима турбулентных водных потоков или флюктуаций в радиоприёмных устройствах производится на основе теории стационарных случайных процессов. Однако применение той же теории к анализу экономических временных рядов может привести к грубым ошибкам ввиду того, что входящее в определение стационарного процесса допущение наличия сохраняющихся в течение длительного времени неизменных распределений вероятностей в этом случае, как правило, совершенно неприемлемо.

Вероятностные закономерности получают статистическое выражение (вероятности осуществляются приближённо в виде частот, а математические ожидания – в виде средних) в силу закона больших чисел.

3.2. Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изменить совокупность однородных объектов относительно некоторого *качественного или количественного признака,* характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т.е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то привести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. Тогда случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью, или простой *выборкой,* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

Замечание

Часто генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Однако если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений или для облегчения теоретических выводов допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправдывается тем, что увеличение объёма генеральной совокупности (достаточно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных выборки.

3.3. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаки генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть *репрезентативной* (представительной).

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается; в предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

3.4. Способы отбора

На практике применяют различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся:
   - простой случайный бесповторный отбор;
   - простой случайный повторный отбор.
2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся:
   - типический отбор;
   - механический отбор;
   - серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности. Осуществить простой отбор можно различными способами. Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают, и наугад вынимают одну карточку; объект имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточку возвращают в пачку и процесс повторяют, т.е. карточки перемешивают, наугад вынимают одну из них и т.д. Так поступают n раз; в итоге получают простую случайную повторную выборку объема n.

Если извлеченные карточки не возвращать в пачку, то выборка является простой случайной бесповторной.

При большом объеме генеральной совокупности описанный процесс оказывается очень трудоемким. В этом случае пользуются готовыми таблицами «случайных чисел», в которых числа расположены в случайном порядке. Для того чтобы отобрать, например, 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд 50 чисел; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если бы оказалось, что случайное число таблицы превышает число N, то такое случайное число пропускают. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбирают не из всей генеральной совокупности, а из каждой её «типической» части. Например, если детали изготовляют на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности. Например, если продукция изготовляется на нескольких машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типический отбор целесообразен.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект. Например, если нужно отобрать 20 % изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь; если требуется отобрать 5 % деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь, и т.д. Следует указать, что иногда механический отбор может не обеспечить репрезентативности выборки. Например, если отбирают каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затупленными резцами. В таком случае следует устранить совпадение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двадцати обточенных.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, если изделие изготовляются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукции только нескольких станков. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

Подчеркнем, что на практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем наблюдалось раз, раз, раз и – объем выборки. Наблюдаемые значения называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом*. Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки /n= – *относительными частотами*.

Статистическими распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Заметим, что в теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

3.5. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака *X*. Введем обозначения: – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньше ; n – общее число наблюдений (объем выборки). Ясно, что относительная частота событий X x равна / n. Если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и относительная частота, т.е. относительная частота / n есть функция от . Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Эмпирической функций распределения (функцией распределения выборки) называют функцию , определяющую для каждого значения относительную частоту событий X x.

Итак, по определению, = / n.

В отличии от эмпирической функции распределения выборки функции распределения генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения.* Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция определяет вероятность событий X x, а эмпирическая функция определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота событий X x, т.е. стремится по вероятности к вероятности этого события. Другими словами, при больших n числа и мало отличаются одно от другого в том смысле, что =1 . Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Такое заключение подтверждается и тем, что обладает всеми свойствами . Действительно, из определения функции вытекают следующие её свойства:

1. значения эмпирической функции принадлежат отрезку ;
2. – неубывающая функция;
3. если – наименьшая варианта, то при ; если – наибольшая варианта, то при .

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

3.6. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки Для построения полигона частот на оси ординат – соответствующие им частоты . Точки соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки Для построения полигона относительных частот . Точки соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

На рис. 1 изображен полигон относительных частот следующего распределения:

X	1,5	3,5	5,5	7,5
W	0,1	0,2	0,4	0,3

В случае *непрерывного признака* целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала – сумму частот вариантов, попавших в i-й интервал.

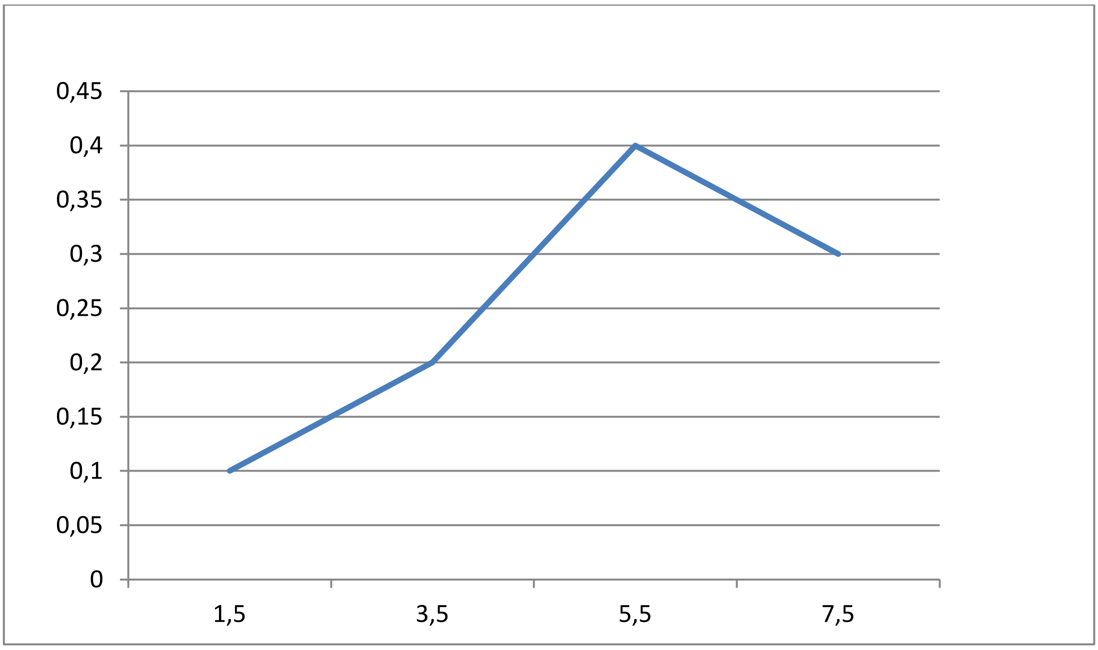


Рис. 1

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению (плотность частоты) (рис. 2).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии h.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h=$ – сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

На рис. 2 изображена частота распределения объема n=100, приведенного в табл. 1.

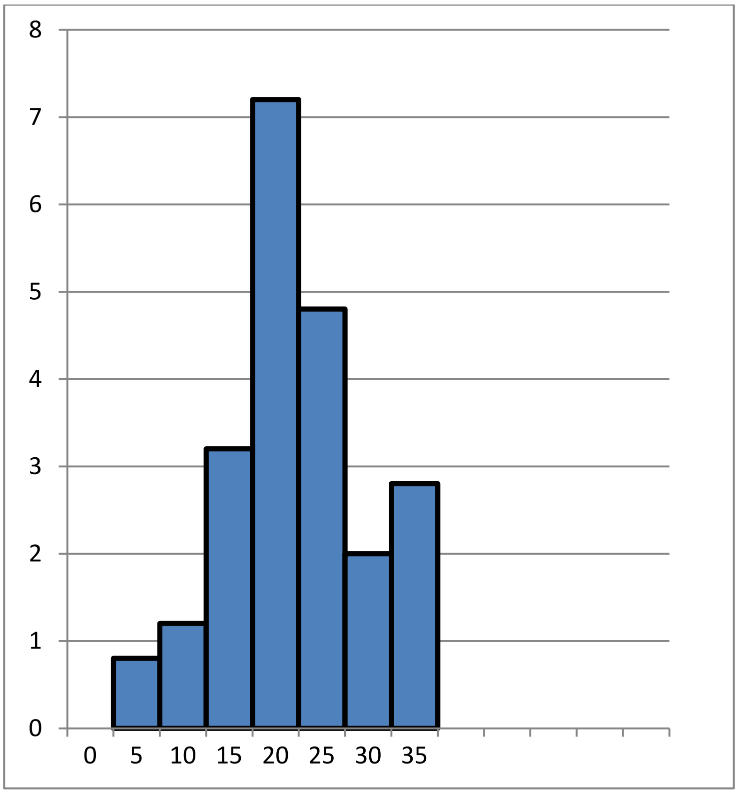


Рис. 2

Таблица 1

Частичный интервал =5	Сумма частот вариант частичного интервала	Плотность частоты
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0
35-40	4	0,8

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии h. Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h=$ – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

3.7. Характеристики вариационного ряда

Генеральная средняя.

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака X.

Генеральной средней называют среднее арифметическое значение признака генеральной совокупности.

Если все значения признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$/N.$$

Если же значения признака имеют, соответственно, частоты , причем

$$/N,$$

т.е генеральная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Если рассматривать обследуемый признак X генеральной совокупности как случайную величину, то математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака:

.

Выборочная средняя

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n.

Выборочной средней называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения признака выборки объема n различны, то

$/n,$

или

$/n,$

т.е. выборочная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Генеральная дисперсия

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику – генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения .

Если все значения признака генеральной совокупности объема N различны, то

$/N.$

Если же значения признака имеют, соответственно, частоты , причем , то

$/N,$

т.е генеральная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Пример. Генеральная совокупность задана таблицей распределения

	2	4	5	6
	8	9	10	3

Найти генеральную дисперсию.

Решение.

Найдем генеральную среднюю:

Найдем генеральную дисперсию:

Генеральное среднее квадратическое отклонение

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из дисперсии:

Мода

Модой называют варианту, которая имеет наибольшую частоту. Например, для ряда

варианта	1	4	7	9
частота	5	2	20	6

мода равна 7.

Медиана

Медианой называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетное, т.е. , то ; при четном

Например, для ряда 2 3 5 6 7 медиана равна 5; для ряда 2 3 5 6 7 9 медиана равна (5+6)/2=5,5.

Размах

Размахом варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантами:

Например, для ряда 1 3 4 5 6 10 размах равен 10-1=9.

Размах является простейшей характеристикой рассеяния вариационного ряда.

Среднее абсолютное отклонение

Средним абсолютным отклонением называют среднее арифметическое абсолютных отклонений:

Например, для ряда

	1	3	6	16
	4	10	5	1

имеем:

Среднее абсолютное отклонение служит для характеристики рассеяния вариационного ряда.

Коэффициент вариации

Коэффициентом вариации называют выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

Коэффициент вариации служит для сравнения величин рассеяния по отношению выборочной средней двух вариационных рядов: тот из рядов имеет наибольшее рассеяние по отношению к выборочной средней, у которого коэффициент вариации больше. Коэффициент вариации – безразмерная величина, поэтому он пригоден для сравнения рассеяний вариационных рядов, варианты которых имеют различную размерность, например, если варианты одного ряда выражены в сантиметрах, а другого ряда – в граммах.

3.8. Статистические оценки параметров

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Естественно, возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение. Например, если наперед известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить (приближенно найти) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение; если же есть основание считать, что признак имеет, например, распределение Пуассона, то необходимо оценить параметр , которым это распределение определяется.

Обычно в распоряжении исследователя изменяются лишь данные выборки, например значения количественного признака полученные в результате наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр. Рассматривая как независимые случайные величины можно сказать, что найти статистическую оценку неизвестного параметра теоретического распределения – это значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра. Например, как будет показано далее, для оценки математического ожидания нормального распределения служит функция (среднее арифметическое наблюдаемых значений признака)

$/n$.

Итак, статической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки

Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям. Ниже указаны эти требования.

Пусть – статистическая оценка неизвестного параметра теоретического распределения. Допустим, что по выборке объема найдена оценка . Повторим опыт, т.е. извлечем из генеральной совокупности другую выборку того же объема и по её данным найдем оценку Повторяя опыт многократно, получим числа как её возможные значения.

Представим себе, что оценка дает приближенной значение с избытком; тогда каждое найденной по данным выборок число $(i=1,2,\dots,k)$ больше истинного значения Ясно, что в этом случае и математическое ожидание (среднее значение) случайной величины больше, чем т.е. Очевидно, что если дает оценку с недостатком, то

Таким образом, использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, привело бы к систематическим (одного знака) ошибкам. По этой причине естественно потребовать, чтобы математическое оценки было равно оцениваемому параметру. Хотя соблюдение этого требования не устранит ошибок (одни значения больше, а другие меньше), однако ошибки разных знаков будут встречаться одинаково часто. Иными словами, соблюдение требований гарантирует защиту от получения систематических ошибок.

Несмещенной называют статическую оценку , математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки т.е.

.

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Однако было бы ошибочным считать, что несмещенная оценка всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Действительно, возможные значения могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т.е. дисперсия может быть значительной. В этом случаем найденная по данным одной выборки оценка, например может оказаться весьма удаленной от среднего значения , а значит, и от самого оцениваемого параметра ; приняв в качестве приближенного значения , мы допустили бы большую ошибку. Если же потребовать, чтобы дисперсия была малой, то возможность допустить большую ошибку будет исключена. По этой причине к статистической оценке предъявляется требование эффективности.

Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.

При рассмотрении выборок большого объема (n велико!) к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при

стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

3.9. Оценка вероятности по относительной частоте. Доверительный интервал

Пусть проводятся n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. В этом случае вероятность того, что относительная частота будет отличаться от вероятности появления события A в каждом испытании по абсолютной величине не больше чем на ε, приближенно равна удвоению значения функции Лапласа :

$$ - \qquad (3.1)$$

где = — .

Интервальной оценкой называют такую оценку, которая определяется двумя числами, являющимися концами интервала, покрывающего параметр статистической совокупности.

Доверительным интервалом называют интервал, который с заданной доверительной вероятностью покрывает оцениваемый параметр статистической совокупности.

Рассматривая в формуле величину p как неизвестную, заменим её на приближенное значение —, полученное по данным выборки, тогда

$$(3.2)$$

Формула служит для оценки вероятностей по относительной частоте.

— – называют нижней доверительной границей, — – верхней доверительной границей, – предельной погрешностью для данной доверительной вероятности

.

Пример. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь не стандартна, равна 0,2. Какова вероятность того, что среди случайно отобранных 600 деталей относительная частота отклонится от вероятности появления нестандартной детали по абсолютной величине не более чем на 0,5?

Решение. По условию n=600, p= 0,2, ε=0,05. Требуется найти

$0{,}2 \le 0{,}05$. Используя формулу (3.1), получим:

Из таблицы значений Лапласа находим значение , равное 0,49888. Значит, – .

Точечные оценки оценивают неизвестное значение параметра одним числом. Недостатком точечных оценок является то, что в них не указывается точность оценки параметра при выборках конечного объёма. Можно лишь сказать, что при $n\to\infty$ оценки параметров сходятся по вероятности к истинным значениям этих параметров. Иногда удобнее оценивать значение параметра с помощью интервала, в который это значение попадает с определённой вероятностью. Пусть θ – оцениваемый параметр, а θ_1 и θ_2 – две функции элементов выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $\theta_1 < \theta_2$. Если выполняется соотношение

$$P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = \gamma, \tag{3.3}$$

то интервал (θ_1, θ_2) называется 100-γ-процентным доверительным интервалом параметра θ.

Другими словами, доверительный интервал – это интервал, в котором с заданной вероятностью находится значение неизвестного параметра. Значения θ_1 и θ_2 называют соответственно нижней и верхней границами доверительного интервала, а γ – доверительной вероятностью или коэффициентом доверия. Неважно, каким образом были получены границы интервала θ_1 и θ_2, важен сам факт выполнения соотношения (3.3). Доверительный интервал даёт определённую информацию о точности оценки данного параметра.

Однако не всегда можно задать неизвестный параметр плотностью распределения вероятностей. Обычно неизвестный параметр является некоторой постоянной величиной. Поэтому при построении доверительного интервала пользуются не условной плотностью распределения $f(\theta \mid \theta^*)$, а условной плотностью $f(\theta^* \mid \theta)$. Рассмотрим один из возможных способов построения доверительного интервала с использованием этой плотности.

Зададим некоторую доверительную вероятность γ и рассмотрим соотношение $P\{| \theta^* - \theta | < \delta\} = \gamma$.

Это соотношение определяет симметричный относительно θ доверительный интервал. Рассматривая это соотношение как уравнение относительно δ, можно найти δ, используя известную плотность $f(\theta^*|\theta)$. Тем самым доверительный интервал будет найден. Действительно, $P\{| \theta^* - \theta| < \delta\} = P\{-\delta < \theta^* - \theta < \delta\} = P\{\theta - \delta < \theta^* < \theta + \delta\} = P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + + \delta\} = \gamma$. Последнее равенство означает, что $\theta \in (\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ с вероятностью γ. Данные соотношения показывают, что при построении доверительного интервала можно исходить как из плотности $f(\theta^* \mid \theta)$, так и из плотности $f(\theta|\theta^*)$. Величина δ определяет ширину доверительного интервала. Для фиксированного значения доверительной вероятности γ и для неизменной плотности $f(\theta^*|\theta)$ эта величина является постоянной. Границы доверительного интервала определяются равенствами $\theta = \theta^* - \delta$ и $\theta = \theta^* + \delta$. Если считать θ и θ^* переменными, то эти два равенства – уравнения прямых линий. Вся область, заключённая между этими прямыми, называется доверительной областью. Располагая доверительной областью, можно определить доверительный интервал для любого значения оценки θ^*.

Границы доверительной области не обязательно прямые линии.

Форма доверительной области определяется структурой самой оценки и, прежде всего, видом закона распределения $f(\theta^*| \theta)$.

Для дискретных случайных величин не всегда можно найти доверительный интервал, имеющий коэффициент доверия, в точности равный γ, если γ задано произвольно. Это связано с тем, что закон распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый характер.

Установление доверительного интервала не означает того факта, что неизвестный параметр принадлежит этому интервалу. Можно лишь утверждать, что с вероятностью γ этот параметр находится внутри интервала. При этом, разумеется, с вероятностью $1 - \gamma$ данный параметр находится вне этого интервала. Доверительную вероятность γ выбирают достаточно большой (γ = 0,9 ÷ 0,99). Следует иметь в виду, что при увеличении доверительной вероятности увеличивается длина доверительного интервала. Таким образом, при выборе значения доверительной вероятности следует придерживаться разумного компромисса. Если есть необходимость повысить доверительную вероятность при сохранении длины доверительного интервала, то нужно увеличить объём выборки.

Оценки параметров в статистике

Пусть количественный признак X генеральной совокупности имеет нормальное распределение, тогда:

1. Если среднее квадратичное отклонение известно, то доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание этого признака с доверительной вероятностью , находим из условия

где − объем выборки, − выборочная средняя арифметическая, t − аргумент функции Лапласа, при котором Φ(t) = –.

При этом называется *точностью оценки*.

2. Если среднее квадратическое отклонение неизвестно, то по данным выборки можно построить случайную величину, имеющую распределение Стьюдента с $k = n$-1степенями свободы, которое определяется только одним параметром n и не зависит от неизвестных параметров . Распределение Стьюдента даже для малых выборок n 30 дает вполне удовлетворительные оценки. Тогда доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание a этого признака с доверительной вероятностью , находим из условия

где S − исправленное среднее квадратическое, − коэффициент Стьюдента, находим по данным и из таблицы значений , где

3. Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение этого признака с доверительной вероятностью , находим из условия

если

если > ,

где – находят по данным и из таблицы значений q, где $q = q($ $)$.

Пример. Из большой партии изготовленных валиков по выборке объёма n=25 найдена выборочная средняя арифметическая диаметра валика, равная 10 мм. Считая, что диаметр валика X – нормально распределенная случайная величина, найдем доверительный интервал, который с доверительной вероятностью 0,99 покрывает неизвестное математическое ожидание a диаметра валика, если генеральное среднее квадратическое отклонение = 0,1 мм.

Решение. Из условия задачи = 0,1, = 10, n = 25, = 0,99. Так как известно, то для оценки параметра a используем условие

Неизвестное значение t получим из условия $\Phi(t)$ Тогда по таблице значений $\Phi(t)$ найдем t = 2,58. Тогда точность оценки будет

Следовательно, искомый доверительный интервал равен:

.

Простейшие приёмы статистического описания

Изучаемая совокупность из n объектов может по какому-либо качественному признаку A разбиваться на классы A_1, A_2, ..., A_r. Соответствующее этому разбиению статистическое распределение задаётся при помощи указания численностей (частот) n_1, n_2, ..., n_r, часто указывают соответствующие относительные частоты (частости) объектов. Однако при больших n такой способ громоздок и в то же время не выявляет отчётливо существенных свойств распределения. При сколько-либо больших n на практике обычно совсем не составляют полных таблиц наблюдённых значений x_i, а исходят во всей дальнейшей работе из таблиц, содержащих лишь численности классов, получающихся при группировке наблюдённых значений по надлежаще выбранным интервалам.

Обычно группировка по 10-20 интервалам, в каждый из которых попадает не более 15-20 % значений x_i, оказывается достаточной для довольно полного выявления всех существенных свойств распределения и надёжного вычисления по групповым численностям основных характеристик распределения (см. о них ниже). Составленная по таким группированным данным гистограмма наглядно изображает распределение. Гистограмма, составленная на основе группировки с маленькими интервалами, обычно многовершинная и не отражает наглядно существенных свойств распределения.

В пределах математической статистики вопрос об интервалах группировки может быть рассмотрен только с формальной стороны: полноты математического описания распределения, точности вычисления средних по сгруппированным данным и так далее.

При изучении совместного распределения двух признаков пользуются таблицами с двумя входами.

Проверка вероятностных гипотез

Выше были изложены лишь некоторые избранные простейшие приёмы статистического описания, представляющего собой довольно обширную дисциплину с хорошо разработанной системой понятий и техникой вычислений. Приёмы статистического описания интересны, однако не сами по себе, а в качестве средства для получения из статистического материала выводов о закономерностях, которым подчиняются изучаемые явления, и о причинах, приводящих в каждом отдельном случае к тем или иным наблюдённым статистическим распределениям.

Все основанные на теории вероятностей правила статистической оценки параметров и проверки гипотез действуют лишь с определённым значимости уровнем $\omega < 1$, т. е. могут приводить к ошибочным результатам с вероятностью $\alpha = 1 - \omega$.

Вопрос о рациональном выборе уровня значимости в данных конкретных условиях (например, при разработке правил статистического контроля массовой продукции) является весьма существенным. При этом желанию применять правила лишь с высоким (близким к единице) уровнем значимости противостоит то обстоятельство, что при ограниченном числе наблюдений такие правила позволяют сделать только очень бедные выводы (не дают возможности установить неравенство вероятностей даже при заметном неравенстве частот и т. д.).

Выборочный метод. В предыдущем разделе результаты наблюдений, используемых для оценки распределения вероятностей или его параметров, подразумевались (хотя это и не оговаривалось) независимыми. Хорошо изученным примером использования зависимых наблюдений может служить оценка статистического распределения или его параметров в «генеральной совокупности» из N объектов по произведённой из неё «выборке», содержащей $n < N$ объектов.

Терминологическое замечание. Часто совокупность n наблюдений, сделанных для оценки распределения вероятностей, также называют выборкой. Этим объясняется, например, происхождение употребленного выше термина «теория малых выборок». Эта терминология связана с тем, что часто распределение вероятностей представляют себе в виде статистического распределения в воображаемой бесконечной «генеральной совокупности» и условно считают, что наблюдаемые n объектов «выбираются» из этой совокупности. Эти представления не имеют отчётливого содержания. В собственном смысле слова выборочный метод всегда предполагает исходную конечную генеральную совокупность.

Примером применения выборочного метода может служить следующий. Пусть в партии из N изделий имеется L дефектных. Из партии отбирается случайным образом $n < N$ изделий (например, $n = 100$ при $N = 10000$). Вероятность того, что число l дефектных изделий в выборке будет равно m, равна

$$P\{l = m\} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Таким образом, l и соответствующая относительная частота $h = l/n$ оказываются случайными величинами, распределение которых зависит от параметра L или, что то же самое, от параметра $H = L/N$. Задача оценки относительной частоты H по выборочной относительной частоте h аналогична задаче оценки вероятности p по относительной частоте h при n независимых испытаниях. Однако в задаче об оценке H формулы сложнее, а отклонения h от H в среднем несколько меньше, чем отклонения h от p в задаче об оценке вероятности (при том же n). Таким образом, оценка доли H дефектных изделий в партии по доле h дефектных изделий в выборке при данном объёме выборки n производится всегда (при любом N) несколько точнее, чем оценка вероятности p по относительной частоте h при независимых испытаниях. Когда $N/n \to \infty$, формулы задачи о выборке переходят асимптотически в формулы задачи об оценке вероятности p.

Дальнейшие задачи математической статистики. Упоминавшиеся выше способы оценки параметров и проверки гипотез основаны на предположении, что число наблюдений, необходимых для достижения заданной точности выводов, определяют заранее (до проведения испытаний). Однако часто априорное определение числа наблюдений нецелесообразно, так как, не фиксируя число опытов заранее, а определяя его в ходе эксперимента, можно уменьшить его математическое ожидание. Сначала это обстоятельство было подмечено на примере выбора одной из двух гипотез по последовательности независимых испытаний. Соответствующая процедура (впервые предложенная в связи с задачами приёмочного статистического контроля) состоит в следующем: на каждом шаге по результатам уже проведённых наблюдений решают а) провести ли следующее испытание, или б) прекратить испытания и принять первую гипотезу, или в) прекратить испытания и принять вторую гипотезу. При надлежащем подборе количеств, характеристик подобной процедуры можно добиться (при той же точности выводов) сокращения числа наблюдений в среднем почти вдвое по сравнению с процедурой выборки фиксированного объёма. Развитие методов последовательного анализа привело, с одной стороны, к изучению управляемых случайных процессов, с другой − к появлению общей теории статистических решений. Эта теория исходит из того, что результаты последовательно проводимых наблюдений служат основой принятия некоторых решений (промежуточных − продолжать испытания или нет, и окончательных − в случае прекращения испытаний). В задачах оценки параметров окончательные решения суть числа (значение оценок), в задачах проверки гипотез − принимаемые гипотезы. Цель теории − указать правила принятия решений, минимизирующих средний риск или убыток (риск зависит и от вероятностных распределений результатов наблюдений, и от принимаемого окончательного решения, и от расходов на проведение испытаний, и т. п.).

3.10. Эмпирические числовые характеристики

Числовые характеристики случайных величин, найденные на основе экспериментальных данных, называются точечными оценками этих характеристик, или эмпирическими характеристиками. Чтобы понять структуру формул, определяющих эмпирические моменты случайной величины, рассмотрим простой вариационный ряд $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Можно формально считать, что рассматривается дискретная случайная величина, имеющая n возможных значений с вероятностями $1/n$. Математическое ожидание этой случайной величины и дисперсия определяются по общему правилу: при вычислении эмпирических характеристик можно делать некоторые предварительные преобразования выборки, которые приводят к упрощению вычислений. При этом опираются на соответствующие свойства математического ожидания, дисперсии.

Постоянная величина C выбирается так, чтобы суммирование оказалось наиболее простым. Преобразование типа $X – C$ означает сдвиг всей выборки по числовой оси на величину C. Дисперсия не изменяется, т.е. $D^*\{X\} = D^*\{X - C\}$. Можно вводить масштабный коэффициент, т.е. рассматривать величину αX вместо величины X, где α – масштабирующий множитель. При вычислениях следует учитывать, что $M\{\alpha X\} = \alpha M\{X\}$, а $D\{\alpha X\} = \alpha 2D\{X\}$. Такие преобразования часто приводят к упрощению вычислений. Если вычисления проводят на ЭВМ, то эти преобразования не целесообразны.

Пример. По данной выборке случайной величины X вычислить все основные эмпирические характеристики: математическое ожидание m_x*, дисперсию D_x*, среднее квадратическое отклонение σ_x*, асимметрию $x\ S_k$ и эксцесс $x\ E_x$.

1,8	1,3	2,3	2,7	4,7	3,4	1,0	0,1	0,2	2,7	0,3	2,1	0,7	3,3	8,0
0,8	4,0	0,2	0,3	0,6	3,0	3,5	4,6	0,5	0,6	4,1	2,7	0,3	0,4	1,2
4,5	1,6	1,5	9,6	4,0	0,3	0,7	7,3	2,5	2,0	3,7	0,1	0,9	4,9	0,1
1,2	0,5	0,0	1,3	2,8	0,6	1,4	0,8	1,1	0,9	0,4	1,2	0,2	0,1	0,7.

Наибольший элемент выборки равен 9,6, наименьший – 0, размах выборки равен 9,6. Учитывая, что элементы выборки распределены не равномерно на этом интервале, ширину первых пяти частичных интервалов выберем равной 0,6, двух следующих – 1,2, а последнего интервала – 4,2.

Составим интервальный вариационный ряд, подсчитав число элементов выборки, попавших в каждый частичный интервал. Если значение элемента совпадает с левой границей частичного интервала, то его следует относить к данному интервалу. Значение, совпадающее с правой границей, не включается в данный интервал. В последний интервал включается и то значение, которое совпадает с его правой границей.

Вычисления проводятся в таблице, содержащей вариационный ряд и строки, необходимые для вычисления начальных моментов.

Точечные оценки параметров. Свойства эмпирических характеристик

Требуется оценить некоторый параметр θ, связанный со случайной величиной X, используя выборку $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Пусть в качестве такой оценки выбрана однозначная функция от элементов выборки $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для конкретных значений элементов выборки эта оценка представляет собой одно число. Такие оценки называются точечными оценками параметров, так как на числовой оси они изображаются одной точкой. Задача состоит в том, чтобы найти такую оценку θ^*, которая была бы в определённом смысле наиболее близкой к оцениваемому параметру θ.

Как функция элементов выборки, оценка θ^* является случайной величиной. Определим её математическое ожидание. Оно, очевидно, будет зависеть от истинных числовых характеристик изучаемой величины X и от объёма выборки n. Пусть получено равенство

$$M\{\theta^*\} = \theta + \phi(\theta, n),$$

где $\phi(\theta, n)$ – некоторая функция истинного значения параметра θ. Желательно, чтобы функция $\phi(\theta, n)$ равнялась нулю. Это бы означало, что математическое ожидание оценки параметра равно истинному значению этого параметра. Оценка θ^*, обладающая таким свойством, называется несмещённой оценкой параметра θ. Если $\phi(\theta, n) \neq 0$, то θ^* называется смещённой оценкой параметра θ, а сама функция $\phi(\theta, n)$ называется смещением.

Если при $n \to \infty$ оценка параметра сходится по вероятности к истинному значению параметра, то оценка θ^* называется состоятельной оценкой параметра θ. Для дальнейшего изучения свойств оценки θ^* можно определить её дисперсию, которая также окажется функцией от истинных числовых характеристик изучаемой случайной величины X и от объёма выборки n, т.е. $D\{\theta^*\} = D(\theta, n)$. Если оценка состоятельная, то $D(\theta, n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Различные оценки одного и того же параметра будут иметь разные дисперсии. Та из них, которая имеет наименьшую дисперсию, называется эффективной оценкой данного параметра.

Вычисление дисперсии величины не представляет принципиальных трудностей, но оказывается достаточно громоздким. Вычисления показывают, что эта дисперсия пропорциональна величине 1/n и, следовательно, стремится к нулю при n→∞. Таким образом, величина является несмещённой и состоятельной оценкой истинной дисперсии Dx. Её рекомендуется использовать вместо оценки Dx^*, особенно при малых значениях n.

Свойством несмещённости обладают только первые два эмпирических момента. Моменты более высоких порядков ни при каких весовых коэффициентах суммирования таким свойством не обладают, т. е. они всегда имеют неустранимое смещение.

Рассмотрим кратко методы нахождения оценок. Один из методов предполагает задание структуры оценки с точностью до неизвестных параметров, которые определяются из условия минимума дисперсии оценки. Примером применения этого метода является определение оценки математического ожидания случайной величины при неравноточных измерениях. Пусть по выборке $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ требуется оценить параметры m_x и D_x, причём измерения x_i были произведены с разной точностью, т.е.

$$M\{x_i\} = m_x,\ M\{(x_i - m_x)^2\} = \sigma_i^{\ 2},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Чем меньше дисперсия измерения, тем больше доверия этому измерению, т.е. измерения должны учитываться оценкой с разными весовыми коэффициентами.

Второй метод нахождения оценок – метод моментов. В этом методе используются теоретические формулы, которые связывают оцениваемый параметр с моментами случайной величины. Для получения оценки неизвестного параметра нужно в соответствующую формулу подставить вместо теоретических моментов эмпирические.

Предположим, например, что случайная величина X распределена по экспоненциальному закону: $f(x) = \lambda\exp\{-\lambda x\}$, где $\lambda > 0$, $x > 0$, причём параметр λ неизвестен. Требуется оценить этот параметр. Пусть по выборке X_n получена оценка математического ожидания m_x* исследуемой случайной величины. С другой стороны, известна формула, связывающая параметр λ экспоненциального распределения с математическим ожиданием m_x: $\lambda = 1/m_x$. Подставляя в эту формулу вместо m_x оценку m_x*, получим оценку параметра λ: $\lambda^* = 1/m_x^*$. В некоторых случаях оценки, полученные этим простым способом, совпадают с оценками, полученными с помощью других, более сложных методов.

Третий метод – метод наибольшего правдоподобия. Этот метод требует знания закона распределения случайной величины с точностью до неизвестных параметров. Предположим, что плотность распределения вероятностей величины X равна $fX(x, \theta)$, где θ – неизвестный параметр, который требуется оценить. Тогда каждое измерение x_i из выборки $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ будет иметь плотность распределения $f(x, \theta)$. Элементы выборки x являются статистически независимыми, поэтому n-мерная плотность распределения вероятностей выборки равна произведению одномерных плотностей.

Эту плотность называют функцией правдоподобия. Можно предполагать, что в выборке чаще встречаются те возможные значения величины X, для которых плотность распределения имеет относительно большие значения. Из этого следует, что в качестве оценки параметра θ логично взять такое значение, которое максимизирует функцию правдоподобия.

Вопросы

1. Что называют относительной частотой значения признака?
2. Дайте определение характеристикам вариационного ряда.
3. Дайте определение эмпирической функции распределения относительных частот.
4. Что такое доверительный интервал, доверительные границы?
5. Как определяется точность оценки?

Упражнения

1. Напряжение (X) в электрической сети зависит от подключаемой к ней нагрузки, которая имеет случайный характер. Для изучения колебаний напряжения в сети в течение определённого периода времени было сделано 30 измерений с точностью до десятых долей вольта. Был получен следующий вариационный ряд:

215,0	215,5	215,9	216,4	216,8	217,3	217,5	218,1	218,6	218,9
219,2	219,4	219,7	219,8	220,0	220,2	220,3	220,5	220,7	220,9
221,3	221,6	221,9	222,3	222,6	222,9	223,4	224,0	224,5	225,0.

Построить график эмпирической функции распределения вероятностей случайной величины X, найти вероятность того, что напряжение в сети будет находиться в интервале от 219 до 221 вольт.

2. Из партии электролампочек выбрано и проверено 1000 электрических лампочек. Относительная частота появления нестандартной лампочки оказалась равной 0,15. Найдите 95 %-ный доверительный интервал для вероятности появления нестандартной лампочки при ее извлечении из данной партии.

3. Игральная кость подбрасывается 320 раз. Какова вероятность, что относительная частота появления пяти очков на верхней грани кости отклонится от вероятности появления этого события в одном испытании по абсолютной величине не более чем на 0,03?

Список литературы

1. *Ватутин В.А. и др*. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. – М.: Дрофа, 2003.
2. *Вентцель Е.С*. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973.
3. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А*. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Академия, 2003.
4. *Виленкин Н.Я., Потапов В.Г*. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. – М.: Просвещение, 1979.
5. *Гмурман В.Е*. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 2003.
6. *Гмурман В.Е*. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2003.
7. *Гнеденко Б.В*. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1988.
8. *Кремер Н.Ш*. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Юнити, 2001.
9. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2006.

Учебное издание

Игорь Васильевич Яковлев, Елена Николаевна Яковлева

Теория вероятностей и математическая статистика

Редактор И.А. Вейсиг

Корректура авторов

Компьютерная верстка

Подписано в печать 4.10.2012 г. Формат 60×84/16

Бумага офсетная Печать плоская

Усл. -печ. л. 3,5 Тираж 100 экз.

Заказ 9577

Редакционно-издательский отдел

Библиотечно-издательского комплекса

Сибирского федерального университета

660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79

Тел/факс (391)206-21-49, e-mail: rio@lan.krasu.ru