МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.С. АХТАМОВА, Л.Н. БАДУЛЕНКО

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университету и техническому образованию в качестве учебно–методического пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 – «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», (Профиль подготовки: 44.03.05.34 «Математика и физика»). (Протокол № 690 от 28.03.2018 г.).

КРАСНОЯРСК 2018

УДК 517.53/.55
ББК 22.1161.5
А95

Рецензенты:

В.А. Адольф – канд. физ.– мат. наук, доктор педагогических наук, профессор КГПУ им. В.П. Астафьва, г. Красноярск;

И.Ю. Степанова – канд. пед. наук, доцент кафедры информационных технологий обучения и непрерывного образования института педагогики, психологии и социологии СФУ

Ахтамова С.С.
А95 Теория функций комплексного переменного: учеб.–метод. пособие / С.С.Ахтамова, Л.Н. Бадуленко. – Красноярск: Сиб. федерал. у–т, 2018.– 80 с.

ISBN 978–5–7638–3925–8

Пособие содержит основные разделы предмета «Теория функций комплексного переменного» и предназначено для студентов изучающих математику в качестве основной дисциплины, обучающихся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями)», профиль 44.03.05.34 «Математика и физика». Включает в себя лекционный курс с множеством прикладных наработок авторов и дополнительные методический разделы по предмету.

ISBN 978–5–7638–3925–8

## ВВЕДЕНИЕ

Теория функций комплексной переменной (ТФКП) является одним из заключительных разделов общего курса высшей математики, изучаемой студентами–математиками. Фундаментальные понятия её разделов находят широкое применение в большинстве разделов современной математики и физики. Она связана с изучением аналитических функций. В данном пособии важнейшие понятия математического анализа функций действительной переменной, такие как предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость, ряд и его сходимость формулируются для функций комплексной переменной со своими свойствами. При этом возникают новые интересные аспекты, связанные с конформными отображениями и методами вычисления определенных интегралов от функций действительной переменной

Курс «Теория функций комплексной переменной» направлен на развитие методов исследования функций в комплексной области и применение их к задачам математического анализа. Формулируются базовые понятия математического анализа, такие как предел, непрерывность, производная, интеграл и ряд для комплексных функций, зависящих от комплексной переменной. Материалы данного курса используются при изучении дисциплин «Методы математической физики», «Классическая механика», «Электродинамика», «Квантовая механика», а также спецкурсов по теоретической физике. Знание методов теории функций комплексной переменной является необходимым элементов математического образования современного ученого.

Поэтому цель пособия – описание основных понятий теории функций комплексной переменной, формирование представлений о её методах и взаимосвязях с действительным анализом, а также с другими математическими дисциплинами.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи:

– сформировать представления об аналитических функциях, конформном отображении, комплексном интеграле, аналитическом продолжении, римановой поверхности, рядах аналитических функций;

– выработать умения и навыки дифференцирования функций комплексной переменной, построения конформных отображений простейших областей, вычисления комплексных интегралов, разложения функций в ряд Тейлора;

– научить применять методы комплексного анализа для вычисления определённых и несобственных интегралов и решения других задач алгебры и анализа;

– познакомить с современными направлениями развития комплексного анализа на основе понятий теории функций действительной переменной.

# 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## 1.1. Алгебраическая форма комплексного числа

**Определение 1**.

**Комплексным числом** $z$ будем называть упорядоченную пару действительных чисел $x$, $y$, записанную в форме $z = x + i\cdot y$, где $i$ – новый объект ("мнимая единица"), для которого при вычислениях полагаем $i^2 = -1$ (рис.1).

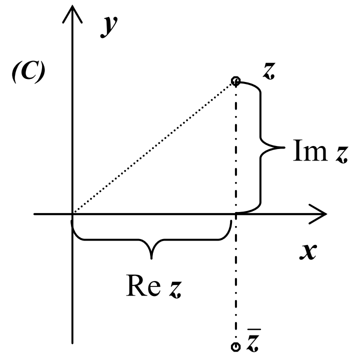



Рис. 1

Число $x$ называется действительной частью числа $z$, это обозначается так: $x = \text{Re}\, z$. Число $y$ называется мнимой частью числа $z$: $y = \text{Im}\, z$.

**Определение 2**. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i\cdot y_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{(x_1 = x_2)\Lambda(\, y_1 = y_2)\}$.

Множество комплексных чисел неупорядочено, т.е. для комплексных чисел не вводятся отношения "больше" или "меньше".

Геометрически комплексное число $z = x + i\cdot y$ изображается как точка с координатами ($x$, $y$) на плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью $C$.

**Определение 3**. Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i\cdot y_2$ называется комплексное число $z$, определяемое соотношением $z =(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\cdot i$, т.е. $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}\, z_1 + \text{Re}\, z_2$, $\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im}\, z_1 + \text{Im}\, z_2$.

Это означает, что геометрически комплексные числа складываются как векторы на плоскости, покоординатно.

**Определение 4**. Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i\cdot y_2$ называется комплексное число $z$, определяемое соотношением

$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\cdot i$,

т.е. $\text{Re}(z_1\, z_2) = \text{Re}\, z_1\, \text{Re}\, z_2 - \text{Im}\, z_1\, \text{Im}\, z_2$; $\text{Im}(z_1\, z_2) = \text{Re}\, z_1\, \text{Im}\, z_2 + \text{Im}\, z_1\, \text{Re}\, z_2$.

Для двух комплексных чисел с нулевой мнимой частью $z_1 = x_1 + 0\cdot i$ и $z_2 = x_2 + 0\cdot i$ получим:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (0 + 0)\cdot i$ , $z_1\, z_2 = (x_1 \cdot x_2 - 0\cdot 0) + (0\cdot x_1 + 0\cdot x_2)\, i$, т.е. для множества комплексных чисел с нулевой мнимой частью операции сложения и умножения не выводят за пределы этого множества. Отождествим каждое такое число с действительным числом $x$, равным действительной части комплексного числа, т.е. будем считать, что $z = x + 0i \equiv x$. Теперь действительные числа – подмножество множества комплексных чисел $\boldsymbol{C}$. Далее, числа с нулевой действительной частью, т.е. числа вида $z = 0 + y\cdot i = y\cdot i$, называются **мнимыми** числами. Мнимое число с единичной мнимой частью будем записывать просто как $\boldsymbol{i}$: $0 + 1\cdot i = i$; квадрат этого числа, по определению умножения, равен $(-1)$.

Легко убедиться, что операция **сложения** на множестве комплексных чисел $\boldsymbol{Z}$ имеет **свойства:**

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3) Существует такой элемент $0 \in \boldsymbol{Z}$, что $0 + z = z$ для $\forall z \in \boldsymbol{Z}$.

Этот элемент – число $0 = 0 + 0\cdot i$.

4) Для каждого элемента $z \in \boldsymbol{Z}$ существует такой элемент $-z$, что $z + (-z) = 0$. Этот элемент число $(x - i\cdot y)$. Сумма чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $-z_2 = -x_2 - iy_2$ и называется разностью чисел $z_1 = x_1 + i\cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i\cdot y_2$: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i\cdot(y_1 - y_2)$.

Прежде чем определить операцию деления комплексных чисел, введём понятия сопряжённого числа и модуля комплексного числа.

**Определение 5**. Число $\bar{z} = x - yi$ называется числом, **сопряжённым к** числу $z = x + iy$. Часто сопряжённое число обозначается также символом $z^*$.

**Определение 6**. Действительное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** комплексного числа $z = x + i\cdot y$.

Геометрически модуль числа $z$ – длина радиуса вектора точки $z$; модуль разности чисел $z_1$ и $z_2$ равен расстоянию между этими точками: $|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Найдём произведение сопряжённых чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = \big(x \cdot x - y \cdot (-y)\big) + \big(x \cdot (-y) + y \cdot x\big)i = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Таким образом, $z \cdot \bar{z}$ всегда неотрицательное действительное число, причём $z \cdot \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Для нахождения частного комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2} (z_2 \neq 0)$ домножим числитель и знаменатель на число, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i) \cdot (x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

Для операции **умножения** справедливы **свойства:**

1) $z_1 z_2 = z_2 z_1$
2) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
3) Произведение числа $1 = 1 + 0i \in \boldsymbol{Z}$ на любое число $z \in \boldsymbol{Z}$ равно $z$

4) Для каждого числа $z \in \boldsymbol{Z}, z \neq 0$ существует такое число $z^{-1} \in \boldsymbol{Z}$, что $z \cdot z^{-1} = 1$, $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \dfrac{x - iy}{|z|^2}$.

Операции **сложения и умножения** подчиняется закону **дистрибутивности**: $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1\, z_3 + z_2\, z_3$.

Операция **сопряжения** имеет следующие свойства**:**

$\bar{\bar{z}} = z$; $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z$; $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}z \cdot i$; $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

**Примеры** выполнения арифметических действий с комплексными числами: пусть $z_1 = 2 - 3 \cdot \boldsymbol{i}$, $z_2 = 4 + 5 \cdot \boldsymbol{i}$.

Тогда $z_1 + z_2 = (2 - 3\boldsymbol{i}) + (4 + 5\boldsymbol{i}) = (2 + 4) + (-3 + 5) \cdot \boldsymbol{i} = 6 + 2 \cdot \boldsymbol{i}$;

$z_1 z_2 = (2 - 3 \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (4 + 5 \cdot \boldsymbol{i}) = \left(2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 \cdot i^2\right) + \left(2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4\right) i = 23 - 2i$;

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2 - 3\boldsymbol{i}}{4 + 5\boldsymbol{i}} = \dfrac{(2 - 3\boldsymbol{i})(4 - 5\boldsymbol{i})}{(4 + 5\boldsymbol{i})(4 - 5\boldsymbol{i})} = \dfrac{(8 - 15) + (-12 - 10)\boldsymbol{i}}{16 + 25} = -\dfrac{7}{41} - \dfrac{22}{41}\boldsymbol{i}$.

## 1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $z = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{y}$ называется алгебраической формой комплексного числа. Изобразим число $z$ как точку на плоскости с декартовыми координатами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$. Если теперь перейти к полярным координатам $\rho, \varphi$, то $\boldsymbol{x} = \rho \cos\varphi$, $\boldsymbol{y} = \rho \sin\varphi$, $|z| = \rho$, поэтому $z = |z|(\cos\varphi + \boldsymbol{i} \sin\varphi)$. Угол $\varphi$ называется аргументом комплексного числа $z$ и обозначается $\arg z$: $\varphi = \arg z$. Аргумент комплексного числа определён неоднозначно (с точностью до слагаемых, кратных $2\pi$): если, например, $\varphi = \pi/6$, то значения $\varphi$, равные $\pi/6 \pm 2\pi$, $\pi/6 \pm 4\pi$ и т.д., тоже будут соответствовать числу $z$; значение аргумента, удовлетворяющее условиям $-0 < \arg z \leq \pi$, называют главным; для обозначения всех значений аргумента комплексного числа $z$ применяется символ $\mathrm{Arg}\, z$: $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Запись комплексного числа в виде:

$z = |z|\left(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)\right) = |z|\left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right)$ – называется тригонометрической формой комплексного числа.

Число $0 = 0 + 0\boldsymbol{i}$ – единственное число, модуль которого равен нулю; аргумент для этого числа **не определён**.

Переход от тригонометрической формы к алгебраической очевиден: $x = |z|\cos\varphi,\ x = |z|\sin\varphi$. Формулы для перехода от алгебраической формы к тригонометрической таковы:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}(y/x),\ x > 0; \\ \mathrm{arctg}(y/x) + \pi,\ x < 0, y > 0; \\ \mathrm{arctg}(y/x) - \pi,\ x < 0, y < 0; \\ \pi/2,\ x = 0, y > 0; \\ -\pi/2,\ x = 0, y < 0; \\ 0, \text{если } x > 0, y = 0; \\ \pi, \text{если } x < 0, y = 0; \\ \text{не определён, если } x =,\ y = 0. \end{cases}$$

При решении задач на перевод алгебраически заданного комплексного числа в тригонометрическую форму следует изобразить это число на комплексной плоскости ***C*** и, таким образом, контролировать полученный результат.

**Примеры**. Записать в тригонометрической форме числа: $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -1 - \boldsymbol{i}$, $z_3 = \sqrt{3} - \boldsymbol{i}$, $z_4 = -i$, $z_5 = -5 - 3\boldsymbol{i}$.

**Решение.**

| | |
|---|---|
| $z_1 = 2(\cos(2\pi/3) + \boldsymbol{i}\sin(2\pi/3))$ | $z_2 = \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + \boldsymbol{i}\sin(-3\pi/4))$ |
| $z_3 = 2(\cos(-\pi/6) + \boldsymbol{i}\sin(-\pi/6))$ | $z_4 = \cos(-\pi/2) + \boldsymbol{i}\sin(-\pi/2)$ |
| $z_5 = \sqrt{34}\left[\cos\left(\mathrm{arctg}(3/5) - \pi\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\mathrm{arctg}(3/5) - \pi\right)\right]$ | |

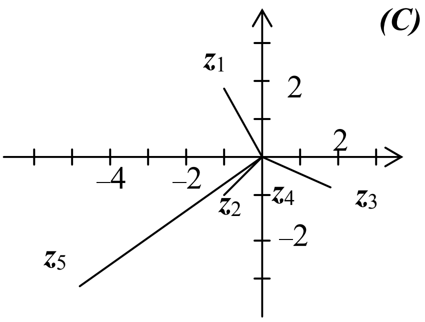



Рис.2

В тригонометрической форме легко интерпретируются такие действия, как умножение, деление, возведение в степень. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_2)$.

Тогда $z_1 \cdot z_2 = \left[|z_1|(\cos\varphi_1 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_1)\right] \cdot \left[|z_2|(\cos\varphi_2 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_2)\right] =$

$= \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \cdot \left[(\cos\varphi_1 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_2)\right] = \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \times$

$$\times\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right]=$$
$$\left[|z_1|\cdot|z_2|\right]\cdot\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_2+\varphi_2)\right]$$

**Вывод:** при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, аргументы складываются.

Рассмотрим деление комплексных чисел. Очевидно, если $z_2\neq 0$, $z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то сопряженное число равно $\bar{z}_2=|z_2|(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=|z_2|(\cos(-\varphi_2)+i(-\sin\varphi_2))$, т.е. операция сопряжения не меняет модуль числа, и изменяет знак его аргумента, поэтому

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{|z_1|\cdot|\bar{z}_2|\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)}{|z_2|\cdot|\bar{z}_2|}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

**Вывод:** при делении комплексных чисел их модули делятся друг на друга, аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

### 1.3. Показательная форма комплексного числа

Ряд Маклорена для функции $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ сходится к функции при любом действительном $x$. Формально запишем это разложение для $x=i\varphi$: $e^{i\varphi}=1+i\varphi+\frac{(i\varphi)^2}{2!}+\frac{(i\varphi)^3}{3!}+\frac{(i\varphi)^4}{4!}+\frac{(i\varphi)^5}{5!}\ldots+\frac{(i\varphi)^n}{n!}+\ldots$

Степени числа $i$: $i^2=-1$; $i^3=i^2\cdot i=-i$; $i^4=i^2\cdot i^2=1$; $i^5=i^4\cdot i=i$; $i^6=i^2=-1$; далее значения степеней повторяются (для отрицательных степеней это тоже справедливо: $i^{-1}=-i$; $i^{-2}=-1$; $i^{-3}=i$; $i^{-4}=1$ и т.д.). Поэтому

$$e^{i\varphi}=1+i\varphi-\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{i\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{i\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^6}{6!}\ldots+i^n\frac{\varphi^n}{n!}+\ldots=$$
$$=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+\ldots\right).$$

В круглых скобках стоят ряды для $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, которые сходятся для любого действительного $\varphi$; поэтому получаем $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Это равенство называется **формулой Эйлера**. Теперь любое комплексное число $z$ можно представить как $z=|z|e^{i\cdot\mathrm{Arg}\,z}=|z|e^{i\cdot\arg z}=|z|e^{i\cdot\varphi}$; эта форма записи называется **показательной**. В этой форме умножение и деление комплексных чисел выполняются и интерпретируются так же легко, как и в тригонометрической:

$$z_1\cdot z_2=\left[|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}\right]\cdot\left[|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}\right]=\left[|z_1|\cdot|z_2|\right]\cdot e^{i(\varphi_2+\varphi_2)}=\left[|z_1|\cdot|z_2|\right]\cdot\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_2+\varphi_2)\right]$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Индукцией по показателю степени $n$ легко доказывается **формула Муавра**: если $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то $z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, или, в показательной форме, $z^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}$. С помощью этой формулы легко вычислять высокие степени комплексных чисел и выводить формулы для синусов и косинусов кратных углов: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))}{\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))}\right)^{20} =$

$$= \frac{2^{20}}{2^{10}}\frac{e^{i\cdot 20\pi/3}}{e^{i\cdot(-5\pi)}} = 2^{10}\frac{e^{i\cdot(6\pi+2\pi/3)}}{e^{i\cdot\pi}} = 1024\frac{e^{i\cdot 2\pi/3}}{-1} = -1024\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512(1-i\sqrt{3});$$

в качестве второго примера выведем формулы для $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$: если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то, по формуле бинома Ньютона,

$$z^5 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = C_5^0\cos^5\varphi + C_5^1\cos^4\varphi\cdot i\sin\varphi + C_5^2\cos^3\varphi\cdot i^2\sin^2\varphi + C_5^3\cos^2\varphi\cdot i^3\sin^3\varphi +$$
$$+ C_5^4\cos\varphi\cdot i^4\sin^4\varphi + C_5^5\cdot i^5\sin^5\varphi =$$
$$= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi =$$
$$= (\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi) + i(5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi)$$

С другой стороны, $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$, поэтому, приравнивая действительные и мнимые части этих двух представлений пятой степени числа $z$, получим $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$,
$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$ (рис.3)

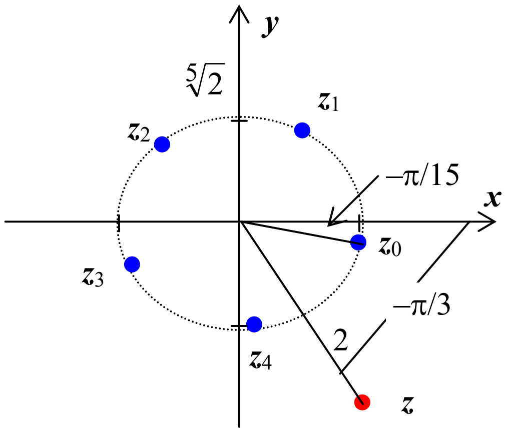



Рис.3

В заключение рассмотрим операцию извлечения корня ***n***–й степени из комплексного числа ***z***. По определению, любое число ***w***, такое, что $w^n = z$, называется корнем ***n***–й степени из числа ***z***. Пусть $z = |z|(\cos\operatorname{Arg} z + i\sin\operatorname{Arg} z)$, $w = |w|(\cos\arg w + i\sin\arg w)$. Тогда $w^n = |w|^n(\cos n\arg w + i\sin n\arg w) = |z|(\cos\operatorname{Arg} z + i\sin\operatorname{Arg} z)$. Числа равны, если равны их модули и аргументы, поэтому $|w|^n = |z|$, $n\arg w^n = \operatorname{Arg} z$, откуда $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, $\arg w = \frac{1}{n}\operatorname{Arg} z = \frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)$, при этом ***n*** различных значения корня ***n***–й степени из числа ***z*** получаются при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

**Пример**. Найти все значения $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$. Число $z = 1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме равно $z = 2(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$. Все пять значений корня даются формулой $z_k = \sqrt[5]{2}(\cos(-\pi/15 + 2\pi k/5) + i\sin(-\pi/15 + 2\pi k/5))$ при $\boldsymbol{k}$ = 0, 1, 2, 3, 4.

Они расположены на окружности радиуса $\sqrt[5]{2}$. Значение, соответствующее $\boldsymbol{k}$=0, имеет аргумент $(-\pi/3):5 = -\pi/15$, остальные расположены с интервалом по $\varphi$, равным $2\pi/5$, в вершинах правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность.

### 1.4. Сфера Римана. Бесконечно удалённая точка

Риман предложил применять для геометрического представления комплексной плоскости сферу. Вместе с координатами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в плоскости $\boldsymbol{C}$ рассмотрим трёхмерную прямоугольную систему координат $\xi, \eta, \varsigma$ такую, что оси $\xi, \eta$ совпадают с осями $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, а ось $\varsigma$ им перпендикулярна. Поместим в это пространство сферу единичного диаметра $\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2 = \varsigma$, касающуюся плоскости $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в начале координат своим южным полюсом. Каждой точке $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy} \in \boldsymbol{C}$ поставим в соответствие точку $\boldsymbol{P}(\xi, \eta, \varsigma)$ сферы, получающуюся при пересечении луча, проведённого через точку $\boldsymbol{z}$ и северный полюс $\boldsymbol{N}$ сферы, со сферой. Очевидно, соответствие $\boldsymbol{z} \leftrightarrow \boldsymbol{P}$ взаимно однозначно отображает плоскость $\boldsymbol{C}$ на сферу с единственной исключённой точкой – северным полюсом $\boldsymbol{N}$. Такое соответствие $\boldsymbol{z} \leftrightarrow \boldsymbol{P}$ называется **стереографической проекцией** (рис.4).

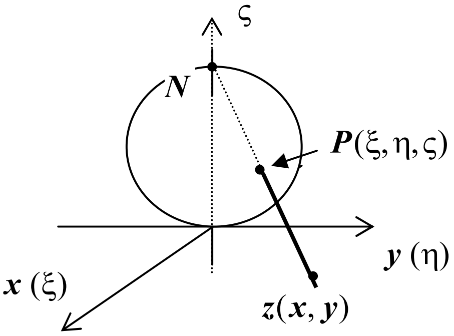



Рис.4

Пополним комплексную плоскость $\boldsymbol{C}$ новым объектом – бесконечно удалённой точкой $\boldsymbol{z} = \infty$, которую будем считать прообразом северного полюса $\boldsymbol{N}$ при стереографической проекции. Такую пополненную плоскость будем называть замкнутой комплексной плоскостью и обозначать $\overline{\boldsymbol{C}}$. Если не прибегать к стереографической проекции, то несобственная точка $\boldsymbol{z} = \infty$ рассматривается как единственная предельная точка любой последовательности $\{\boldsymbol{z_n}\}$ комплексных чисел таких, что $|\boldsymbol{z_n}| \underset{\boldsymbol{n}\to\infty}{\to} \infty$, независимо от того, по какому пути точки последовательности удаляются от начала координат.

### 1.5. Задание кривых и областей на комплексной плоскости

Так как модуль разности $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ равен расстоянию между точками $z$ и $z_0$, то:

1) $|z - z_0| = R$ – уравнение окружности радиуса $R$ с центром в точке $z_0$;

2) $|z - z_0| \le R$ – замкнутая область, ограниченная этой окружностью, т.е. круг радиуса $R$ с центром в точке $z_0$, включающий свою границу;

3) $|z - z_0| > R$ – открытая область, состоящая из точек, находящихся вне круга радиуса $R$ с центром в $z_0$; круг не включен в эту область;

4) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ – эллипс, построенный на точках $z_1$ и $z_2$, рассматриваемых как фокусы (большая полуось равна 2a, малая – $\sqrt{a^2 - \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}}$) (рис.5). Области, лежащие внутри и вне эллипса, описываются соответствующими неравенствами;

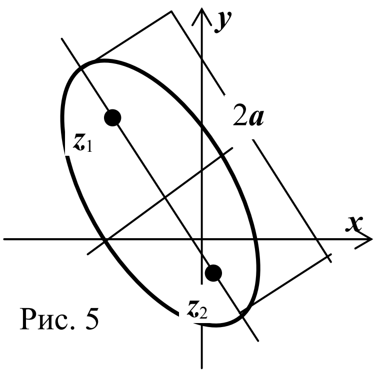


Рис. 5

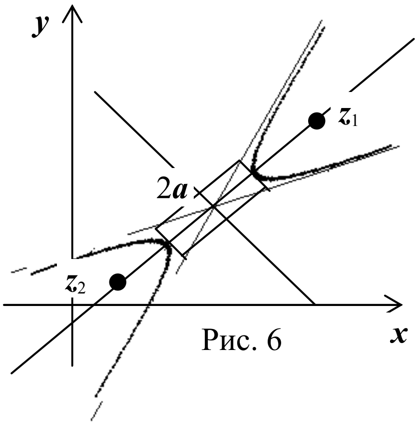


Рис. 6

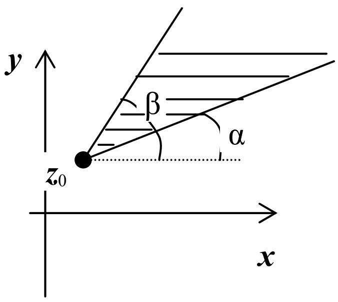


Рис. 7

5) $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$ – гипербола с фокусами в точках $z_1$ и $z_2$ расстояние между фокусами $2c$ = $|z_1 - z_2|$, между вершинами $2a$ (рис.6). Уравнение $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ даёт ветвь гиперболы, расположенную ближе к фокусу $z_2$; неравенство $|z - z_2| - |z - z_1| > 2a$ – открытую область, содержащую фокус $z_1$ и ограниченную соответствующей ветвью гиперболы;

6. $\operatorname{Re} z = a$ (или $x = a$) – прямая, параллельная оси $Oy$. $\operatorname{Re} z \ge a$ – область, лежащая справа от этой прямой (включая прямую); $\operatorname{Re} z < a$ – область слева от прямой (прямая не включена в область). $\operatorname{Im} z = b$ (или $y = b$) – прямая параллельная оси $Ox$; $\operatorname{Im} z \ge b$, $\operatorname{Im} z < b$ – области, расположенные выше и ниже этой прямой;

7. $\arg z = \alpha$ – луч, выходящий из точки $z = 0$ под углом α к оси $Ox$. $\arg(z - z_0) = \alpha$ – луч, выходящий из точки $z_0$ под углом α к оси $Ox$. $\alpha \le \arg(z - z_0) \le \beta$ – область, расположенная между лучами, выходящими из точки $z_0$ (рис. 7).

**Пример** построения области на комплексной плоскости, заданной системой неравенств:

Построить область:

$$D:\begin{cases} \operatorname{Im}\dfrac{1}{\overline{z-3}} \ge \dfrac{1}{6}, \\ |z+\sqrt{2}|-|z-\sqrt{2}| \ge 2, \\ \operatorname{Im} z > 1. \end{cases}$$

Определим, какая область даётся неравенством $\operatorname{Im}\dfrac{1}{\overline{z-3}} \ge \dfrac{1}{6}$:

$$\frac{1}{\overline{z-3}} = \frac{1}{\overline{x+iy-3}} = \frac{1}{\overline{(x-3)+iy}} = \;= \frac{1}{(x-3)-iy} = \frac{(x-3)+iy}{(x-3)^2+y^2};\;\; \operatorname{Im}\frac{1}{\overline{z-3}} = \frac{y}{(x-3)^2+y^2},$$

поэтому $\operatorname{Im}\dfrac{1}{\overline{z-3}} \ge \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{(x-3)^2+y^2} \ge \dfrac{1}{6} \Rightarrow 6y \ge (x-3)^2+y^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-3)^2 \le 9$ – замкнутый круг радиуса 3 с центром в точке $z_0 = 3+3i$. Неравенство $|z+\sqrt{2}|-|z-\sqrt{2}| \ge 2$ даёт область, находящуюся справа от правой ветви гиперболы с полюсами $z = \pm\sqrt{2}$, включающую эту ветвь. Параметры гиперболы: $c=\sqrt{2}, a=1 \Rightarrow b=1$. Последнее неравенство определяет полуплоскость $y>1$. В результате получаем заштрихованную область, изображённую на рис.8.

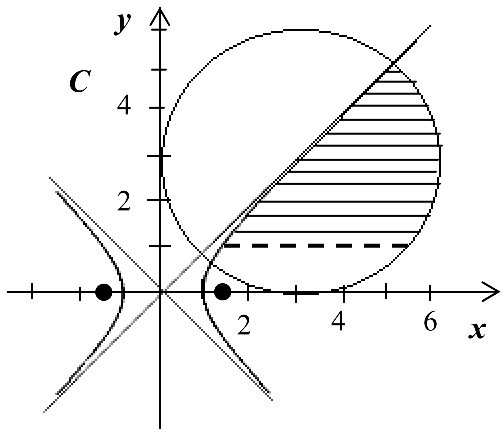



Рис.8

### 1.6. Окрестности точек плоскости $\overline{C}$

Под $\varepsilon$– окрестностью точки $z_0 \in C$ понимается открытый круг радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $z_0$: $U(z_0,\varepsilon) = \{z \,|\, |z-z_0| < \varepsilon\}$. Проколотая окрестность точки $z_0 \in C$ – любая ее окрестность, из которой исключена сама точка $z_0$: $\overset{0}{U}(z_0,\varepsilon) = \{z \,|\, 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$. $\varepsilon$–окрестность несобственной точки $z_0 = \infty$ – это внешность круга радиуса $\varepsilon$ с центром в начале координат (включающая саму точку $z_0 = \infty$): $\boldsymbol{U}(\infty, \varepsilon) = \{z \in \overline{\boldsymbol{C}} \,||\, z |> \varepsilon\}$. Проколотая $\varepsilon-$ окрестность точки $z_0 = \infty$ – множество $\overset{0}{\boldsymbol{U}}(\infty, \varepsilon) = \{z \in \boldsymbol{C} \,||\, z |> \varepsilon\}$.

## 2. ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 2.1. Определение функции комплексной переменной

Определение функции комплексной переменной ничем не отличается от общего определения функциональной зависимости. Напомним**,** что **областью** на плоскости мы называем любое открытое связное множество точек этой плоскости. Область **односвязна**, если любая подобласть, ограниченная непрерывной замкнутой самонепересекающейся кривой, лежащей в этой области, целиком принадлежит области.

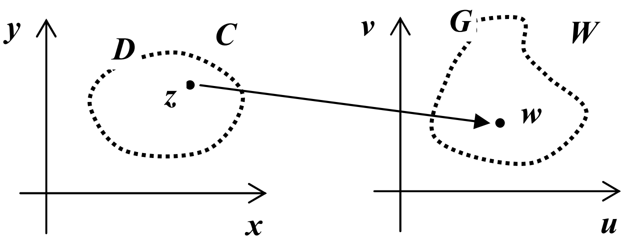



Рис. 9

Рассмотрим две плоскости комплексных чисел: $\boldsymbol{C} = \{z|\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy}\}$ и $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{w}|\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{iv}\}$. Пусть в плоскости $\boldsymbol{C}$ задана область $\boldsymbol{D}$ и задано правило, ставящее в соответствие каждой точке $z \in \boldsymbol{D}$ определённое комплексное число $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. В этом случае говорят, что на области $\boldsymbol{D}$ определена **однозначная функция** $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ (или определено **отображение** $\boldsymbol{f} : z \to \boldsymbol{w}$). Область $\boldsymbol{D}$ называется областью определения функции, множество $\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(z), z \in \boldsymbol{D}$ – множеством значений функции (или образом области $\boldsymbol{D}$ при отображении $\boldsymbol{f}$).

Если каждому $z \in \boldsymbol{D}$ ставится в соответствие несколько значений $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ (т.е. точка $\boldsymbol{z}$ имеет несколько образов), то функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ называется **многозначной**.

Функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ называется о**днолистной** в области $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C}$, если она взаимно однозначно отображает область $\boldsymbol{D}$ на область $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{W}$ (т.е. каждая точка $z \in \boldsymbol{D}$ имеет единственный образ $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{G}$ и обратно, каждая точка $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{G}$ имеет единственный прообраз $z \in \boldsymbol{D}$).

### 2.2. Действительная и мнимая части функции комплексной переменной

Так как $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{iv}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy}$, то зависимость $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ можно записать в виде

$w = u + iv = f(z) = f(x + iy) = \mathrm{Re}\, f(x + iy) + i\, \mathrm{Im}\, f(x + iy)$. Таким образом, **задание функции $w = f(z)$ комплексной переменной $z$ равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$,**

$v = v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ двух действительных переменных $x, y$.

**Примеры**. Найдите действительную и мнимую части функции комплексного переменного:

1) $w = z^3$. Выражаем $z^3$ через $x, y$: $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot i \cdot y + 3\cdot x\cdot$ $\cdot i^2 \cdot y^2 + i^3 \cdot y^3 =$

$$= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3\right) = u + iv \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \\ v(x, y) = 3x^2y - y^3. \end{cases}$$

2) $w = e^z$.

Здесь $u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y. \end{cases}$

Дальше многие свойства функций комплексной переменной (ФКП) будем формулировать в терминах её действительной части $u(x, y)$ и мнимой части $v(x, y)$, поэтому техника выделения этих частей должна быть хорошо отработана.

### 2.3. Геометрическое представление ФКП

Задание функции $w = f(z)$ как пары $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ наводит на мысль изображать ФКП как пару поверхностей $u(x, y)$, $v(x, y)$ в трёхмерном пространстве, однако этот способ неудобен, так как он не позволяет осмыслить пару $(u, v)$ как комплексное число. Иногда изображают поверхность $|f(z)| = |f(x, y)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$, которую называют **рельефом** функции $w = f(z)$ . На эту поверхность наносят линии уровня функции $\mathrm{Arg}\, f(z)$; при наличии определенного опыта этой информации достаточно для того, чтобы составить представление об изменении функции в полярных координатах. Однако универсальный способ изображения ФКП состоит в том, что рисуют множества на двух координатных плоскостях, соответствующие друг другу при рассматриваемом отображении. Одну из них называют плоскостью значений аргумента и обозначают z, другую называют плоскостью значений функции и обозначают w. Чаще всего эти плоскости представляют в декартовых или полярных координатах и находят образы области определения и множества значений функции.

**Примеры**. Построить отображения:

1) Линейная функция $w = a\, z + b$, где $a = a_1 + ia_2 = |a| \cdot e^{i \arg a}$, $b = b_1 + ib_2$ – фиксированные комплексные числа, $a_1$, $b_1$ – их действительные части, $a_2$, $b_2$ – их мнимые части.

Представим эту функцию в виде суперпозиции двух функций: $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{az}$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{b}$. Отображение $z \to w_1 = az$, согласно интерпретации умножения чисел в тригонометрической форме, приводит к увеличению (уменьшению) аргумента числа $\boldsymbol{z}$ на arg $\boldsymbol{a}$ и растяжению (сжатию) его модуля в | $\boldsymbol{a}$ | раз; отображение $w_1 \to w = w_1 + b$ приводит к сдвигу точки : $\boldsymbol{w}_1$ на вектор : $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$. Таким образом, линейная функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}$ растягивает (при $|a| \geq 1$) каждый вектор $\boldsymbol{z}$ в | $\boldsymbol{a}$ | раз

(или сжимает его в $\dfrac{1}{|a|}$ раз при | $\boldsymbol{a}$ | <1), поворачивает на угол arg $\boldsymbol{a}$ и сдвигает на вектор $\boldsymbol{b}$. В результате все прямые преобразуются в прямые, окружности – в окружности.

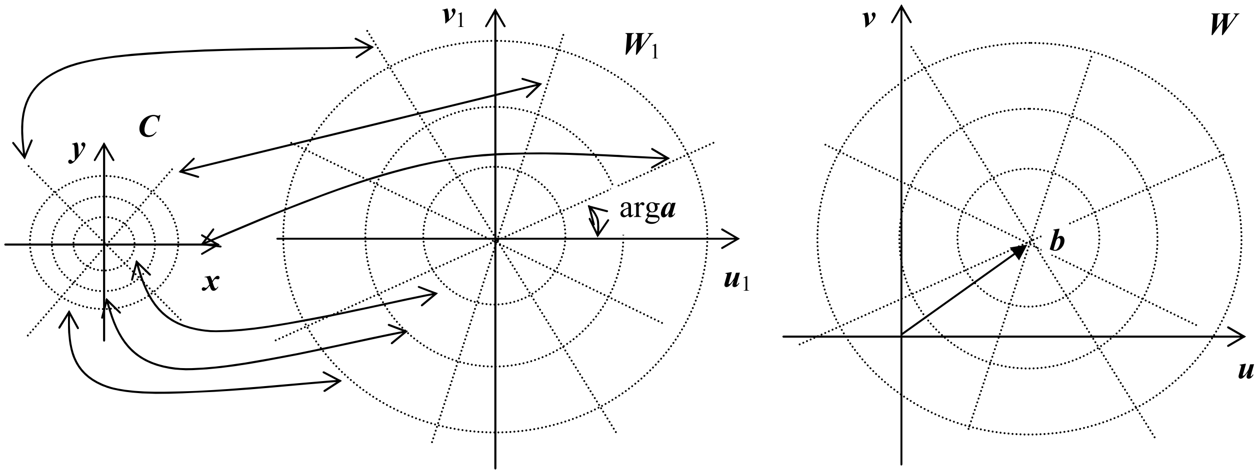



Рис. 10

2) Степенная функция $\boldsymbol{w = z^2}$.

а) Рассмотрим эту функцию в верхней полуплоскости $\boldsymbol{C}^+ = \{z \mid y = \mathrm{Im}\, z > 0\}$. В показательной форме $w = z^2 = (|z|\, e^{i \arg z})^2 = |z|^2\, e^{2i \arg z}$. Следовательно, полуокружность $\{|z| = r,\ 0 < \arg z < \pi\}$ переходит в окружность с выколотой точкой $\{|w| = r^2,\ 0 < \arg w < 2\pi\}$, луч $\{0 < |z| < \infty,\ \arg z = \varphi_0\}$ – в луч $\{0 < |w| < \infty,\ \arg z = 2\varphi_0\}$.

Вся верхняя полуплоскость $\boldsymbol{C}^+$ перейдёт в плоскость $\boldsymbol{W}$ с выброшенной положительной полуосью.

Представим это отображение в декартовых координатах.

Так как $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2 \cdot i \cdot x \cdot y$, то $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2\, x \cdot y$.

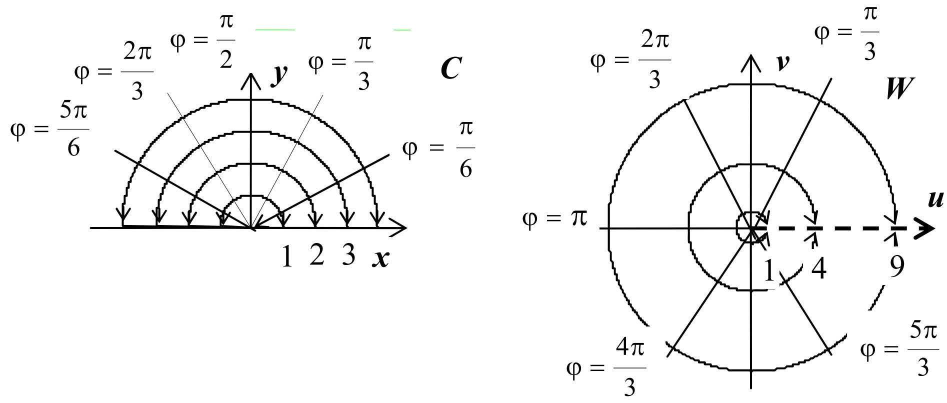



Рис.11

б) Найдём образы координатных линий. Прямая
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0$ перейдёт в кривую, параметрические уравнения которой
$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}_0^{\,2}$, $\boldsymbol{v} = 2\cdot\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}_0$, ($\boldsymbol{x}$ – параметр).

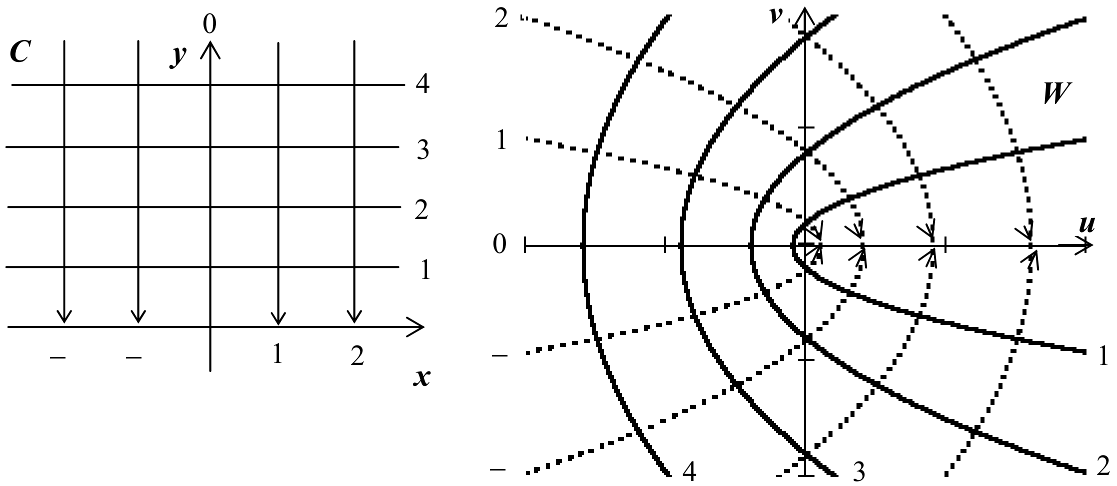



Рис.12

Исключая $\boldsymbol{x}$, получим уравнение параболы $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{4\boldsymbol{y}_0^2} - \boldsymbol{y}_0^2$. Луч $\{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0,\, 0 < \boldsymbol{y} < \infty\}$ перейдёт в $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_0^{\,2} - \boldsymbol{y}^2$, $\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}$ (параметр $\boldsymbol{y} > 0$). Исключая $\boldsymbol{y}$, получим ветвь параболы $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_0^2 - \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{4\boldsymbol{x}_0^2}$.

Из $\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{v}$ сохраняет знак $\boldsymbol{x}_0$, поэтому это будет верхняя ветвь при $\boldsymbol{x}_0 > 0$, и нижняя при $\boldsymbol{x}_0 < 0$. Луч $\boldsymbol{x}_0 = 0$ перейдет в луч $\boldsymbol{u} < 0$, $\boldsymbol{v} = 0$.

Функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}^2$ рассматривается в верхней полуплоскости $\boldsymbol{C}^+$, несмотря на то, что она определена во всей плоскости $\boldsymbol{C}$, по той причине, что она однолистна в этой полуплоскости. Нижняя полуплоскость
$\boldsymbol{C}^- = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{y} = \operatorname{Im} \boldsymbol{z} < 0\}$ при отображении $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}^2$ также накроет всю плоскость $\boldsymbol{W}$ (за исключением положительной полуоси). Если рассматривать весь образ плоскости $\boldsymbol{C}$ при этом отображении, то он будет состоять из двух экземпляров плоскости $\boldsymbol{W}$ (двух листов, накрывающих эту плоскость).

На этом примере мы получили алгоритм построения образов линий и областей при отображении $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$. Если $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{i}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, то, чтобы найти уравнение образа линии $\boldsymbol{L}$: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ при отображении, надо из системы

уравнений $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ u=u(x,y), \\ v=v(x,y); \end{cases}$ исключить переменные $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$; в результате будет

получено уравнение $\Im(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ образа линии $\boldsymbol{L}$ в плоскости $\boldsymbol{W}$. Чтобы найти образ области $\boldsymbol{D}$, ограниченной замкнутой кривой $\boldsymbol{L}$, надо найти образ этой линии, если образ – замкнутая линия, дальше надо определить, переходит ли $\boldsymbol{D}$ в область, ограниченную этой линией, или во внешность этой области.

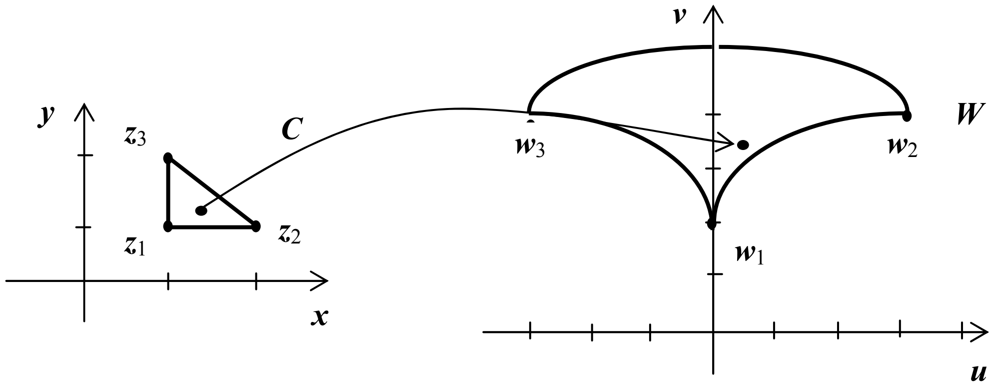



Рис.13

**Пример**. Пусть $z_1 = 1 + \boldsymbol{i}$, $z_2 = 2 + \boldsymbol{i}$, $z_3 = 1 + 2\boldsymbol{i}$. Найти образ треугольника $z_1z_2z_3$ при отображении $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}^2$.

Находим, куда отображаются вершины треугольника. $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{z}_1^{\,2} = (1 + \boldsymbol{i})^2 = 1 + 2\boldsymbol{i} - 1 = 2\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{z}_2^{\,2} = (2 + \boldsymbol{i})^2 = 4 + 4\boldsymbol{i} - 1 = 3 + 4\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{z}_3^{\,2} = (1 + 2\boldsymbol{i})^2 = 1 + 4\boldsymbol{i} - 4 = -3 + 4\boldsymbol{i}$.

Сторона $\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2$ является частью прямой $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0=1$. Эта прямая отображается, как мы видели, в параболу $u = \dfrac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2 = \dfrac{v^2}{4} - 1$. Нам нужна часть этой параболы между точками $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$. Далее, сторона $\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_3$ является частью прямой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 =1$, отображаемой в параболу $u = x_0^2 - \dfrac{v^2}{4x_0^2} = 1 - \dfrac{v^2}{4}$; берём участок этой параболы между точками $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_3$. Сторона $\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{z}_3$ лежит на прямой $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=3$; уравнение

образа этой прямой получим, исключив из системы $\begin{cases} x+y=3, \\ u=x^2-y^2, \\ v=2xy, \end{cases}$ переменные $\boldsymbol{x}$

и $\boldsymbol{y}$:

$$y = 3 - x, u = x^2 - (3-x)^2 = 6x - 9 \Rightarrow x = \frac{u+9}{6} \Rightarrow v = 2 \cdot \frac{u+9}{6}\left(3 - \frac{u+9}{6}\right) = \frac{9}{2} - \frac{u^2}{18}.$$

Участок этой параболы между точками $\boldsymbol{w}_2$ и $\boldsymbol{w}_3$ и даст образ стороны $\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{z}_3$. Изображение треугольника построено. Легко убедиться, что область, ограниченная этим треугольником, переходит во внутренность криволинейного треугольника $\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_3$ (для этого достаточно найти, например, образ одной точки этой области).

3) Более общая степенная функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}$, где $\boldsymbol{n}$ – натуральное число, действует аналогично функции $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}^2$. Так как $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}} = (|\boldsymbol{z}|\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\arg z})^{\boldsymbol{n}} = |\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{n}\arg z}$, то это отображение увеличивает в $\boldsymbol{n}$ раз все углы с вершиной в точке $z = 0$. Любые две точки $\boldsymbol{z}_1$ и $\boldsymbol{z}_2$ с одинаковыми модулями и аргументами, отличающимися на число, кратное $\frac{2\pi}{\boldsymbol{n}}$ (и только они), переходят в одну точку $\boldsymbol{w}$, т.е. "склеиваются" при отображении. Следовательно, отображение неоднолистно ни в какой области, содержащей такие точки. Пример области, в которой это отображение однолистно – сектор $\boldsymbol{D} = \left\{z \mid 0 < \arg z < \frac{2\pi}{\boldsymbol{n}}\right\}$. Этот сектор преобразуется в область $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{w} \mid 0 < \arg z < 2\pi\}$, т.е. в плоскость $\boldsymbol{W}$ с выброшенной положительной полуосью. Любая область, заключенная в секторе раствора меньше $\frac{2\pi}{\boldsymbol{n}}$, однолистно отображается в $\boldsymbol{W}$.

### 2.4. Предел ФКП

**Определение.** Пусть функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ определена в проколотой окрестности точки $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_0$. Комплексное число $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{v}_0$ называется пределом функции при $z \to z_0$, если для любой $\varepsilon$–окрестности $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{w}_0, \varepsilon)$ ($\varepsilon>0$) точки $\boldsymbol{w}_0$ найдётся такая проколотая $\delta$–окрестность $\overset{0}{\boldsymbol{U}}(z_0, \delta)$ точки $\boldsymbol{z}_0$, что для всех $z \in \overset{0}{\boldsymbol{U}}(z_0, \delta)$ значения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ принадлежат $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{w}_0, \varepsilon)$. Другими словами, если $\boldsymbol{z}_0$ – собственная точка плоскости, то для любого $\varepsilon>0$ должно существовать такое $\delta>0$, что из неравенства $0 < |z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|\boldsymbol{f}(z) - \boldsymbol{w}_0| < \varepsilon$ (аналогично расписывается определение для несобственной точки $z_0 = \infty$). Таким образом, на языке $\varepsilon - \delta$ определение предела ФКП полностью совпадает с определением предела функции одной действительной переменной; обозначается предел, как обычно: $\boldsymbol{w}_0 = \lim\limits_{z \to z_0} \boldsymbol{f}(z)$.

Неравенство $|\boldsymbol{f}(z) - \boldsymbol{w}_0| < \varepsilon$ означает, что $|\big(u(x,y) + iv(x,y)\big) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon$, или $|\big(u(x,y) - u_0\big) + i(v(x,y) - v_0)| < \varepsilon$. Для модуля комплексных чисел справедливы все основные свойства абсолютной величины, в частности $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, поэтому $|\big(u(x,y) - u_0\big) + i(v(x,y) - v_0)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |u(x,y) - u_0| < \varepsilon, \\ |v(x,y) - v_0| < \varepsilon. \end{cases}$ Отсюда легко получить, что $w_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \\ v_0 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) \end{cases}$. Таким образом, существование предела функции комплексной переменной равносильно существованию пределов двух действительных функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ двух действительных переменных. Поэтому в комплексный анализ автоматически переносятся все теоремы о пределах функции в точке (предел суммы функций и т.д.). Так же можно доказать,

что если $\boldsymbol{w}_0 = |\boldsymbol{w}_0| \cdot (\cos(\arg \boldsymbol{w}_0) + \boldsymbol{i}\sin(\arg \boldsymbol{w}_0)) \neq 0$, то

$\exists \lim\limits_{z\to z_0} \boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{w}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{z\to z_0} |\boldsymbol{f}(z)| = |\boldsymbol{w}_0|, \\ \exists \lim\limits_{z\to z_0} \arg(\boldsymbol{f}(z)) = \arg(\boldsymbol{w}_0) \end{cases}$ (для существования нулевого предела достаточно, чтобы $\exists \lim\limits_{z\to z_0} |\boldsymbol{f}(z)| = 0$).

### 2.5. Непрерывность ФКП

Пусть функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ определена в окрестности точки $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{y}_0$. Функция называется непрерывной в точке $\boldsymbol{z}_0$, если:

1) существует $\lim\limits_{z\to z_0} \boldsymbol{f}(z)$;
2) $\boldsymbol{f}(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \boldsymbol{f}(z)$.

Как и в случае предела, можно показать, что $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ будет непрерывной в точке $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_0$ тогда и только тогда, когда функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ непрерывны в точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$, поэтому на ФКП переносятся все основные теоремы о непрерывности функций.

## 3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 3.1. Определение комплексной производной. Аналитичность ФКП

Пусть $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ определена, однозначна и принимает собственные значения в окрестности точки $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}$. Производной функции $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ в точке $\boldsymbol{z}$ называется предел

$\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\boldsymbol{f}(z+\Delta z) - \boldsymbol{f}(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{w}}{\Delta z} = \boldsymbol{f}'(z) = \dfrac{d\boldsymbol{w}}{dz}$. Функция, имеющая конечную производную в точке $\boldsymbol{z}$, называется дифференцируемой в этой точке.

В этом определении важно, что стремление $\Delta z \to 0$ может проходить по любому пути. Как увидим дальше, вследствие этого обстоятельства существование производной $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})$ не сводится к существованию частных производных функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, а требует некоторых дополнительных условий. Сейчас дадим определение основного в теории ФКП понятия – **аналитичности функции** в точке и в области.

**Определение**. Однозначная функция называется **аналитической (регулярной, голоморфной) в точке *z***, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Однозначная функция называется **аналитической в области *D*,** если она аналитична в каждой точке этой области.

**Примеры**

1) $\boldsymbol{f(z) = z^2}$**.** В этом случае $f(z+\Delta z) = (z+\Delta z)^2 = z^2 + 2z\cdot\Delta z + (\Delta z)^2$;

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = 2z\cdot\Delta z + (\Delta z)^2;\ \frac{\Delta w}{\Delta z} = 2z + \Delta z;\ \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\left(2z+\Delta z\right) = 2z\,\text{.}$$

Таким образом эта функция дифференцируема в любой точке, и её производная равна $2\boldsymbol{z}$.

2) $\boldsymbol{f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2}$**.** Докажем, что эта функция не имеет производной ни в какой точке $z \neq 0$. Будем стремить $\Delta z \to 0$ по двум путям: по прямой, параллельной действительной оси ***Ox*** (в этом случае $\Delta z = \Delta x$), и по прямой, параллельной мнимой оси ***Oy*** (в этом случае $\Delta z = i\Delta y$). В первом случае

$$\Delta w = \left((x+\Delta x)^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right) = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2;\ \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta x} = 2x + \Delta x;\ \lim_{\Delta z = \Delta x \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = 2x$$

во втором

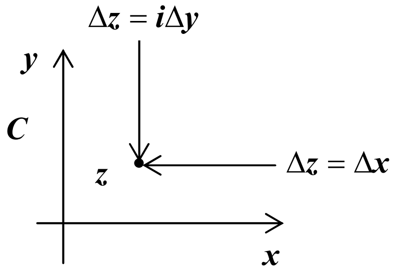



Рис.14

3)

$$\Delta w = \left(x^2 + (y+\Delta y)^2\right) - \left(x^2 + y^2\right) = 2y\cdot\Delta y + (\Delta y)^2;\ \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{i\Delta y} = \frac{1}{i}(2y+\Delta y) = -i(2y+\Delta y);$$

$\lim\limits_{\Delta z = i\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = -2iy$**.** Эти пределы равны, только если $2x = -2iy \Rightarrow\ \Rightarrow x = y = 0$. Таким образом, функция $\boldsymbol{f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2}$ может быть дифференцируема в единственной точке $\boldsymbol{z} = 0$, во всех остальных точках пределы $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ различны в зависимости от способа стремления $\Delta z \to 0$, т.е. $f'(z)$ не существует.

### 3.2. Условия Коши–Римана (Даламбера–Эйлера)

Сформулируем и докажем важнейшую в теории ФКП теорему о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости (а, следовательно, аналитичности) функции.

Для того чтобы функция $\boldsymbol{w = f(z) = u(x,\ y) + i\cdot v(x,\ y)}$ была дифференцируема в точке $\boldsymbol{z = x + i\cdot y}$, необходимо и достаточно, чтобы функции

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{Re}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{Im}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ были дифференцируемы в точке $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и чтобы в этой точке выполнялись соотношения

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}} = -\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

**Доказательство**. **Необходимость.** Здесь мы применим идею, которой воспользовались, когда доказывали, что функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = |\,\boldsymbol{z}\,|^2 = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2$ не имеет производных в точках $z \neq 0$: подойдём к точке $\boldsymbol{z}$ двумя путями – по направлениям $\Delta \boldsymbol{z} = \Delta \boldsymbol{x}$ $(\Delta \boldsymbol{y} = 0)$ и $\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{i}\Delta \boldsymbol{y}$ $(\Delta \boldsymbol{x} = 0)$.

В первом случае:

$$\Delta w = \big(u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y)\big) - \big(u(x,y) + iv(x,y)\big) = \big(u(x+\Delta x, y) - u(x,y)\big) +$$

$$+\, i\big(v(x+\Delta x, y) - v(x,y)\big) = \Delta_x u + i\Delta_x v; \quad \lim_{\Delta z = \Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Во втором случае (напомним, что $\frac{1}{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}$):

$$\Delta w = \big(u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y)\big) - \big(u(x,y) + iv(x,y)\big) =$$

$$\big(u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\big) + i\big(v(x, y+\Delta y) - v(x,y)\big) =$$

$$= \Delta_y u + i\Delta_y v; \quad \lim_{\Delta z = i\Delta y \to 0} \frac{\Delta w}{i\Delta y} = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y v}{\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пределы должны быть равны, поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Достаточность.** По предположению теоремы, функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ дифференцируемы в точке $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, поэтому

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y),\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y),$$ где $\alpha(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y})$,

$\beta(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y})$ – бесконечно малые более высокого порядка по сравнению с

$\rho\left(\sqrt{(\Delta \boldsymbol{x})^2 + (\Delta \boldsymbol{y})^2}\right)$, т.е. $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\alpha(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y})}{\rho} = 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\beta(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y})}{\rho} = 0$. Найдём

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Последнее слагаемое – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\Delta \boldsymbol{z} = \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}\Delta \boldsymbol{y}$: $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|\,\alpha(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{i}\beta(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y})\,|}{|\,\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}\Delta \boldsymbol{y}\,|} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|\,\alpha + \boldsymbol{i}\beta\,|}{\rho} \leq \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|\,\alpha\,|}{\rho} + \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|\,\beta\,|}{\rho} = 0$; далее, в предыдущих слагаемых, пользуясь формулами Коши–Римана, оставим только частные производные по $\boldsymbol{x}$, т.е. заменим $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}$ на $-\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}$, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}$ на $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}$; тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)+\left(\alpha(\Delta x,\Delta y)+i\beta(\Delta x,\Delta y)\right)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{(\alpha+i\beta)}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Отсюда следует, что существует $\boldsymbol{f}'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{w}}{\Delta z}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}$, т.е. функция дифференцируема в точке $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

Производная дифференцируемой функции может находиться по любой из формул $\boldsymbol{f}'(z)=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}-\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}-\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}+\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}-\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}$, эти равенства следуют из условий Коши–Римана. При вычислении производных можно пользоваться всеми правилами действительного анализа: $(\boldsymbol{Cf})'=\boldsymbol{Cf}',\ (\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'\pm\boldsymbol{g}',\ (\boldsymbol{fg})'=\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}+\boldsymbol{fg}',\ \left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)'=\frac{\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}-\boldsymbol{fg}'}{\boldsymbol{g}^2}$ (в точках, где $\boldsymbol{g}(z)\neq 0$).

### 3.3. Примеры вычисления производных

1) Выше доказано, что функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}^2$ имеет производную, равную $2z$, в каждой точке. Проверим, что для этой функции выполняются условия Коши–Римана. Так как $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{z}^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{iy})^2=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2+2\,\boldsymbol{ix}\cdot\boldsymbol{y}$, то

$$u=x^2-y^2,\ v=2xy,\ \frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i\cdot 2y=2(x+iy)=2z$.

2) Для функции $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}^{z}$ получим $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{z}\cos\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{z}\sin\boldsymbol{y}$.
Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$, т.е. функция дифференцируема.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y=e^x(\cos y+i\cdot\sin y)=e^x\cdot e^{iy}=e^{x+iy}=e^z.$$

### 3.4. Геометрический смысл производной

Равенство $\boldsymbol{f}'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{w}}{\Delta z}$ означает, что $\Delta\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}'(z)\cdot\Delta z+\gamma(\Delta z)\cdot\Delta z$, где $\gamma(\Delta z)\underset{\Delta z\to 0}{\to}0$. Отсюда, в частности, следует, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке. Будем писать $\Delta\boldsymbol{w}\approx\boldsymbol{f}'(z)\cdot\Delta z$, пренебрегая слагаемым высшего порядка малости. Пусть в точке $\boldsymbol{z}$ существует $\boldsymbol{f}'(z)\neq 0$. Возьмём точки $\boldsymbol{z}$ и $z+\Delta z$; пусть $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$, тогда $\Delta\boldsymbol{w}\approx|\boldsymbol{f}'(z)|\cdot\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\arg\boldsymbol{f}'(z)}\cdot\Delta z=|\boldsymbol{f}'(z)|\cdot|\Delta z|\cdot\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\arg\boldsymbol{f}'(z)+\arg(\Delta z))}$. Таким образом, $|\Delta\boldsymbol{w}|$ в

$|f'(z)|$ больше $|\Delta z|$, $\arg\Delta w$ больше $\arg\Delta z$ на $\arg f'(z)$ для любого $\Delta z$ (с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Следовательно, в окрестности любой точки $z$, в которой $f'(z)\neq 0$, отображение $z\to w=f(z)$ действует следующим образом: любой вектор $\overrightarrow{\Delta z}$ растягивается в $|f'(z)|$ раз и поворачивается на угол $\arg f'(z)$.

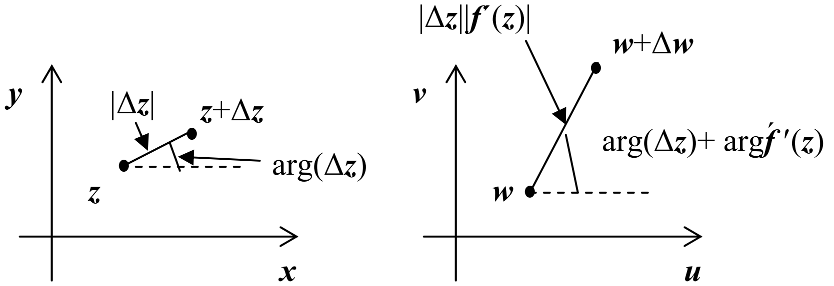



Рис. 15 4

### 3.5. Конформность дифференцируемого отображения

Пусть через точку $z$ проходят две гладкие кривые $L_1$ и $L_2$, касательные $l_1$ и $l_2$ к которым образуют с осью $Ox$ углы, соответственно, $\theta_1$ и $\theta_2$. Образы этих кривых $L_1'$ и $L_2'$ при дифференцируемом отображении $z\to w=f(z)$ имеют касательные $l_1'$ и $l_2'$, образующие с действительной осью $Ou$ углы $\theta_1'$ и $\theta_2'$. Согласно предыдущему пункту, $\theta_1'=\theta_1+\arg(f'(z))$, $\theta_2'=\theta_2+\arg(f'(z))$, т.е. $\theta_2-\theta_1=\theta_2'-\theta_1'$. Таким образом, дифференцируемое отображение при $f'(z)\neq 0$ сохраняет углы между кривыми. Сохраняется и направление отсчёта углов (т.е. если $\theta_1>\theta_2$, то $\theta_1'>\theta_2'$) рис. 16.

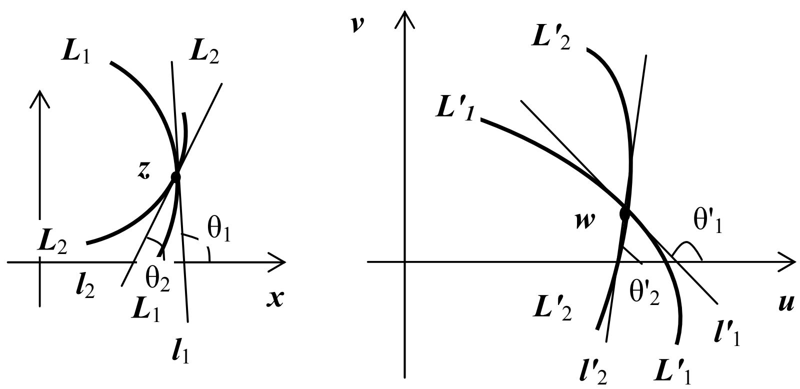



Рис.16

Любое преобразование плоскости в плоскость, обладающее этим свойством (т.е. свойством сохранения углов), называется **конформным**. Если при этом сохраняется направление отсчёта углов, то преобразование называется **конформным преобразованием первого рода**; если направление отсчёта углов меняется на противоположное, то преобразование называется

**конформным преобразованием второго рода**. Доказано, что **аналитическая в некоторой области G функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение первого рода во всех точках, в которых производная отлична от нуля**.

Пример конформного отображения второго рода – не дифференцируемая функция $w = \bar{z}$.

### 3.6. Гармоничность действительной и мнимой частей дифференцируемой функции

Дифференцируя первое соотношение Коши–Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ по переменной $x$, второе соотношение $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ по переменной $y$, получим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, т.е. $\Delta u = 0$ ($\Delta$– оператор Лапласа), т.е. $u(x, y)$ – гармоническая функция. Дифференцируя первое соотношение Коши–Римана по переменной $y$, второе соотношение по переменной $x$, получим $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, т.е. $\Delta v = 0$, т.е. $v(x, y)$ – **тоже гармоническая функция**. Пара гармонических функций, связанных соотношениями Коши–Римана, называется **сопряжёнными функциями**.

Легко доказать, что для любой гармонической в односвязной области $D$ функции $u(x, y)$ существует единственная (с точностью до постоянного слагаемого) сопряжённая с ней гармоническая функция $v(x, y)$, т.е. такая функция, что $w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ – аналитическая функция; и наоборот, для любой гармонической $v(x, y)$ существует сопряжённая с ней гармоническая $u(x, y)$. Пусть, например, дана $u(x, y)$, обозначим $P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}, Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$. Эти функции удовлетворяют условию $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$, т.е. векторное поле $\bar{a}(x, y) = P(x, y) \cdot \bar{i} + Q(x, y) \cdot \bar{j}$ потенциально. Функцию $v(x, y)$ можно найти теперь из системы $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x, y); \end{cases}$ (как это делается при решении уравнения в полных дифференциалах $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$, и как потенциальную для поля $\bar{a} = P \cdot \bar{i} + Q \cdot \bar{j}$ функцию $v(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$.

**Пример**. Может ли функция $v(x, y) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x)$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $w = f(z)$? В случае положительного ответа найти функцию $w = f(z)$.

**Решение.** Докажем, что $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – гармоническая функция.

$v'_x = e^{-y}(\cos x - x\sin x - y\cos x);\quad v''_{xx} = e^{-y}(-2\sin x - x\cos x + y\sin x);$

$v'_y = -e^{-y}(x\cos x - y\sin x + \sin x);\ v''_{yy} = e^{-y}(x\cos x - y\sin x + 2\sin x);$

$\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}^2} = 0$, т.е. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – гармоническая функция и, следовательно, может являться мнимой частью аналитической функции.

Найдём эту функцию. Для действительной части $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ справедливы соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{e}^{-y}(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x} + \sin\boldsymbol{x}), \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{e}^{-y}(\cos\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x}); \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\int(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x} + \sin\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = -\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\int \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{d}\sin\boldsymbol{x} -$$

$$-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cdot \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\int\sin\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx} -$$

$$-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cdot \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}),$$

для нахождения $\varphi(\boldsymbol{y})$ используем второе уравнение системы:

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}(\cos x - x\sin x - y\cos x) \Rightarrow\ \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C = \text{const}$.

Формально можно выписать

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{e}^{-y}\,[-(\boldsymbol{x}\cdot\sin\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\cdot\cos\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{x}\cdot\cos\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\cdot\sin\boldsymbol{x})] + \boldsymbol{C}$, но толку в этой записи нет, так как не видна зависимость $\boldsymbol{f}$ от $\boldsymbol{z}$. Поэтому сделаем по–другому. Выпишем производную $\boldsymbol{f}'(z)$:

$$\boldsymbol{f}'(z) = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}} + \boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{e}^{-y}\left[(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x} + \sin\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{i}(\cos\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})\right].$$

На действительной оси (при $\boldsymbol{y} = 0$, т.е при $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$) функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ превращается в функцию действительной переменной $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, её производная – в $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$.

Положим в $\boldsymbol{f}'(z)$ $\boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$:

$$\boldsymbol{f}'(z)\big|_{y=0;\,z=x} = -\boldsymbol{e}^{-y}\left[(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x} + \sin\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{i}(\cos\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})\right]\Big|_{y=0;\,z=x} =$$

$= -\boldsymbol{z}\cos\boldsymbol{z} - \sin\boldsymbol{z} + \boldsymbol{i}(\cos\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}\sin\boldsymbol{z})$; проинтегрировав это выражение, получим $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$.

Техника нахождения неопределённых интегралов в теории функций комплексной переменной в основном та же, что и в математическом анализе; таблица основных интегралов в обоих случаях одинакова, поскольку одинакова таблица производных. Поэтому

$$f(z) = -\int z\cos z dz - \int\sin z dz + i\int\cos z dz - i\int z\sin z dz =$$

$$-\int z d(\sin z) + \cos z + i\sin z + i\int z d(\cos z) =$$

$$= -z\sin z + \int \sin z dz + \cos z + i\sin z + iz\cos z - i\int \cos z dz =$$

$$- z\sin z - \cos z + \cos z + i\sin z + iz\cos z - i\sin z + C =$$

$$= -z\sin z + iz\cos z + C = iz(\cos z + i\sin z) + C = iz\, e^{iz} + C,$$

где $C$ – произвольная вещественная постоянная интегрирования. Постоянная интегрирования будет действительной, если по условию задачи задана функция $v(x, y)$, и с точностью до произвольной постоянной находится действительная часть $u(x, y)$ функции $f(z)$; если же задана функция $u(x, y)$, то с точностью до произвольной постоянной интегрирования находится мнимая часть $v(x, y)$, т.е постоянная будет чисто мнимым числом $Ci$ ($C$ – произвольное вещественное число).

Проверим полученный результат.

Если $f(z) = iz\, e^{iz} + C$, то $f(z) = (ix - y)\cdot e^{(ix-y)} + C =$

$$= e^{-y}(ix - y)\cdot(\cos x + i\sin x) + C = i\, e^{-y}x\cos x - e^{-y}x\sin x - e^{-y}y\cos x -$$

$$- i\, e^{-y}y\sin x + C = \underbrace{-e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + C}_{u(x,y)} + i\cdot\underbrace{e^{-y}(x\cos x - y\sin x)}_{v(x,y)\text{ – по условию}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}(\sin x + x\cos x - y\sin x) = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{-y}(x\sin x + y\cos x - \cos x) = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

условия Коши–Римана выполнены, следовательно, функция $f(z) = iz\, e^{iz} + C$ – аналитическая на всей комплексной плоскости функция.

Во всех этих рассуждениях проигнорирован вопрос о том, имеют ли функции $u$ и $v$ производные порядка выше первого. (Существование первых производных следует из дифференцируемости $f(z)$.) Дальше докажем, что в отличие от действительного случая ФКП обладает удивительным свойством: если она аналитична в некоторой области (т.е. в каждой точке этой области имеет первую производную), то она бесконечно дифференцируема в этой области (т.е. в каждой точке этой области она имеет производную любого порядка). Как следствие, функции $u$ и $v$ тоже бесконечно дифференцируемы.

# 4. РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

## 4.1. Числовые ряды с комплексными членами

Все основные определения сходимости, свойства сходящихся рядов, признаки сходимости для комплексных рядов ничем не отличаются от действительного случая.

### 4.1.1. Основные определения

Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $z_1$, $z_2$, $z_3$, …, $z_n$… . Действительную часть числа $z_n$ будем обозначать $a_n$, мнимую – $b_n$ (т.е. $z_n = a_n + i\,b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

**Числовой ряд** – выражение, которое получится, если члены последовательности комплексных чисел формально соединить знаком «плюс»: $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

**Частичные суммы ряда**: $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, $S_3 = z_1 + z_2 + z_3$, $S_4 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$, …, $S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n$, …

**Определение.** Если существует предел $S$ последовательности частичных сумм ряда при $n \to \infty$, являющийся собственным комплексным числом, то говорят, что ряд сходится; число $S$ называют суммой ряда и пишут $S = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$ или $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Найдём действительную и мнимую части частичных сумм:

$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = (a_1 + i\, b_1) + (a_2 + i\, b_2) + (a_3 + i\, b_3) + \ldots + (a_n + i\, b_n) = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) +$
$+ i(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n) = \sigma_n + i\tau_n$, где символами $\sigma_n$ и $\tau_n$ обозначены действительная и мнимая части частичной суммы. Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности, составленные из её действительной и мнимой частей. Таким образом, ряд с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды, образованные его действительной и мнимой частями. На этом утверждении основан один из способов исследования сходимости рядов с комплексными членами.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{n\pi}{2}}}{\sqrt{n}}$.

Выпишем несколько значений выражения $e^{i\frac{n\pi}{2}}$:
$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\frac{2\pi}{2}} = -1, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, e^{i\frac{4\pi}{2}} = 1, e^{i\frac{5\pi}{2}} = i, e^{i\frac{6\pi}{2}} = -1,$ дальше значения периодически повторяются. Ряд из действительных частей:
$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + ... + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n}} + ...$; ряд из мнимых частей
$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + ...$; оба ряда сходятся (условно), поэтому исходный ряд сходится.

### 4.1.2. Абсолютная сходимость

**Определение.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | z_n | = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, составленный из абсолютных величин его членов.

Так же, как и для числовых действительных рядов с произвольными членами, легко доказать, что если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$, то обязательно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ $\left(|a_n|\le|z_n|, |b_n|\le|z_n|\right.$, поэтому ряды, образованные действительной и мнимой частями ряда $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$, сходятся абсолютно). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ называется условно сходящимся.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ – числовой ряд с неотрицательными членами, поэтому для исследования его сходимости можно применять все известные признаки (от теорем сравнения до интегрального признака Коши).

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+3i)^n}{(3-i)^{2n}}$.

Составим ряд из модулей ($|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}, |3-i|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13^{n/2}}{10^n}$. Этот ряд сходится (признак Коши $q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{13^{n/2}}{10^n}}=\frac{\sqrt{13}}{10}<1$), поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

### 4.1.3. Свойства сходящихся рядов

Для сходящихся рядов с комплексными членами справедливы все свойства рядов с действительными членами:

1) Необходимый признак сходимости ряда. Общий член сходящегося ряда стремится к нулю при $n\to\infty$.

2) Если сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}z_n$, то сходится любой его остаток. Обратно, если сходится какой–нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.

3) Если ряд сходится, то сумма его остатка после $n$–го члена стремится к нулю при $n\to\infty$.

4) Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число $c$, то сходимость ряда сохранится, а сумма умножится на $C$.

5) Сходящиеся ряды ($A$) и ($B$) можно почленно складывать и вычитать; полученный ряд тоже будет сходиться, и его сумма равна $S_A\pm S_B$.

6) Если члены сходящегося ряда сгруппировать произвольным образом и составить новый ряд из сумм членов в каждой паре круглых скобок, то этот новый ряд тоже будет сходиться и его сумма будет равна сумме исходного ряда.

7) Если ряд сходится абсолютно, то при любой перестановке его членов

сходимость сохраняется и сумма не изменяется.

8) Если ряды ($A$) и ($B$) сходятся абсолютно к своим суммам $S_A$ и $S_B$, то их произведение при произвольном порядке членов тоже сходится абсолютно и его сумма равна $S_A \cdot S_B$.

### 4.2. Степенные комплексные ряды

**Определение.** Степенным рядом с комплексными членами называется ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$,

где $a_0$, $a_1$, $a_2$, …, $a_n$, – постоянные комплексные числа (коэффициенты ряда), $z_0$ – фиксированное комплексное число (центр круга сходимости). Для любого численного значения $z$ ряд превращается в числовой ряд с комплексными членами, сходящийся или расходящийся. Если ряд сходится в точке $z$, то эта точка называется точкой сходимости ряда. Степенной ряд имеет по меньшей мере одну точку сходимости – точку $z_0$. Совокупность точек сходимости называется областью сходимости ряда.

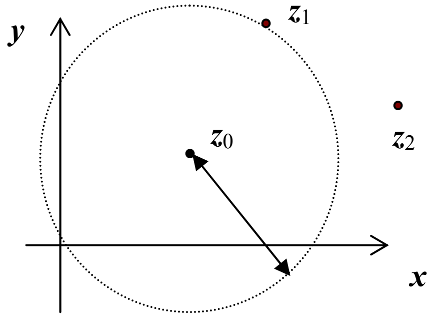



Рис.17

Как и для степенного ряда с действительными членами, все содержательные сведения о степенном ряде содержатся в теореме Абеля.

**Теорема Абеля.** Если степенной ряд сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в любой точке круга

$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$; если этот ряд расходится в точке $z_2$, то он расходится в любой точке $z$, удовлетворяющей неравенству $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ (т.е. находящейся дальше от точки $z_0$, чем $z_2$).

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы Абеля для ряда с действительными членами.

Из теоремы Абеля следует существование такого неотрицательного действительного числа $R$, что ряд абсолютно сходится в любой внутренней точке круга радиуса $R$ с центром в точке $z_0$ и расходится в любой точке вне этого круга. Число $R$ называется **радиусом сходимости**, круг – **кругом сходимости**. В точках границы этого круга – окружности $|z - z_0| = R$ радиуса $R$ с центром в точке $z_0$ – ряд может и сходиться, и расходиться. В этих точках ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot R^n$. Возможны такие случаи:

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot R^n$ сходится. В этом случае в любой точке окружности $|z -$

$z_0| = \boldsymbol{R}$ ряд сходится абсолютно.

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot R^n$ расходится, но его общий член $|a_n| \cdot R^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. В этом случае в некоторых точках окружности ряд может сходиться условно, в других – расходиться, т.е. каждая точка требует индивидуального исследования.

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot R^n$ расходится, и его общий член $|a_n| \cdot R^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. В этом случае ряд расходится в любой точке граничной окружности.

**Примеры**

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(z-4+5i)^n}{6^n \cdot n \cdot \sqrt{n^2+1}}$. Ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|z-4+5i|^n}{6^n \cdot n \cdot \sqrt{n^2+1}}$.

Признак Даламбера:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{|z-4+5i|^{n+1}}{|z-4+5i|^n} \cdot \frac{6^n}{6^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot \sqrt{n^2+1}}{(n+1) \cdot \sqrt{(n+1)^2+1}} = \frac{|z-4+5i|}{6} < 1 \Rightarrow |z-4+5i| < 6 = R.$$

Радиус и круг сходимости определены. На границе круга сходимости – окружности $|z - 4 + 5i| = 6$ – ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n}{6^n \cdot n \cdot \sqrt{n^2+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{n^2+1}}$ сходится, следовательно, исходный ряд абсолютно сходится в любой точке этой окружности.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n}{4n+5}\right)^n \cdot (z+6-7i)^n$. Ряд из модулей: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n}{4n+5}\right)^n \cdot |z+6-7i|^n$.

Применим признак Коши:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+5}\right)^n \cdot |z+6-7i|^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4n+5}\right) \cdot |z+6-7i| = \frac{|z+6-7i|}{4} < 1 \Rightarrow |z+6-7i| < 4 = R$$

На границе круга ряд из модулей имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n}{4n+5}\right)^n \cdot 4^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{4n}{4n+5}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{4n+5-5}{4n+5}\right)^n = = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 - \dfrac{5}{4n+5}\right)^n$.

Предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{5}{4n+5}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{5}{4n+5}\right)^{-\frac{4n+5}{5} \cdot \frac{-5n}{4n+5}} = e^{-\frac{5}{4}} \neq 0$, поэтому ряд расходится в любой точке граничной окружности.

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(z+6-7i)^n}{n \cdot \ln n}$. Ряд из модулей: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{|z+6-7i|^n}{n \cdot \ln n}$. Признак Даламбера: $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z+6-7i|^{n+1}}{|z+6-7i|^n} \cdot \dfrac{n \cdot \ln n}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} = |z+6-7i| < 1 = R$. На границе

круга сходимости ряд из модулей $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ расходится (интегральный признак Коши), однако общий член $\frac{1}{n\cdot\ln n}\underset{n\to\infty}{\to}0$, поэтому в различных точках ряд может и сходиться, и расходится. Так, в точке $z = -5 + 7i$ ($z + 6 - 7i = 1$) ряд имеет вид $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}$ и, как ряд Лейбница, сходится условно; в точке $z = -7\cdot(1 - i)$ ($z + 6 - 7i = -1$) ряд имеет вид $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$, следовательно, расходится.

# 5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 5.1. Степенная функция $w = z^n$, $n$ – натуральное

Функция определена, однозначна и аналитична на всей плоскости $C$. Действительно, при $n = 1$ $w = x + iy$, $u = x$, $v = y$, $u'_x = 1 = v'_y$, $u'_y = 0 = -v'_x$, $w' = u'_x + iv'_x = 1$ (или, непосредственно, $w'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta z}=1$). Далее, $w=z^n=z\cdot z\ldots\cdot z$ дифференцируема как произведение дифференцируемых функций. Её производная $w' = nz^{n-1}$ отлична от нуля при $z\neq 0$, следовательно, отображение $w = z^n$ при $n > 1$ конформно в этих точках. (Углы с вершиной в точке $z = 0$ увеличиваются в $n$ раз). Отображение неоднолистно при $n > 1$ на всей плоскости $C$; для его однолистности в некоторой области $D\subset C$ необходимо, чтобы область помещалась в некоторый сектор раствора $<\frac{2\pi}{n}$.

## 5.2. Показательная функция $w = e^z$

Определим эту функцию предельным соотношением $e^z=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Докажем, что этот предел существует при $\forall z=x+iy\in C$: $1+\frac{x+iy}{n}=\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\frac{y}{n}$,

модуль этого числа обозначим $M_n$: $M_n=\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}=\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{1/2}$,

аргумент $-\Phi_n$: $\Phi_n=\operatorname{arctg}\frac{y/n}{1+x/n}$ (при достаточно больших $n$ дробь $1 + z/n$ лежит в правой полуплоскости).

$$\exists\lim_{n\to\infty}M_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2}=e^x;\quad \exists\lim_{n\to\infty}n\Phi_n=\lim_{n\to\infty}n\operatorname{arctg}\frac{y/n}{1+x/n}=y,$$

следовательно, существует $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)$.

При мнимом $z = iy$ ($x = 0$) отсюда следует, что $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, теперь формула Эйлера окончательно доказана.

Кратко перечислим свойства этой функции.

1) Функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}^{z}$ аналитична на всей плоскости $\boldsymbol{C}$, и $(\boldsymbol{e}^{z})' = \boldsymbol{e}^{z}$ (доказано ранее).

2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ (проверяется непосредственно).

3) Функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}^{z}$ периодическая, с мнимым основным периодом $2\pi \boldsymbol{i}$ ($e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1; e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = e^{z}$)

Из этого свойства следует, что для однолистности отображения $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}^{z}$ необходимо, чтобы область $\boldsymbol{D}$ не содержала пары точек, связанных соотношением $z_2 - z_1 = 2\boldsymbol{n}\pi \boldsymbol{i}$, такой областью является, например, полоса $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, преобразуемая в плоскость $\boldsymbol{C}$ с выброшенной положительной полуосью.

## 5.3. Тригонометрические функции

Определим эти функции соотношениями $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Все свойства этих функций следуют из этого определения и свойств показательной функции. Эти функции периодичны с периодом $2\pi$, первая из них четна, вторая – нечетна, для них сохраняются обычные формулы дифференцирования, например, $(\cos z)' = \dfrac{(e^{iz})' + (e^{-iz})'}{2} = \dfrac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$, сохраняются обычные тригонометрические соотношения ($\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ – проверяется непосредственно, $\cos z = \sin\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, формулы сложения и т.д.)

## 5.4. Гиперболические функции

Эти функции определяются соотношениями $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$.

Из определений следует связь тригонометрических и гиперболических функций:

$\operatorname{ch} z = \cos iz$, $\operatorname{sh} z = -i \cos iz$, $\cos z = \operatorname{ch} iz$, $\sin z = -i \operatorname{sh} iz$, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$, $\sin iz = i \sin z$.

## 5.5. Функция $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$

Это $\boldsymbol{n}$–значная функция, все значений которой даются формулами $w = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$, $\boldsymbol{k} = 0, 1, 2, \ldots, \boldsymbol{n}-1$.

**Функция** $z^{\frac{m}{n}}$ определяется равенством $z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$.

### 5.6. Логарифмическая функция $w$ = Ln $z$

Функция определяется при $z \neq 0$ как функция, обратная показательной: $w$ = Ln $z$, если $z = e^{w}$. Если $w = u + iv$, то последнее равенство означает, что $e^{w} = e^{u+iv} = e^{u}\, e^{iv} = z = |z|\, e^{i\,\mathrm{Arg}\, z}$, откуда
$e^{u} = |z| \Rightarrow u = \ln|z|;\quad v = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi i$. Таким образом,
$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ – функция многозначная (бесконечнозначная); её значение при $k = 0$ называется главным и обозначается $\ln z := \ln|z| + i \arg z$. Так,
$\ln(-5) = \ln|-5| + i\arg(-5) = \ln 5 + \pi i,\ \mathrm{Ln}(-5) = \ln|-5| + i\arg(-5) + 2k\pi i = \ln 5 + i\pi(1 + 2k)$
где $k$ – произвольное целое число.

### 5.7. Общая показательная $a^{z}$ и общая степенная $z^{a}$ ($a$, $z$ – произвольные комплексные числа, $a, z \neq 0$) функции определяются соотношениями $a^{z} = e^{z\cdot \mathrm{Ln}\, a}$, $z^{a} = e^{a\cdot \mathrm{Ln}\, z}$, и, следовательно, бесконечнозначны.

### 5.8. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции

Функция определяются так же, как и в действительном случае ($w$ = Ar sh $z$, если sh $z$ = $w$, например), и выражаются через Ln $z$. Найдём, например, Arc cos($2i$). По определению, это такое число $w$, что cos $w$ = $2i$, или

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 2i \Rightarrow e^{iw} - 4i + e^{-iw} = 0 \Rightarrow (t = e^{iw})\ t - 4i + \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow t^{2} - 4it + 1 = 0 \Rightarrow t = 2i \pm \sqrt{-4-1},$$

$t = 2i \pm \sqrt{5}i,\ \arg(2i + \sqrt{5}i) = \frac{\pi}{2},\ \arg(2i - \sqrt{5}i) = -\frac{\pi}{2}$. Так как $iw = \mathrm{Ln}\, t \Rightarrow w = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\, t = -i\,\mathrm{Ln}\, t$,

получаем две серии значений:

$$w_{1} = -i\,\mathrm{Ln}(2i + \sqrt{5}i) = -i\left[\ln(2 + \sqrt{5}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi - i\ln(2 + \sqrt{5}),$$

$$w_{2} = -i\,\mathrm{Ln}(2i - \sqrt{5}i) = -i\left[\ln(\sqrt{5} - 2) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{5} - 2),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

## 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

### 6.1. Интеграл от ФКП

**6.1.1. Определение**. Пусть на комплексной плоскости $C$ задана ориентированная кусочно–гладкая кривая $L = \overset{\cup}{AB}$, на которой определена функция $w = f(z)$.

Разобьём кривую точками $z_0 = A$, $z_1$, $z_2$, …, $z_n = B$ на $n$ частей, на каждой из дуг $\overset{\cup}{z_{k-1}z_k}$ выберем произвольную точку $t_k$, найдём

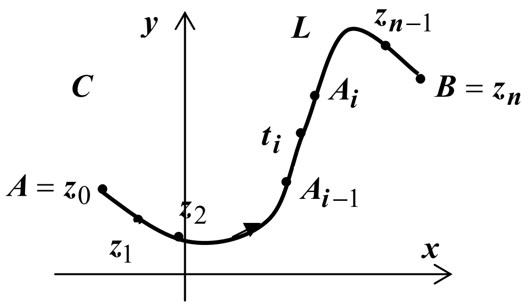


Рис.18

$f(t_k)$ и составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta z_k \ (\Delta z_k = z_k - z_{k-1})$. Предел последовательности этих сумм при $n \to \infty$, $\max\limits_{k=1,2,\ldots n} |\Delta z_k| \to 0$, если он существует, не зависит ни от способа разбиения кривой на дуги, ни от выбора точек $t_k$, называется интегралом от функции $w = f(z)$ по кривой $L$ и обозначается $\int\limits_L f(z)\cdot dz = \lim\limits_{\max\limits_{k=1,2,\ldots n} |\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta z_k$.

**Теорема.** Если функция $w = f(z)$ непрерывна на кривой $L$, то она интегрируема по этой кривой.

**Доказательство.**

Распишем действительные и мнимые части всех величин, входящих в интеграл:

$z_k = x_k + iy_k$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $t_k = \xi_k + i\varsigma_k$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} =$

$(x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) =$

$= (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$,

тогда $f(t_k)\Delta z_k = (u(\xi_k, \varsigma_k) + iv(\xi_k, \varsigma_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$

$= (u(\xi_k, \varsigma_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \varsigma_k)\Delta y_k) + i(u(\xi_k, \varsigma_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \varsigma_k)\Delta x_k)$, и сумма $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta z_k$

разобьётся на две $\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \varsigma_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \varsigma_k)\Delta y_k + i\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \varsigma_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \varsigma_k)\Delta x_k$.

Каждая из этих сумм – интегральная сумма для действительных криволинейных интегралов второго рода, соответственно, $\int\limits_L udx - vdy$ и

$\int\limits_L vdx + udy$.

Если $L$ – кусочно–гладкая кривая, $w = f(z)$ – непрерывна (тогда непрерывны её координатные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$), то существуют пределы этих сумм при $\max\limits_{k=1,2,\ldots n} |\Delta z_k| \to 0$ – соответствующие криволинейные интегралы, следовательно, существует $\lim\limits_{\substack{\max\limits_{k=1,2,\dots n} |\Delta z_k| \to 0}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta z_k = \int\limits_L f(z)\cdot dz$, и

$\int\limits_L f(z)\cdot dz = \int\limits_L u\cdot dx - v\cdot dy + i\int\limits_L v\cdot dx + u\cdot dy$.

### 6.1.2. Свойства интеграла от ФКП

Доказано, что $\int\limits_L f(z)\cdot dz$ выражается через два действительных криволинейных интеграла второго рода, поэтому он обладает всеми свойствами этих интегралов:

1) $\int\limits_L (C_1 f_1(z) + C_2 f_1(z))dz = C_1\int\limits_L f_1(z)dz + C_2\int\limits_L f_2(z)dz$ ($C_1, C_2$ — произвольные комплексные постоянные);

2) $\int\limits_{L_1\cup L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz$ ($L_1, L_2$ – кривые без общих внутренних точек):

3) $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{L^-} f(z)dz$ ($L^-$ – кривая, совпадающая с $L$, но проходимая в противоположном направлении;

4) Если $l$ – длина кривой $L$, $|f(z)| \le M$, $z\in L$, то $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le M\cdot l$.

### 6.2. Интегральная теорема Коши.

Это одна из основных теорем теории ФКП.

### 6.2.1. Теорема Коши для односвязной области.

Если $D$ – односвязная ограниченная область, $w = f(z)$ – аналитическая в этой области функция, то для любого кусочно–гладкого замкнутого контура $L$, лежащего в $D$, интеграл от $f(z)$ по $L$ равен нулю: $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

**Доказательство**

Удивительно, но эта важнейшая теорема непосредственно и просто следует из условий Коши–Римана и формулы Грина. Так как по доказанному выше $\oint\limits_L f(z)\cdot dz = \oint\limits_L u\cdot dx - v\cdot dy + i\oint\limits_L v\cdot dx + u\cdot dy$, то, применяя к действительным криволинейным интегралам формулу Грина, получим $\oint\limits_L f(z)\cdot dz = \iint\limits_G \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + \iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$ вследствие условий Коши–Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$. Символом $G$ в доказательстве обозначена область, заключённая внутри контура $L$.

**Следствие.** Для всех кусочно–гладких кривых, лежащих внутри области $D$, в которой задана аналитическая функция $w = f(z)$, и имеющих общие начальную и конечную точки, интеграл $\int_L f(z)dz$ имеет одинаковое значение (рис.19).

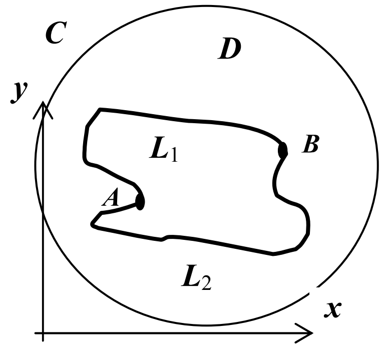


Рис.19

**Доказательство**

Объединение $L_1 \cup L_2^-$ кривых – замкнутый контур, поэтому $\oint_{L_1 \cup L_2^-} fdz = 0 \Rightarrow \oint_{L_1} fdz + \oint_{L_2^-} fdz = 0 \Rightarrow \oint_{L_1} fdz = -\oint_{L_2^-} fdz \Rightarrow \oint_{L_1} fdz = \oint_{L_2} fdz$.

Оказывается, что справедлива и обратная **теорема Морера**: если функция $w = f(z)$ непрерывна в односвязной области $D$ и интеграл по любому замкнутому кусочно–гладкому контуру, лежащему в $D$, равен нулю, то функция аналитична в области $D$.

**6.2.2. Теорема Коши для многосвязной области**

**Теорема.** Если функция $w = f(z)$ аналитична в замкнутой многосвязной ограниченной области $\overline{D}$, ограниченной контурами $L_0$ (внешняя граница), $L_1$, $L_2$, …, $L_k$, то интеграл от $f(z)$, взятый по полной границе области $\overline{D}$, проходимой так, что область остаётся с одной стороны, равен нулю.

**Доказательство**

И здесь воспроизводит доказательство формулы Грина для многосвязной области. Рассмотрим случай, когда граница области $\overline{D}$ (на рисунке область заштрихована) состоит из внешнего контура $L_0$ и внутренних контуров $L_1$ и $L_2$. Соединим контур $L_0$ разрезом $FM$ с контуром $L_1$, разрезом $BG$ – с контуром $L_2$. Область $\overline{D'} = \overline{D} \setminus (BG \cup FM)$ с границей $\Gamma' = \overset{\cup}{AB} \cup BG \cup (L_2 = \overset{\cup}{GLKG}) \cup GB \cup \overset{\cup}{BF} \cup FM \cup L_1 \cup MF \cup \overset{\cup}{FA}$ односвязна, поэтому для неё справедлива интегральная теорема Коши:

$\oint_{\Gamma'} f(z)dz = 0$. Интегралы по каждому из разрезов входят в этот общий интеграл дважды в противоположных направлениях и, как следствие, взаимно уничтожаются, поэтому остаются только интегралы по контурам, проходимым так, что область остаётся с одной стороны (рис.20).

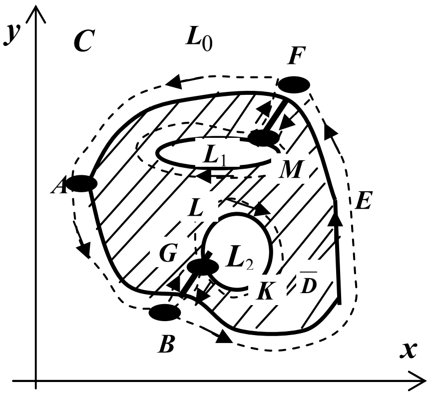



Рис.20

В дальнейшем нам понадобится другая формулировка этой теоремы. Буквами без верхнего индекса будем обозначать контуры, проходимые против часовой стрелки, с верхним минусом – по часовой. Выше доказано, что $\oint\limits_{L_0 \cup L_1^- \cup L_2^-} fdz = 0 \Rightarrow \oint\limits_{L_0} fdz + \oint\limits_{L_1^-} fdz + \oint\limits_{L_2^-} fdz = 0 \Rightarrow \oint\limits_{L_0} fdz = \oint\limits_{L_1} fdz + \oint\limits_{L_2} fdz$. Таким образом, **интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам**, при этом все контуры обходятся в одном направлении.

### 6.3. Первообразная аналитической функции

Если функция $w = f(z)$ аналитическая в односвязной области $D$, то, как доказано, интеграл по кривой $L = \overset{\cup}{z_0 z}$ зависит только от начальной и конечной точек и не зависти от формы кривой. Если зафиксировать начальную точку $z_0$, то интеграл будет зависеть только от конечной точки $z$, поэтому можно написать $\int\limits_{\overset{\cup}{z_0 z}} f(t)dt = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt = F(z)$. Можно доказать (так же, как доказательство существования потенциальной функции в односвязной области при выполнении условия $\partial Q / \partial x = \partial P / \partial y$), что справедлива следующая

**Теорема.** Для любой аналитической в области $D$ функции $f(z)$ интеграл $F(z) = \int\limits_{\overset{\cup}{z_0 z}} f(t)dt = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt$ является аналитической в $D$ функцией, и $F'(z) = f(z)$.

Любая функция $\Phi(z)$ такая, что $\Phi'(z) = f(z)$, называется первообразной функции
$f(z)$. Любые две первообразные отличаются не более чем на постоянную,

поэтому $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt + C$, откуда при $z = z_0$ получаем $C = \Phi(z_0)$, или

$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt = \Phi(z) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z}$. Таким образом, для аналитических функций справедлива формула Ньютона–Лейбница и основные приёмы интегрирования, например: $\int_0^{i\pi} \sin z dz = -\cos z\Big|_0^{i\pi} = \cos 0 - \cos(i\pi) = 1 - \dfrac{e^{i\cdot i\pi} + e^{-i\cdot i\pi}}{2} = 1 - \dfrac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} = 1 - \operatorname{ch}\pi$.

## 7. ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛОВ КОШИ

Мы доказали, что интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции равен нулю. Сейчас мы испортим функцию в одной–единственной точке $z_0$ введением множителя $\dfrac{1}{z - z_0}$; поразительно, какие глубокие выводы получил Коши для интегралов вида $\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz$ (рис.21).

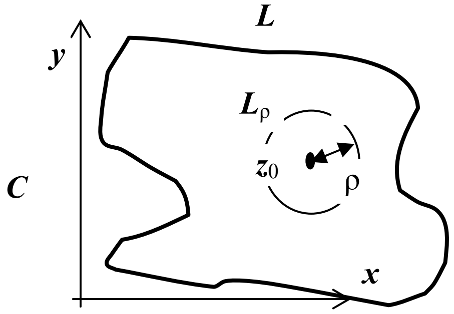



Рис.21

### 7.1. Интеграл $\oint\limits_L (z - z_0)^n dz$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$).

Возможны следующие случаи:

1) Точка $z_0$ лежит вне контура $L$. В этом случае подынтегральная функция аналитична в замкнутой области, ограниченной контуром, и интеграл равен нулю при любых целых $n$.

2) $n \geq 0$. И здесь подынтегральная функция аналитична, и интеграл равен нулю

3) $n = -1$, и точка $z_0$ лежит в области, ограниченной контуром $L$. Сведём интеграл по контуру $L$ к более простому интегралу по окружности $L_\rho$ с центром в точке $z_0$ радиуса $\rho$ столь малого, что окружность $L_\rho$ лежит внутри $L$. В двухсвязной области, расположенной между $L$ и $L_\rho$, функция $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ аналитична, поэтому (следствие из **6.2.2. Теоремы Коши для многосвязной области**) $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z - z_0} = \oint\limits_{L_\rho} \dfrac{dz}{z - z_0}$. Правый интеграл вычислим напрямую. Как и при вычислении любого криволинейного интеграла, нужно параметризовать кривую. Если $z_0 = x_0 + iy_0$, то параметрические уравнения окружности радиуса $\rho$ с центром в точке $(x_0, y_0)$ имеют вид $C_\rho : \begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\varphi, \\ y = y_0 + \rho\sin\varphi. \end{cases}$ Можно воспользоваться

этими уравнениями, однако проще собрать их в комплексное число: $z = x + iy = (x_0 + \rho\cos\varphi) + i(y_0 + \rho\sin\varphi) = (x_0 + iy_0) + \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ (таково параметрическое уравнение окружности на комплексной плоскости $C$), тогда $dz = \rho i e^{i\varphi} d\varphi$, и $\oint\limits_{L_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = 2\pi i \Rightarrow \oint\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$.

4) $n$ = –2, –3, –4, … . Выкладки в этом случае такие же, как и в предыдущем.

$$\oint\limits_{L_\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho^n e^{in\varphi}} d\varphi = i\rho^{-n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-n+1)\varphi} d\varphi = \frac{\rho^{-n+1}}{-n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-n+1)\varphi} di(-n+1)\varphi = \frac{\rho^{-n+1}}{-n+1} e^{i(-n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

вследствие периодичности первообразной.

Итак, мы доказали, что $\oint\limits_L (z - z_0)^n dz$ при целом $n$ не равен нулю в единственном случае – когда $n$ = –1. В этом случае $\oint\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = \oint\limits_{L_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$.

Строго говоря, перебирая различные возможности, мы не рассмотрели вариант, когда точка $z_0$ лежит на контуре $L$. В этом случае подынтегральная функция теряет определенность в точке $z_0$, и необходима теория несобственных комплексных интегралов. В то же время очевидно, что если точка $z_0 \to L$, находясь внутри контура $L$, то $\lim\limits_{z_0 \to L} \oint\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = \lim\limits_{z_0 \to L} 2\pi i = 2\pi i$, если же $z_0 \to L$ извне контура $L$, то $\lim\limits_{z_0 \to L} \oint\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = \lim\limits_{z_0 \to L} 0 = 0$. Вообще эти вопросы – предмет теории Сохоцкого.

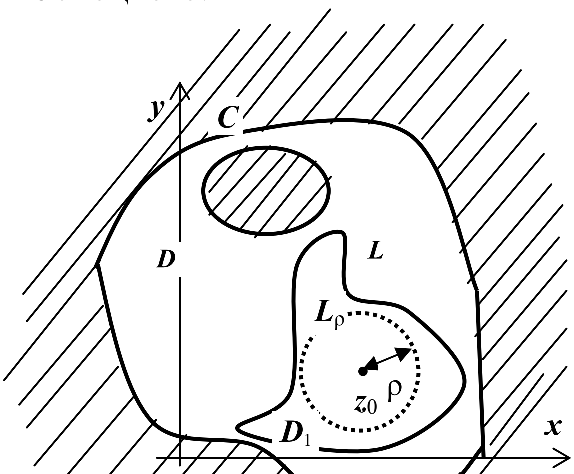



Рис. 22

### 7.2. Интегральная формула Коши

Пусть $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ аналитична в области $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{L}$ – замкнутая кусочно–гладкая кривая, содержащаяся в $\boldsymbol{D}$ вместе с областью $\boldsymbol{D}_1$, которую она ограничивает. Тогда для каждой точки $z_0 \in \boldsymbol{D}_1$ имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

**Доказательство**

Заметим, что в этой формуле функция в точке $\boldsymbol{z}_0$ портится как раз введением множителя $\dfrac{1}{z - z_0}$. Доказательство очень похоже на доказательство того, что $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Мы окружим точку $\boldsymbol{z}_0$ окружностью $L_\rho$ радиусом $\rho$ столь малым, что на $L_\rho$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ мало отличается от $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_0)$: $f(z) \approx f(z_0)$, тогда $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz \approx \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_\rho} \dfrac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \dfrac{f(z_0)}{2\pi i} \oint\limits_L \dfrac{1}{z - z_0} dz = \dfrac{f(z_0)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z_0)$. Более строго, возьмём $\rho$ столь малым, что окружность $L_\rho$ радиусом $\rho$ с центром в $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ лежит в $\boldsymbol{D}_1$. Функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ аналитична в двусвязной области, заключенной между $\boldsymbol{L}$ и $L_\rho$, поэтому (следствие из **6.2.2. Теоремы Коши для многосвязной области**) $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \dfrac{f(z)dz}{z - z_0} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_\rho} \dfrac{f(z)dz}{z - z_0}$. Распишем последний интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_\rho} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz +$$

$$+ \frac{f(z_0)}{2\pi i} \oint_{L_\rho} \frac{1}{z - z_0} dz .$$

Второй интеграл здесь равен $\dfrac{f(z_0)}{2\pi i} \oint\limits_{L_\rho} \dfrac{1}{z - z_0} dz = \dfrac{f(z_0)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z_0)$. Первый интеграл а) не зависит от $\rho$ (действительно, подынтегральная функция аналитична в области между $L_\rho$ и $L_{\rho_1}$, где $L_{\rho_1}$ – окружность радиуса $\rho_1 < \rho$, и по тому же следствию из **6.2.2. Теоремы Коши для многосвязной области**)

а) $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_\rho} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_{\rho_1}} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$;

б) $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_\rho} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$.

Из утверждений а) и б) следует, что первый интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_\rho} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$.

Докажем утверждение б). Обозначим $M_\rho = \max\limits_{L_\rho} |f(z) - f(z_0)|$, при этом вследствие непрерывности функции $M_\rho \underset{\rho\to 0}{\to} 0$. Оценим $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$ по модулю (учитывая, что

$z - z_0 = \rho e^{i\varphi},\ z = z_0 + \rho e^{i\varphi},\ dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi, |dz| = \rho d\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$): $\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le$

$$\le \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{L_\rho}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{M_\rho\cdot\rho}{\rho}d\varphi = M_\rho \underset{\rho\to 0}{\to} 0.$$

Утверждение доказано. Доказана и интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Сформулируем несколько **следствий** из доказанной теоремы.

**Следствие 1.** Значения аналитической в некоторой области функции полностью определяются её значениями на границе этой области. Этот факт можно сформулировать в виде теоремы о среднем. Возьмём $\rho$ такое, что окружность $L_\rho$ радиусом $\rho$ с центром в $z_0$ лежит в $D_1$. Тогда $z - z_0 = \rho e^{i\varphi},\ z = z_0 + \rho e^{i\varphi},\ dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi, |dz| = \rho d\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, и

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}\cdot i\rho e^{i\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi$$

**Следствие 2.** Теорема о среднем. Значение аналитической функции в каждой точке $z_0$ равно среднему арифметическому её значений на любой окружности с центром в точке $z_0$.

Теорема доказана в предположении, что точка $z_0$ лежит внутри контура $L$. Если $z_0$ находится вне контура, то $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz = 0$, так как подынтегральная функция аналитична в $\overline{D_1}$.

**Следствие 3.** Формула справедлива и для многосвязной области, если под кривой $L$ подразумевать полную границу области. В дальнейшем нам понадобится такой вариант: $f(z)$ аналитична в замкнутом кольце, ограниченном окружностями $L_R$ и $L_\rho$. Тогда для всех $z$, лежащих внутри кольца,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_R}\frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}\frac{f(t)}{t-z}dt;$$

при этом окружности проходятся так, что область остаётся слева. В последней формуле переобозначены переменные: $z_0 \to z,\ z \to t$ (рис.23).

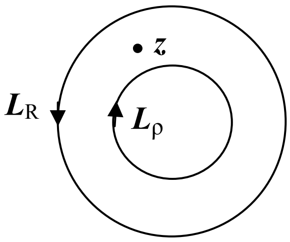



Рис. 23

**7.3. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции**

Запишем интегральную формулу Коши в переменных $z$, $t$:
$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(t)}{t-z}dt$. Продифференцируем эту формулу по $z$: $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt$
(на самом деле законность дифференцирования интеграла по параметру $z$ требует обоснования; примем этот факт без доказательства). Продолжим дифференцирование: $f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^3}dt$; $f'''(z)=\frac{3\cdot 2}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^4}dt$;
$f^{(4)}(z)=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^5}dt=\frac{4!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^5}dt$, и вообще $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$.
Следовательно:

**Теорема.** Если функция $f(z)$ имеет в каждой точке области $D$ производную первого порядка (т.е. аналитична в области $D$), то она имеет в этой области производную любого порядка (т.е. любая производная функции $f(z)$ аналитична в области $D$). Это свойство существенно отличает аналитические ФКП от дифференцируемых функций действительной переменной.

**7.4. Применение интегральных формул Коши к вычислению интегралов**

Запишем формулы Коши в виде $\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\cdot f(z_0)$,
$\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0)$ $(n=1, 2, 3,...)$. С помощью этих формул вычисляются интегралы от функций вида $\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$, где $f(z)$ – аналитическая функция. Естественно, точка $z_0$ должна лежать внутри контура $L$ (если она лежит вне контура, подынтегральная функция аналитична и интеграл равен нулю, рис.24).

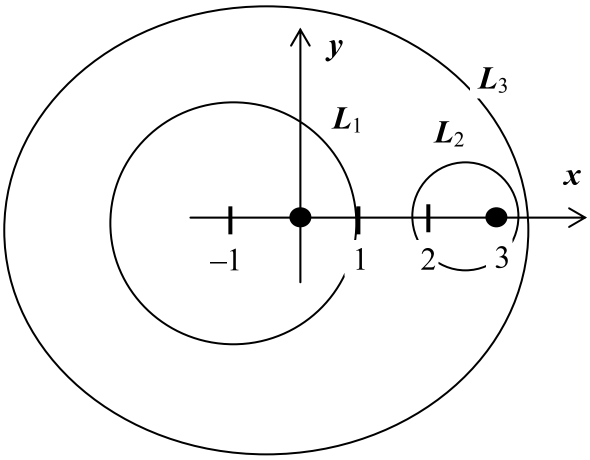



Рис. 24

**Примеры**

1) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z-3}dz$. Здесь $f(z) = e^z$, $z_0 = 3$ лежит внутри круга $|z - 1| = 4$,

поэтому $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z-3}dz = 2\pi i e^3$.

2) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz$. Здесь внутри круга

$L_1 = \{\, z |\ |\, z + 1| = 2\}$ лежит точка $z_0 = 0$, поэтому

$f(z) = \sin z/(z - 3)$ и $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz = \int\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin z/(z-3)}{z}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin z}{z-3}\right|_{z=0} = 0$.

3) $\displaystyle\int\limits_{|z-2{,}5|=1} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz$. Здесь внутри круга

$L_2 = \{z|,|z - 2{,}5| = 1\}$ лежит точка $z_0 = 3$, поэтому $f(z) = \sin z/z$ и

$$\int\limits_{L_2} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz = \int\limits_{L_2} \frac{\sin z/z}{z-3}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin z}{z}\right|_{z=3} = \frac{2}{3}\pi i \cdot \sin 3.$$

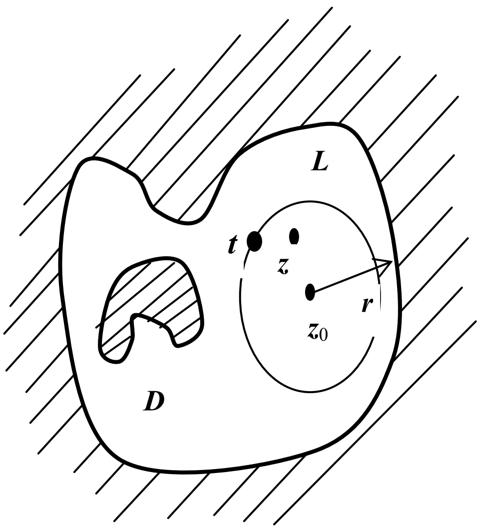



Рис. 23

4) $\int\limits_{|z|=4} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz$. Здесь внутри круга $L_3 = \{\ z|,\ |z| = 4\}$ лежат обе точки $z_0 = 0$ и $z_0 = 3$, но, по следствию из **6.2.2. теоремы Коши для многосвязной области**, $\int\limits_{L_3} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz = \int\limits_{L_1} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz + \int\limits_{L_2} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz = 0 + \frac{2}{3}\pi i \sin 3 = \frac{2}{3}\pi i \sin 3$.

5) $\int\limits_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3}dz$. Для вычисления этого интеграла воспользуемся формулой $\oint\limits_{L} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_0)$ при $f(z) = \sin 2z,\ z_0 = \frac{\pi}{3},\ n = 3$:

$I = \frac{2\pi i}{2!}(\sin 2z)''\big|_{z=\frac{\pi}{3}} = -4\pi i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}\pi i$.

# 8. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

## 8.1. Ряд Тейлора

Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в области $D$, $z_0 \in D$. Обозначим $L$ окружность с центром в $z_0$, принадлежащую области $D$ вместе с ограниченным ею кругом. Тогда для любой точки $z$, лежащей внутри $L$, $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L} \frac{f(t)}{t-z}dt$.

Представим множитель $\frac{1}{t-z}$ в виде суммы сходящейся геометрической прогрессии: $\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} =$ (так как $|z-z_0| < |t-z_0|$, то $q = \frac{|z-z_0|}{|t-z_0|} < 1$) $= \frac{1}{t-z_0}\cdot\left(1+\frac{z-z_0}{t-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3+\ldots\right) = \frac{1}{t-z_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n$, и ряд

сходится абсолютно, поэтому его можно почленно интегрировать:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(t)}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt\cdot(z-z_0)^n =$$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n$, так как $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}dt = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Итак,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Ряд в правой части этого равенства – ряд Тейлора функции $f(z)$. Этот ряд абсолютно сходится внутри контура $L$, а в качестве $L$ можно взять любую окружность, которая не выходит за пределы области $D$. Доказана

**Теорема (о разложении функции в ряд Тейлора)**
Если функция $w = f(z)$ аналитическая в области $D$, $z_0 \in D$, то функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Тейлора по степеням $(z - z_0)^n$. Этот ряд абсолютно сходится к $f(z)$ внутри круга $|z - z_0| < r$, где $r$ – расстояние от $z_0$ до границы области $D$ (до ближайшей к $z_0$ точке, в которой функция теряет аналитичность). Это разложение единственно.

Единственность разложения следует из того, что коэффициенты ряда однозначно выражаются через производные функции.

### 8.1.1. Стандартные разложения

Для однозначных функций разложения в ряд Тейлора в принципе не могут отличаться от изучавшихся ранее разложений функций действительного аргумента:

1. $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

2. $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

3. $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

4. $$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

5. $$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Все эти ряды сходятся к своим функциям на всей плоскости (при $\forall z \in C$). Для геометрических прогрессий имеют место формулы

6. $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

7. $$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

8. $$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots + z^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

То, что эти ряды сходятся при $|z| < 1$, понятно. Ближайшие к центру разложения $z_0 = 0$ точки, в которых функции теряют аналитичность (граница области $D$), это точки $z = \pm 1$, в которых соответствующие функции не определены.

9. $$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots + z^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

В действительном случае вообще было непонятно, почему этот ряд перестаёт сходиться к $f(x)$ при $|x| \geq 1$, ведь $f(x)$ определена на всей действительной прямой. В комплексном случае это проясняется – на окружности $|z| = 1$ расположены точки $z = \pm i$, в которых $f(z)$ не определена.

При разложении многозначных функций необходимо выделить однозначную ветвь. Обычно задают значение функции в одной точке. Рассмотрим, например, функцию $\boldsymbol{f}(z) = \ln(z+1)$. $\mathrm{Ln}1 = \ln 1 + i\,\mathrm{Arg}1 = 2k\pi i$, $\boldsymbol{k}$ – целое. Возьмём ту ветвь логарифма, для которой $\mathrm{Ln}\ 1 = 0$ ( $\boldsymbol{k} = 0$), т.е. главное значение логарифма $\boldsymbol{f}(z) = \ln(z+1)$. На этой ветви

$$\boldsymbol{f}'(z) = \frac{1}{z+1},\ \boldsymbol{f}''(z) = -\frac{1}{(z+1)^2},\ \boldsymbol{f}'''(z) = \frac{2}{(z+1)^3},\ \boldsymbol{f}^{(4)}(z) = -\frac{3\cdot 2}{(z+1)^4},\ \boldsymbol{f}^{(5)}(z) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{(z+1)^5}, ...,$$

$$\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n})}(z) = (-1)^{\boldsymbol{n}-1}\frac{(\boldsymbol{n}-1)!}{(z+1)^{\boldsymbol{n}}}, .., \text{ поэтому } \frac{\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n})}(z_0=0)}{\boldsymbol{n}!} = (-1)^{\boldsymbol{n}-1}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{n}}, \text{ и}$$

10. $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + ... + (-1)^{\boldsymbol{n}-1}\dfrac{z^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}} + ... = \sum\limits_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}(-1)^{\boldsymbol{n}-1}\dfrac{z^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}} = \sum\limits_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty}(-1)^{\boldsymbol{n}}\dfrac{z^{\boldsymbol{n}+1}}{\boldsymbol{n}+1}$.

Точка, в которой функция теряет аналитичность (она в этой точке вообще не определена) – это $z = -1$, поэтому ряд сходится при $|z| < 1$.

Теперь рассмотрим биномиальный ряд для функции $\boldsymbol{f}(z) = (1+z)^{\alpha}$. Это (при любом комплексном $\alpha$) общая степенная функция, поэтому $\boldsymbol{f}(z) = (1+z)^{\alpha} = \boldsymbol{e}^{\alpha\ln(1+z)}$ (однозначная ветвь выделена тем, что взято главное значение логарифма); дальше находим производные: $\boldsymbol{f}'(z) = \boldsymbol{e}^{\alpha\ln(1+z)}\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{1+z} = \alpha\cdot\boldsymbol{e}^{\alpha\ln(1+z)}\cdot\boldsymbol{e}^{-\ln(1+z)} = \alpha\cdot\boldsymbol{e}^{(\alpha-1)\ln(1+z)}$, $\boldsymbol{f}'(0) = \alpha$; аналогично

$$\boldsymbol{f}''(z) = \alpha\cdot\boldsymbol{e}^{(\alpha-1)\ln(1+z)}\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{1+z} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\boldsymbol{e}^{(\alpha-1)\ln(1+z)}\cdot\boldsymbol{e}^{-\ln(1+z)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\boldsymbol{e}^{(\alpha-2)\ln(1+z)},$$

$\boldsymbol{f}''(0) = \alpha(\alpha-1)$; и т.д.; $\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n})}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-\boldsymbol{n}+1)$, поэтому

11. $(1+z)^{\alpha} = 1 + \sum\limits_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-\boldsymbol{n}+1)}{\boldsymbol{n}!}z^{\boldsymbol{n}}, |z| < 1$.

### 8.1.2. Решение задач на разложение функций в ряд Тейлора

Техника решения этих задач ничем не отличается от действительного случая. Рассмотрим, например, задачу: разложить функцию $\dfrac{1}{(5z+6)^2}$ по степеням $(z-7)$. Так как степень знаменателя равна двум, сначала разложим в ряд функцию $\dfrac{1}{5z+6}$, затем почленно продифференцируем его:

$$\frac{1}{5z+6} = \frac{1}{41+5(z-7)} = \frac{1}{41}\cdot\frac{1}{1+\frac{5(z-7)}{41}} = \frac{1}{41}\sum_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty}(-1)^{\boldsymbol{n}}\frac{5^{\boldsymbol{n}}(z-7)^{\boldsymbol{n}}}{41^{\boldsymbol{n}}}.$$ Круг сходимости

$\dfrac{5|z-7|}{41} < 1 \Rightarrow |z-7| < \dfrac{41}{5}$. На границе круга сходимости ряд из модулей расходится, и общий член не стремится к нулю, поэтому в каждой точке окружности $|z-7| = \dfrac{41}{5}$ ряд расходится. Далее,

$$\frac{1}{(5z+6)^2} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5z+6}\right)' = -\frac{1}{5\cdot 41}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{5^n(z-7)^n}{41^n}\right)' = \frac{1}{205}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)5^{n+1}(z-7)^n}{41^{n+1}}$$

Все выводы о круге сходимости и поведении ряда на его границе остаются справедливыми.

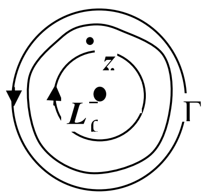
### 8.2. Ряд Лорана

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в кольце $\rho \le |z-z_0| \le R$. Тогда для любой точки этого кольца $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_R}\frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho^-}\frac{f(t)}{t-z}dt$; при этом окружности проходятся так, что область остаётся слева (следствие 3 раздела **7.2. Интегральная формула Коши**). Изменим в интеграле по внутренней окружности направление обхода на противоположное: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_R}\frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}\frac{f(t)}{z-t}dt$. Интеграл по внешней окружности преобразуем так, как и при выводе формулы Тейлора: $\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} =$ (так как $|z-z_0| < |t-z_0|$, то $q = \frac{|z-z_0|}{|t-z_0|} < 1$)

$$= \frac{1}{t-z_0}\cdot\left(1+\frac{z-z_0}{t-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3+\ldots\right) = \frac{1}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n,$$

и ряд сходится абсолютно, поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_R}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_R}\frac{f(t)}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_R}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt\cdot(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n$$




где $A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_R}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Интеграл по внутренней окружности преобразуем аналогично, учитывая только, что на $L_\rho$

$|t-z_0| < |z-z_0|$: $\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-z_0-(t-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}} =$

$$= \frac{1}{z-z_0}\cdot\left(1+\frac{t-z_0}{z-z_0}+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^2+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^3+\ldots\right) = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n.$$

И здесь ряд сходится абсолютно, поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}\frac{f(t)}{z-t}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}\frac{f(t)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}f(t)\cdot(t-z_0)^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{-n-1}}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n},\text{ где } A_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho}f(t)\cdot(t-z_0)^{n-1}dt.$$

Переобозначим $n \to -n$, тогда форма коэффициентов ряда для $L_\rho$ совпадёт с формой коэффициентов ряда для $L_R$: $A_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n = 0, -1, -2, \ldots;$

поэтому окончательно для интеграла по $L_\rho$ получим

$\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \dfrac{f(t)}{z-t}dt = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-z_0)^n$. Докажем, что и контур для вычисления коэффициентов может быть взят один и тот же. Действительно, пусть $\Gamma$ – кусочно–гладкий контур, расположенный в кольце $\rho \le |z-z_0| \le R$, и точка $z_0$ расположена внутри этого контура. По теореме Коши для многосвязной области

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_R} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$A_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n = -1, -2, -3, \ldots$ поэтому для любого $n$

$A_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, и

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n + \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$ Этот ряд (содержащий и положительные, и отрицательные степени $z - z_0$), называется рядом Лорана функции $f(z)$. Его часть, содержащая неотрицательные степени ($\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$), называется правильной; часть, содержащая отрицательные степени ($\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A_{-n}}{(z-z_0)^n}$), называется главной. Правильная часть по самому своему построению, сходится в круге $|z - z_0| < R$, главная – во внешности круга $|z-z_0| > \rho$, поэтому весь ряд сходится в пересечении этих областей, т.е. в кольце $\rho < |z-z_0| < R$. Так же, как и для ряда Тейлора, разложение в ряд Лорана единственно.

Еще раз подчеркнем, что в ряд Лорана раскладывается функция, аналитическая в кольце, и ширина этого кольца определяется областью аналитичности функции, т.е. разложение теряет смысл там, где функция теряет аналитичность.

### 8.3. Примеры разложения функций в ряд Лорана

**Пример 1.** Требуется получить все возможные разложения в ряд Лорана по степеням $z - 2$ функции $f(z) = \dfrac{1}{z(z+4)}$.

**Решение.** Здесь $z_0 = 2$; функция теряет аналитичность в точках $z_1 = 0$, $z_2 = -4$. Легко видеть, что существует три области аналитичности с центром в $z_0$ (один круг и два кольца), на границах которых функция теряет аналитичность:

1) $|z-2|<2$;

2) $2<|z-2|<6$;

3) $|z-2|>6$.

В каждой из этих областей разложение будет таким:

1) В первой области (круге) функция аналитична, поэтому ряд Лорана будет совпадать с рядом Тейлора. $\frac{1}{z(z+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(z+4)-z}{z(z+4)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+4}\right)$ – таково разложение $f(z)$ на простые дроби, разлагаем в ряд Тейлора каждую их них. $\frac{1}{z}=\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$, где $|z-2|<2$;

$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{6+(z-2)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{6}}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{6}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(z-2)^n$; это разложение справедливо, если $|z-2|<6$, т.е. в первой и второй областях. Окончательно в первой области $f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{6^{n+1}}\right)(z-2)^n$. Этот ряд содержит только правильную часть.

2) В кольце $2<|z-2|<6$ знаменатель второй геометрической прогрессии (для дроби $\frac{1}{z+4}$) по модулю $\frac{|z-2|}{6}<1$, поэтому разложение остаётся в силе. Для первой дроби с учётом того, что $|z-2|>2\Rightarrow\frac{2}{|z-2|}<1$, получим

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{(z-2)^n}=$$

$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot 2^{-n-1}\cdot(z-2)^n$. Это – главная часть ряда Лорана. Разложение имеет вид $f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot 2^{-n-1}\cdot(z-2)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(z-2)^n$.

3) В кольце $|z-2|>6\Leftrightarrow 6<|z-2|<+\infty$ для первой дроби разложение такое же, как и в предыдущем случае:

$\frac{1}{z}=\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{(z-2)^n}$ или

$\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot 2^{-n-1}\cdot(z-2)^n$. Для второй дроби

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{6+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{6}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{6}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 6^n}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}6^{n-1}}{(z-2)^n}=$$

$=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot 6^{-n-1}\cdot(z-2)^n$ . Ответ можно записать и в форме

$f(z)=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(2^{n-1}-6^{n-1}\right)\cdot\frac{1}{(z-2)^n}$ , и в форме

$f(z)=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}(-1)^{-n-1}\left(2^{-n-1}-6^{-n-1}\right)\cdot(z-2)^n$ . В этом разложении имеется только главная часть.

**Пример 2.**

Разложить функцию $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}$ в ряд Лорана по степеням $z-\frac{\pi}{4}$.

**Решение.** Здесь функция теряет аналитичность только в точке $z_0=\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$f(z)=\frac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-4}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-3}}{(2n+1)!}\right).$$

Главная часть здесь равна

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}-\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}-\frac{1}{2\cdot\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}+\frac{1}{3\cdot2\cdot\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\right),$$

остальные слагаемые образуют правильную часть.

**Пример 3**.

Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2-4\right)^3}$ в ряд Лорана по степеням $z+2$.

**Решение.** Здесь $z_0=-2$; функция теряет аналитичность только в точке $z_0$ и в точке $z_1=2$, отстоящей от $z_0$ на расстоянии 4, поэтому имеется два кольца:

1) $0<|z+2|<4$ и 2) $|z-2|>4$.

$$f(z)=\frac{z}{\left(z^2-4\right)^3}=\frac{z+2-2}{(z+2)^3\cdot(z-2)^3}=\left(\frac{1}{(z+2)^3}-\frac{2}{(z+2)^2}\right)\cdot\frac{1}{(z-2)^3}$$

Первый множитель уже представлен в виде суммы по степеням $|z + 2|$, работаем со вторым. Третью степень в знаменателе получим, дважды дифференцируя разложение функции $\dfrac{1}{z-2}$.

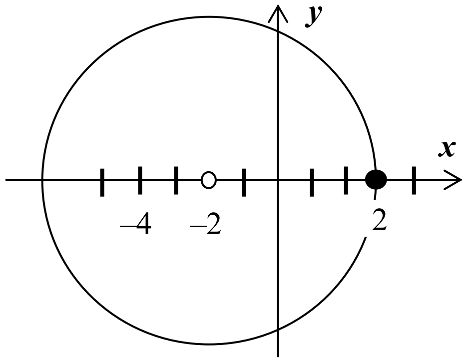



Рис. 24

1) В первом кольце $0 < |z + 2| < 4$ получаем $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{-4+(z+2)} =$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+2}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^n}, \qquad \frac{1}{(z-2)^2} = -\left(\frac{1}{z-2}\right)' = \qquad = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+2)^{n-1}}{4^n},$$

$$\frac{1}{(z-2)^3} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)' = -\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)(z+2)^{n-2}}{4^n} = -\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)(z+2)^n}{4^{n+2}}$$

,

$$\frac{1}{(z-2)^3} = -\frac{1}{128}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\frac{(z+2)^n}{4^n},$$

$$f(z) = \left(\frac{1}{(z+2)^3} - \frac{2}{(z+2)^2}\right)\frac{1}{(z-2)^3} = -\frac{1}{128}\left(\frac{1}{(z+2)^3} - \frac{2}{(z+2)^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\frac{(z+2)^n}{4^n}$$

.

Это и есть искомое разложение в первом кольце. Его можно преобразовывать, например, собрать вместе члены с одинаковыми степенями

$z + 2$, выделить главную часть:

$$f(z) = -\frac{1}{128}\left(\frac{2}{(z+2)^3} + \left(\frac{2\cdot3}{4} - 4\right)\frac{1}{(z+2)^2} + \left(\frac{3\cdot4}{4^2} - \frac{2\cdot3\cdot4}{4}\right)\frac{1}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{4^{n+2}}\left(\frac{n+5}{4} + 2(n+3)\right)(z+2)^n\right)$$

и т.д., но это уже не принципиально.

2) Во втором кольце $|z + 2| > 4$ получаем $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{-4+(z+2)} =$

$$\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{4}{z+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+2)^{n+1}}, \quad \frac{1}{(z-2)^2} = -\left(\frac{1}{z-2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 4^n}{(z+2)^{n+2}},$$

$$\frac{1}{(z-2)^3}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)'=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\cdot 4^n}{(z+2)^{n+3}},$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z+2)^3}-\frac{2}{(z+2)^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\cdot 4^n}{(z+2)^n}.$$

# 9. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ВЫЧЕТЫ

## 9.1. Нули аналитической функции

**Определение.** Точка $a$ называется нулём порядка $k$ аналитической функции $f(z)$, если

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=...=f^{(k-1)}(a)=0, \text{ но } f^{(k)}(a)\neq 0.$$

**Пример**. Пусть $f(z)=\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}$. Точка $a=0$ – нуль этой функции, так как $f(0)=0$. Найдём порядок нуля: $f'(z)=\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}$, $f'(0)=0$; $f''(z)=-\sin z+z$, $f''(0)=0$, $f^{(3)}(z)=-\cos z+1$, $f^{(3)}(0)=0$; $f^{(4)}(z)=\sin z$, $f^{(4)}(0)=0$; $f^{(5)}(z)=\cos z$, $f^{(5)}(0)=1\neq 0$. Первая отличная от нуля производная функции в точке $a=0$ – пятая, поэтому эта точка – нуль пятого порядка функции $f(z)=\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}$.

**Теорема**. Для того чтобы аналитическая в точке $a$ функция $f(z)$ имела в этой точке нуль $k$–го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности этой точки функция $f(z)$ представлялась в виде $f(z)=(z-a)^k\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в точке $a$ функция и $\varphi(a)\neq 0$.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть точка $a$ – нуль $k$–го порядка функции $f(z)$, т.е. $f(a)=f'(a)=f''(a)=...=f^{(k-1)}(a)=0$, и ряд Тейлора имеет вид:

$$f(z)=\frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}(z-a)^k+\frac{f^{(k+1)}_{(a)}}{(k+1)!}(z-a)^{k+1}+...=(z-a)^k\left(\frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}+\frac{f^{(k+1)}_{(a)}}{(k+1)!}(z-a)+...\right)=(z-a)^k\cdot\varphi(z)$$

где $\varphi(z)=\dfrac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}+\dfrac{f^{(k+1)}_{(a)}}{(k+1)!}(z-a)+...$ – аналитическая (как сумма степенного ряда с тем же кругом сходимости, что и у ряда для $f(z)$) функция, $\varphi(a)=\dfrac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}\neq 0$.

**Достаточность.** Пусть $f(z)=(z-a)^k\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция, и $\varphi(a)\neq 0$. Находим производные этой функции по формуле Лейбница

$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + C_n^3 u^{(n-3)}v^{(3)} + \ldots + C_n^{n-2}u''v^{(n-2)} + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$

$f'(z) = k(z-a)^{k-1}\varphi(z) + (z-a)^k \varphi'(z),\ f'(a) = 0$;

$f''(z) = k(k-1)(z-a)^{k-2}\varphi(z) + 2k(z-a)^{k-1}\varphi'(z) + (z-a)^k \varphi''(z),\ f''(a) = 0$;

$f^{(k-1)}(z) = k(k-1)\ldots 2(z-a)\varphi(z) + C_{k-1}^1 k(k-1)\ldots 3(z-a)^2\varphi'(z) + \ldots + (z-a)^k \varphi^{(k-1)}(z),\ f^{(k-1)}(a) = 0$

$f^{(k)}(z) = k(k-1)\ldots 1\cdot\varphi(z) + C_k^1 k(k-1)\ldots 2(z-a)\varphi'(z) + \ldots + (z-a)^k \varphi^{(k)}(z),\ f^{(k)}(a) = k!\varphi(a) \neq 0$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что если многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ разложен на множители $P_n(z) = a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_l)^{k_l}$, то корни $z_1$, $z_2$, …, $z_l$ являются нулями функции $P_n(z)$ кратностей, соответственно, $k_1$, $k_2$, …, $k_l$.

### 9.2. Изолированные особые точки

**9.2.1. Определение.** Точка $a$ называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична во всех точках, за исключением точки $a$.

Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k(z-a)^k$ в окрестности изолированной особой точки $a$. При этом возможны следующие случаи:

1) главная часть ряда Лорана отсутствует:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z-a)^k = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots .$$

В этом случае особая точка $a$ называется устранимой.

2) главная часть содержит конечное число членов:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} A_k(z-a)^k = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,\ A_{-n} \neq 0$$

В этом случае особая точка а называется полюсом $n$–го порядка. Если $n$ =1, полюс называется простым, в остальных случаях – кратным.

3) Главная часть содержит бесконечно много членов. В этом случае особая точка $a$ называется существенно особой точкой.

**9.2.2. Признаки особых точек по значению $\lim\limits_{z\to a} f(z)$**

1) Для того чтобы особая точка $z = a$ была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = C,\ C \neq \infty$.

**Доказательство.** Выпишем разложение $f(z)$ в ряд Лорана: $f(z) = ... + \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + ... + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + ...$. Очевидно, что $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ может быть конечным тогда и только тогда, когда отсутствуют члены с отрицательными степенями, т.е. отсутствует главная часть, т.е. $z = a$ – устранимая особая точка. В этом случае $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A_0$.

2) Для того чтобы особая точка $z = a$ была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал бесконечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Докажем теорему, из которой следует это утверждение.

**Теорема**. Для того чтобы особая точка $z = a$ была полюсом $n$–го порядка функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки $f(z)$ представлялась в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая в точке $a$ функция, $\varphi(a) \neq 0$.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть $f(z)$ имеет в точке $z = a$ полюс $n$–го порядка, т.е.

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} A_k (z-a)^k = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + ... + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + ..., \ A_{-n} \neq 0.$$

Преобразуем это выражение:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \left( A_{-n} + A_{-n+1}(z-a) + A_{-n+2}(z-a)^2 + ... + A_0(z-a)^n + A_1(z-a)^{n+1} + A_2(z-a)^{n+2} + ... \right)$$

Обозначим $\varphi(z)$ сумму ряда, стоящего в скобках:

$$\varphi(z) = A_{-n} + A_{-n+1}(z-a) + A_{-n+2}(z-a)^2 + ... + A_0(z-a)^n + A_1(z-a)^{n+1} + A_2(z-a)^{n+2} + ...$$

.

Ряд Лорана функции $f(z)$ сходится в некотором кольце $0 < | z - a | < r$. Пусть точка $z_1$ принадлежит этому кольцу. Ряд для $\varphi(z)$ сходится в этой точке, так как он отличается от сходящегося ряда для $f(z)$ только постоянным множителем $\frac{1}{(z_1-a)^n}$; по теореме Абеля ряд для $\varphi(z)$ сходится в круге $| z - a | < | z_1 - a |$, и $\varphi(z)$ аналитична в этом круге как сумма степенного ряда.

**Достаточность**. Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где $\varphi(z)$– аналитическая в точке $a$ функция, $\varphi(a) \neq 0$. Разложим $\varphi(z)$ в ряд Тейлора: $\varphi(z) = B_0 + B_1(z-a) + B_2(z-a)^2 + ... + B_k(z-a)^k + ...$.

Тогда $f(z) = \frac{B_0}{(z-a)^n} + \frac{B_1}{(z-a)^{n-1}} + \frac{B_2}{(z-a)^{n-2}} + ...$, т.е. главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ начинается с члена $\frac{B_0}{(z-a)^n}$, где $B_0 = \varphi(a) \neq 0$, т.е. точка $z = a$ – полюс $n$–го порядка.

**Следствие.** Точка $z = a$ – полюс $n$–го порядка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} (z-a)^n f(z) \neq 0$.

**Теорема о связи нулей и полюсов.** Функция $f(z)$ имеет в точке $z = a$ полюс $n$–го порядка тогда и только тогда, когда функция $\dfrac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке нуль $n$–го порядка.

Это теорема непосредственно следует из доказанной теоремы и теоремы предыдущего раздела. С её помощью легко определять порядок полюса. Так, мы доказали, что функция $f(z) = \sin z - z + \dfrac{z^3}{6}$ имеет в точке 0 нуль пятого порядка. Поэтому функция $\dfrac{e^z}{\sin z - z + z^3/6}$ имеет в этой точке полюс пятого порядка.

3. Мы доказали, что в устранимой особой точке и в полюсе существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. Поэтому в существенно особой точке этот предел существовать не может. Более того, верна **теорема Пикара**, которую мы приведём без доказательства.

**Теорема Пикара.** В любой сколь угодно малой окрестности своей **существенно особой точки** функция $f(z)$ принимает (причём бесконечно много раз) любое конечное значение (за исключением, возможно, одного).

### 9.3. Вычет аналитической функции в особой точке

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $D$ за исключением точки $a$. Разложим $f(z)$ в окрестности этой точки в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (z-a)^k = \ldots + \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$

**Коэффициент $A_{-1}$ называется вычетом функции $f(z)$ в точке $a$** и обозначается $\operatorname*{res}\limits_a f(z)$. Если $\gamma$ – произвольный кусочно–гладкий замкнутый контур, расположенный в области $D$ и содержащий внутри себя точку $a$, то, согласно общей формуле для коэффициентов ряда Лорана (см. **9.8.3. Ряд Лорана**), $A_{-1} = \operatorname*{res}\limits_a f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma f(t)dt$.

#### 9.3.1. Вычет в устранимой особой точке равен нулю

Это следует из определения устранимой особой точки: главная часть ряда Лорана отсутствует, все коэффициенты с отрицательными индексами равны нулю, $A_{-1} = 0$.

#### 9.3.2. Вычеты в полюсах

**1) Если $a$ – простой полюс (1–го порядка) функции $f(z)$, то $\operatorname*{res}\limits_a f(z) = \lim\limits_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]$.**

**Доказательство.** Простой полюс – полюс первого порядка, поэтому разложение в ряд Лорана начинается с минус первой степени: $f(z)=\dfrac{A_{-1}}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots$.

Тогда $(z-a)f(z)=A_{-1}+A_0(z-a)+A_1(z-a)^2+A_2(z-a)^3+\ldots$,
и $\operatorname*{res}_a f(z)=A_{-1}=\lim\limits_{z\to a}\big[(z-a)f(z)\big]$.

**2) Пусть $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в окрестности точки *a* функции. Если *a* – простой нуль функции $\psi(z)$, и $\varphi(a)\neq 0$, то $\operatorname*{res}_a f(z)=\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.**

**Доказательство**. Если $a$ – простой нуль функции $\psi(z)$, и $\varphi(a)\neq 0$, то $a$ – простой полюс функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Тогда, по предыдущему утверждению,

$$\operatorname*{res}_a f(z)=\lim_{z\to a}\big[(z-a)f(z)\big]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)}{z-a}}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)}{\lim\limits_{z\to a}\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

**3) Если *a* – полюс функции *f*(*z*) *n*–го порядка, то**

$$\operatorname*{res}_a f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-a)^n f(z)\Big)\right].$$

**Доказательство.** Так как точка $z=a$ – полюс $n$–го порядка функции $f(z)$, то

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}A_k(z-a)^k=\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z-a}+A_0+$$
$$A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots,\ A_{-n}\neq 0$$

Для того чтобы удалить особенность в точке $a$, умножим $f(z)$ на $(z-a)^n$

$$(z-a)^n f(z)=A_{-n}+A_{-n+1}(z-a)+\ldots+A_{-1}(z-a)^{n-1}+A_0(z-a)^n+A_1(z-a)^{n+1}+\ldots.$$

Теперь, чтобы убрать первые члены этой формулы и добраться до $A_{-1}$, дифференцируем это произведение $n$–1 раз:

$$\frac{d}{dz}\Big((z-a)^n f(z)\Big)=A_{-n+1}+2A_{-n+2}(z-a)+\ldots+(n-1)A_{-1}(z-a)^{n-2}+nA_0(z-a)^{n-1}+$$
$$(n+1)A_1(z-a)^n+\ldots$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-a)^n f(z)\Big)=2A_{-n+2}+3\cdot 2A_{-n+3}(z-a)+\ldots+(n-1)(n-2)A_{-1}(z-a)^{n-3}+$$
$$n(n-1)A_0(z-a)^{n-2}+\ldots$$

…………………………………………………………………………………

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right)=(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot A_{-1}+n(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot A_0(z-a)+\ldots=$$

$$(n-1)!A_{-1}+n!A_0(z-a)+\ldots$$

$\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right)=(n-1)!A_{-1}$, ткуда и следует доказываемая формула.

### 9.3.3. Вычет в существенно особой точке находится из разложения функции в ряд Лорана

### 9.3.4. Примеры нахождения вычетов

1) $f(z)=\dfrac{(1-\cos z)^2}{z^4}$.

Эта функция имеет единственную особую точку – $z = 0$. Функция $(1 - \cos z)$ при $z\to 0$ – бесконечно малая второго порядка, $(1 - \cos z)^2$ – четвертого, поэтому можно предположить, что существует конечный $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$, т.е. $z = 0$ – устранимая особая точка. Доказываем строго:

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(1-\cos z)^2}{z^4}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(z^2/2)^2}{z^4}=\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow\ z=0$ – устранимая особая точка.

Можно решить эту задачу по–другому. Так как

$\cos z=1-z^2/2!+z^4/4!+\ldots+(-1)^n z^{2n}/(2n)!+\ldots$, то

$$(1-\cos z)^2=\left(z^2/2!-z^4/4!+\ldots+(-1)^{n+1}z^{2n}/(2n)!+\ldots\right)^2=z^4\cdot\left(1/2!-z^2/4!+\ldots+(-1)^{n+1}z^{2n-2}/(2n)!+\ldots\right)^2$$

$$f(z)=\left(1/2!-z^2/4!+\ldots+(-1)^{n+1}z^{2n-2}/(2n)!+\ldots\right)^2.$$

Понятно, что разложение этой функции по степеням $z$ не будет содержать членов с отрицательными степенями, т.е. $z = 0$ – устранимая особая точка.

2) $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z-2}}$.

Особая точка: $z = 2$. Разлагаем функцию в ряд по степеням $z - 2$:

$z^2 = [(z - 2) + 2]^2 = (z - 2)^2 + 4 (z - 2) + 4$,

$$e^{\frac{1}{z-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot(z-2)^n}=1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!\cdot(z-2)^2}+\frac{1}{3!\cdot(z-2)^3}+\ldots+\frac{1}{n!\cdot(z-2)^n}+\ldots,$$

$$f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z-2}}=[(z-2)^2+4(z-2)+4]\cdot\left(\begin{array}{l}1+\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{2!(z-2)^2}+\dfrac{1}{3!(z-2)^3}+\dfrac{1}{4!(z-2)^4}+\ldots\\ +\dfrac{1}{n!(z-2)^n}+\ldots\end{array}\right)=$$

$$=(z-2)^2+(1+4)(z-2)+\left(\frac{1}{2}+4+4\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{4}{2!}+4\right)\cdot\frac{1}{z-2}+\left(\frac{1}{4!}+\frac{4}{3!}+\frac{4}{2!}\right)\cdot\frac{1}{(z-2)^2}+$$

$+\left(\frac{1}{5!}+\frac{4}{4!}+\frac{4}{3!}\right)\cdot\frac{1}{(z-2)^3}+\ldots$.

Разложение содержит бесконечное количество слагаемых с отрицательными степенями $z - 2$, следовательно,

$z = 2$ – существенно особая точка. $\operatorname*{res}\limits_{2} f(z) = A_{-1} = \frac{1}{3!}+\frac{4}{2!}+4=\frac{37}{6}$.

3) $f(z) = \operatorname{ctg} z$.

Особые точки – те, в которых $\sin z = 0$: $a_k = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots$.

Эти точки являются простыми нулями знаменателя, так как $(\sin z)'\big|_{z_k} = \cos z\big|_{z_k} = \pm 1 \neq 0$. Числитель $\cos a_k \neq 0$, поэтому точки $a_k$ – простые полюса. Вычеты находим по формуле $\operatorname*{res}\limits_{a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$:

$$\operatorname*{res}\limits_{a_k} \operatorname{ctg} z = \frac{\cos a_k}{(\sin z)'\big|_{z=a_k}} = \frac{\cos a_k}{\cos a_k} = 1.$$

4) $f(z) = \frac{(z-\pi)^2}{\sin^2 z}$.

Особые точки – те, в которых $\sin z = 0$: $a_k = k\pi$. В этих точках предел знаменателя $\lim\limits_{z\to a_k} \sin^2 z = 0$; во всех точках $a_k$, за исключением $a_1 = \pi$, числитель отличен от нуля, поэтому $\lim\limits_{z\to a_k,\, k\neq 1} f(z) = \infty$, следовательно, эти точки – полюса. Для определения порядка этих полюсов найдём порядок нуля знаменателя: $\psi(z) = \sin^2 z,\ \psi(a_k) = 0,\ \psi'(z) = \sin 2z,\ \psi'(a_k) = 0,\ \psi''(z) = 2\cos 2z,\ \psi''(z) = 2 \neq 0$, следовательно, эти полюса имеют второй порядок (при $k \neq 1$). В точке $a_1 = \pi$ функция представляет собой неопределённость $\frac{0}{0}$, однако, если вспомнить, что $\sin z = \sin(\pi - z) = -\sin(z-\pi)$, эта неопределённость раскрывается просто: $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{(z-\pi)^2}{\sin^2 z} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{(z-\pi)^2}{[-\sin(z-\pi)]^2} = 1$, т.е. функция имеет конечный предел, следовательно, $a_1 = \pi$ – устранимая особая точка.

Вычет в устранимой особой точке равен нулю, поэтому $\operatorname*{res}\limits_{a_1=\pi} f(z) = 0$. В остальных точках применяем формулу $\operatorname*{res}\limits_{a_k} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a_k}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a_k)^n f(z)\right)\right]$

при $n = 2$: $\operatorname*{res}\limits_{a_k,\, k\neq 1} f(z) = \frac{1}{1!}\lim\limits_{z\to a_k}\left[\frac{d}{dz}\left((z-a_k)^2\frac{(z-\pi)^2}{\sin^2 z}\right)\right] =$ (меняем переменную $t = z - a_k$, $\sin z = (\sin t + a_k) = \sin(t + k\pi) = (-1)^k \sin t$ )= $\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{(t+a_k-\pi)^2}{\sin^2 t}\right)\right] =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{[2t(t+a_k-\pi)^2+2t^2(t+a_k-\pi)]\sin t-2t^2(t+a_k-\pi)^2\cos t}{\sin^3 t}\right]=2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2(t+a_k-\pi)]\sin t}{\sin^3 t}+$

$+2\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{t(t+a_k-\pi)^2\sin t-t^2(t+a_k-\pi)^2\cos t}{\sin^3 t}\right]=2\lim\limits_{t\to 0}(t+a_k-\pi)\dfrac{t^2}{\sin^2 t}+2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}\times$

$\times\lim\limits_{t\to 0}\left[(t+a_k-\pi)^2\right]\times\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{\sin t-t\cos t}{\sin^2 t}\right]=2(a_k-\pi)+$ (к последнему пределу применяем правило Лопиталя)

$\times 2(a_k-\pi)^2\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{\cos t-\cos t+t\sin t}{2\sin t\cos t}\right]=2(a_k-\pi)+(a_k-\pi)^2\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{t\sin t}{\sin t\cos t}\right]=2(a_k-\pi)=2(k-1)\pi$

.

### 9.4. Основная теорема о вычетах

Пусть функция $f(z)$ аналитична во всех точках ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, границей которой является контур $L$, за исключением конечного числа особых точек $z_1$, $z_2$, $z_3$, …, $z_n$, расположенных внутри $L$. Тогда $\oint\limits_L f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$.

**Доказательство**

Окружим каждую особою точку $z_k$, $k$ = 1, 2, …,$n$ контуром $\gamma_k=\{z||z-z_k|=\rho_k\}$ таким, чтобы все контуры лежали в области $D$ и не пересекались. В области, ограниченной контурами $L$, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_n$, функция аналитична, поэтому по **19.6.2.2. Теореме Коши для многосвязной области**

$\oint\limits_L f(z)dz=\oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz+\oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz+....+\oint\limits_{\gamma_n} f(z)dz$. По определению вычета,

$\oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz=2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$, следовательно,

$\oint\limits_L f(z)dz=2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z_1} f(z)+2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z_2} f(z)+...+2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z_n} f(z)=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$, что и требовалось доказать.

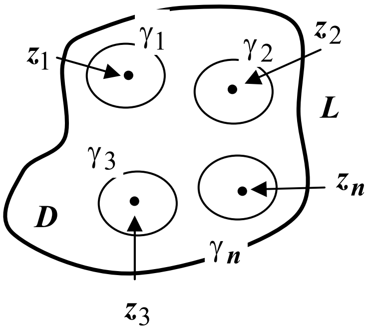
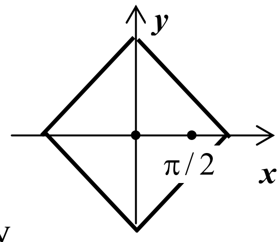



Рис. 25

**Примеры вычисления интегралов с помощью основной теоремы о вычетах**




1) $\oint\limits_L \dfrac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz$, где $L$ – квадрат $|x| + |y| = 2$.

Обе особые точки подынтегральной функции: $z_1 = 0$ и $z_2 = \dfrac{\pi}{2}$ расположены внутри контура $L$, поэтому

$\oint\limits_L \dfrac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z_2} f(z)\right)$**.** Точка $z_1 = 0$ – полюс первого порядка,

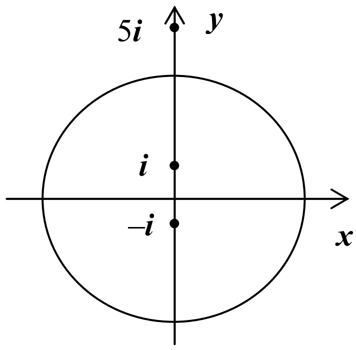
$\operatorname*{res}_{z_1} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\left(z\cdot f(z)\right) = \lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\cos z}{\pi/2 - z}\right) = \dfrac{2}{\pi}$. Точка $z_2 = \dfrac{\pi}{2}$ – нуль первого порядка и для числителя, и для знаменателя; докажем, что это – устранимая особая точка подынтегральной функции. Пусть $t = \dfrac{\pi}{2} - z$, тогда $\cos z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$, и

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{(\pi/2 - t)t} = \dfrac{2}{\pi}$, конечный предел существует, поэтому, действительно, это – устранимая особая точка, и $\operatorname*{res}_{z_2} f(z) = 0$. По основной теореме о вычетах $\oint\limits_L \dfrac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz = 2\pi i\left(\dfrac{2}{\pi} + 0\right) = 4i$ **.**

2) $\oint\limits_{|z|=3} z^2 \cdot e^{\frac{1}{z-2}}dz$. В примере 2 раздела **9.3.4. Примеры нахождения вычетов** мы доказали, что точка $z = 2$ – существенно особая точка подынтегральной функции и

$\operatorname*{res}_{2} f(z) = A_{-1} = \dfrac{1}{3!} + \dfrac{4}{2!} + 4 = \dfrac{37}{6}$, поэтому

$\oint\limits_{|z|=3} z^2 \cdot e^{\frac{1}{z-2}}dz = 2\pi i \cdot \dfrac{37}{6} = \dfrac{37}{3}\pi i$ .




3) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+i)(z-5i)}dz$. Здесь

подынтегральная функция $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+i)(z-5i)} = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z-i)(z+i)^2(z-5i)}$ имеет две особых точки, расположенных в области, находящейся внутри контура: $z_1 = i$ (простой полюс) и $z_2 = -i$ (полюс второго порядка).

$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \lim\limits_{z\to i}\left[(z-i)f(z)\right]_{z=i} = \left[\dfrac{\operatorname{sh} z}{(z+i)^2(z-5i)}\right]\Bigg|_{z=i} = \dfrac{\operatorname{sh} i}{(2i)^2\cdot(-4i)} = \dfrac{e^i - e^{-i}}{32i} = \dfrac{1}{16}\sin 1$,

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z)=\lim_{z\to -i}\left[(z+i)^2 f(z)\right]'=\left[\frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)(z-5i)}\right]'\Bigg|_{z=-i}=\left[\frac{\operatorname{ch} z\cdot(z-i)(z-5i)-\operatorname{sh} z(2z-6i)}{(z-i)^2(z-5i)^2}\right]\Bigg|_{z=-i}=$$

$$=\left[\frac{\operatorname{ch}(-i)\cdot(-2i)(-6i)-\operatorname{sh}(-i)(-8i)}{(-2i)^2(-6i)^2}\right]=\frac{-12\operatorname{ch} i-8i\operatorname{sh} i}{144}=\frac{2\sin 1-3\cos 1}{36};$$

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+i)(z-5i)}dz=2\pi i\left(\frac{\sin 1}{16}+\frac{2\sin 1-3\cos 1}{36}\right)=\pi i\left(\frac{17\sin 1}{72}-\frac{\cos 1}{6}\right).$$

4) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{z}dz$. Внутри контура расположена одна особая точка подынтегральной функции $f(z)$: $z=0$. Это – существенно особая точка, поэтому для нахождения вычета необходимо найти коэффициент $A_{-1}$ разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки.

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}-\frac{z^3}{2^4}+\frac{z^4}{2^5}-\frac{z^5}{2^6}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots;$$

$$\operatorname{sh}\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!\cdot z^{2n+1}}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3!\cdot z^3}+\frac{1}{5!\cdot z^5}+\frac{1}{7!\cdot z^7}+\frac{1}{9!\cdot z^9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!\cdot z^{2n+1}}+\ldots.$$

$f(z)=\frac{1}{z+2}\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{z}$, однако нет необходимости выписывать произведение этих рядов, достаточно только собрать те попарные произведения, которые дают минус первую степень переменной $z$:

$A_{-1}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3!}+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$. Легко сообразить, что это ряд для $\operatorname{sh} z$ при $z=\frac{1}{2}$, т.е. $\operatorname*{res}_{0} f(z)=A_{-1}=\operatorname{sh}\frac{1}{2}$, и $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{z}dz=2\pi i\operatorname*{res}_{0} f(z)=2\pi i\operatorname{sh}\frac{1}{2}$.

### 9.5. Бесконечно удалённая особая точка

Будем считать точку $z=\infty$ особой точкой любой аналитической функции. В разделе **1.6. Окрестности точек плоскости $\overline{C}$** мы определили окрестности этой точки как внешности кругов с центром в начале координат: $U(\infty,\varepsilon)=\{z\in\overline{C}\,\|\,z|>\varepsilon\}$. Точка $z=\infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $w=f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек этой функции. Для определения типа этой особой точки сделаем замену переменной $z_1=\frac{1}{z}$, при этом точка $z=\infty$ переходит в точку $z_1=0$, функция $w=f(z)$ примет вид $w=f\left(\frac{1}{z_1}\right)=\varphi(z_1)$. Типом особой точки $z=\infty$ функции $w=f(z)$ будем называть тип особой точки $z_1=0$ функции $w=\varphi(z_1)$. Если разложение функции $w=f(z)$ по степеням $z$ в окрестности точки $z=\infty$, т.е. при достаточно больших по модулю значениях $z$, имеет вид

$f(z) = \ldots + \dfrac{A_{-n}}{z^n} + \dfrac{A_{-n+1}}{z^{n-1}} + \ldots + \dfrac{A_{-1}}{z} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots$, то, заменив $z$ на $\dfrac{1}{z_1}$,

получим $\varphi(z_1) = \ldots + A_{-n} \cdot z_1^n + A_{-n+1} \cdot z_1^{n-1} + \ldots + A_{-1} \cdot z_1 + A_0 + \dfrac{A_1}{z_1} + \ldots + \dfrac{A_n}{z_1^n} + \ldots$.

Таким образом, при такой замене переменной главная и правильная части ряда Лорана **меняются местами**, и тип особой точки $z = \infty$ определяется количеством слагаемых в правильной части разложения функции в ряд Лорана по степеням $z$ в окрестности точки $z = 0$. Поэтому

**1) Точка $z = \infty$ – устранимая особая точка, если в этом разложении правильная часть отсутствует (за исключением, возможно, члена $A_0$);**

**2) Точка $z = \infty$ – полюс $n$–го порядка, если правильная часть заканчивается слагаемым $A_n \cdot z^n$;**

**3) Точка $z = \infty$ – существенно особая точка, если правильная часть содержит бесконечно много членов.**

При этом остаются справедливыми признаки типов особых точек по значению $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$:

если $z = \infty$ – устранимая особая точка, то этот предел существует и конечен,

если $z = \infty$ – полюс, то этот предел бесконечен,

если $z = \infty$ – существенно особая точка, то этот предел не существует (ни конечный, ни бесконечный).

**Примеры**

1) $f(z) = -5 + 3z^2 - z^6$. Функция уже является многочленом по степеням $z$, старшая степень – шестая, поэтому $z = \infty$ – полюс шестого порядка.

Этот же результат можно получить по–другому. Заменим $z$ на $z_1 = \dfrac{1}{z}$,

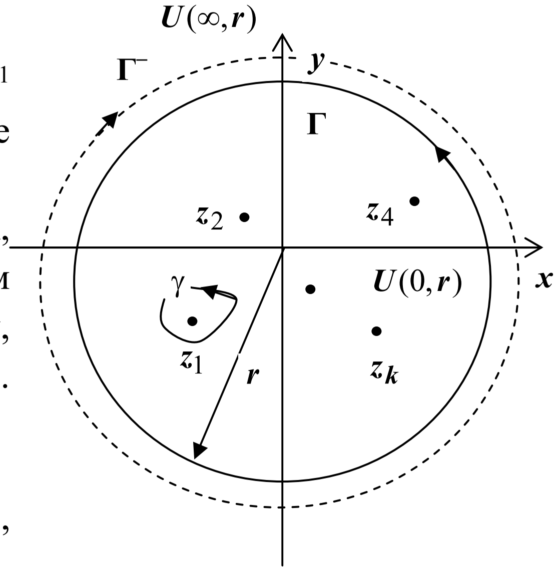
тогда $f(z) = -5 + \dfrac{3}{z_1^2} - \dfrac{1}{z_1^6} = \dfrac{-1 + 3z_1^4 + 5z_1^6}{z_1^6} = \varphi(z_1)$. Для функции $\varphi(z_1)$ точка $z_1 = 0$ – полюс шестого порядка, поэтому для $f(z)$ точка $z = \infty$ – полюс шестого порядка.

2) $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$. Для этой функции получить разложение по степеням $z$ затруднительно, поэтому найдём $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = e^{\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z-1}} = e^0 = 1$; предел существует и конечен, поэтому точка $z = \infty$ – устранимая особая точка.

3) $f(z) = \sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$. Правильная часть разложения по степеням $z$ содержит бесконечно много слагаемых, поэтому $z = \infty$ – существенно особая точка. По другому этот факт можно установить исходя из того, что $\lim\limits_{z\to\infty} \sin z$ не существует.

**Вычет функции в бесконечно удалённой особой точке**

Для конечной особой точки $z_1$ $\underset{z_1}{\operatorname{res}} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$, где $\gamma$ – контур, не содержащий других, кроме $z_1$, особых точек, проходимый так, что область, им ограниченная и содержащая особую точку, остаётся слева (против часовой стрелки). Определим $\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z)$ аналогичным образом:




$\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$, где $\Gamma^-$ – контур, ограничивающий такую окрестность $U(\infty,r)$ точки $z=\infty$, которая не содержит других особых точек, и проходимый так, что эта окрестность остаётся слева (по часовой стрелке). Таким образом, все остальные (конечные) особые точки функции должны находиться внутри контура $\Gamma^-$. Изменим направление обхода контура $\Gamma^-$: $\oint\limits_{\Gamma^-} f(z)dz=-\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$. По основной теореме о вычетах $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{j=1}^{k}\underset{z_j}{\operatorname{res}} f(z)$, где суммирование ведётся по всем конечным особым точкам. Поэтому, окончательно, $\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z)=-\sum\limits_{j=1}^{k}\underset{z_j}{\operatorname{res}} f(z)$, т.е. вычет в **бесконечно удалённой особой точке равен сумме вычетов по всем конечным особым точкам, взятой с противоположным знаком**. Как следствие, имеет место **теорема о полной сумме вычетов**: если функция $w = f(z)$ аналитична всюду в плоскости $C$, за исключением конечного числа особых точек $z_1$, $z_2$, $z_3$, …, $z_k$, то сумма вычетов во всех конечных особых точках и вычета в бесконечности равна нулю.

Отметим, что если $z=\infty$ – устранимая особая точка, то вычет в ней может быть отличен от нуля. Так для функции $f(z)=\frac{1}{z}$, очевидно, $\underset{0}{\operatorname{res}} f(z)=1$; $z = 0$ – единственная конечная особая точка этой функции, поэтому $\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z)=-\underset{0}{\operatorname{res}} f(z)=-1$, несмотря на то, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, т.е. $z=\infty$ – устранимая особая точка.

# 10. РАСЧЁТНЫЕ ЗАДАНИЯ

## РАСЧЁТНОЕ ЗАДАНИЕ №1

### 1. Комплексная плоскость

1.1. Упростите следующие выражения:

$$a)\ (3-7i)+(-2+i)+(-1+5i);\quad b)\ (3-7i)(3+7i);\quad в)\ (1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right);\quad г)\ \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2};$$

$$д)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4.$$

1.2. Используя формулу Муавра вычислите:

$$a)\ \sqrt[5]{-4+3i};\quad b)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100};\quad в)\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{217};\quad г)\ \sqrt[3]{-2+2i}.$$

1.3. Запишите условие, означающее, что различные точки: $z_1, z_2, z_3$ и $z_4$ лежат на одной окружности или одной прямой.

1.4. Постройте на плоскости *(z)* множества, заданные следующими условиями:

$$a)\ |z+2|=2;\quad b)\ |z-2|+|z+2|=5;\quad в)\ |z-2|+|z+2|>3;\quad г)\ |z-z_1|=|z-z_2|;$$

$$д)\ 0<\operatorname{Re}(5z)<1;\quad е)\ -1<\operatorname{Im}(z-i)<5;\quad ж)\ |2z|>\left|1+z^2\right|.$$

1.5. Найдите наибольшее и наименьшее расстояние от начала координат до точек заданного множества ($a>0$):

$$a)\ \left|\frac{z+1}{z}\right|=a;\qquad b)\ \left|\frac{z+b}{z}\right|=a,\ b\in\Re.$$

### 2. Последовательности и ряды комплексных чисел

2.1. Исследуйте на сходимость числовые ряды с комплексными слагаемыми:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+i)^n};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n};\quad г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}.$$

2.2. Найдите радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(1+in)z^n$

и исследуйте поведение этого ряда на границе круга сходимости.

2.3. Вычислите радиус сходимости следующих степенных рядов:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n;\quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+i)z^n;\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n;\quad г)\ \sum_{n=0}^{\infty}i^n z^n.$$

2.4. Найдите множество внутренних точек области сходимости следующих рядов:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i\sqrt{3}}{z^n};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)(z+1-i)^n};\quad в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+4i)^n z^n};$$

$$г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n(z+1)^n};\quad д)\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n z^n}\right);\quad e)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right).$$

2.5. Установите кольцо сходимости для каждого из следующих рядов:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{z-i}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{5}\right)^n;\quad b)-\frac{1}{z+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n;$$

$$в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-1+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-1+i)^n;$$

$$г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n.$$

## 3. Функции комплексного переменного. Определение и геометрическое представление функции комплексного переменного

3.1. Найдите при отображении $w=1/z$ образы следующих множеств:

$$a)\ |z|=\frac{1}{3};\quad b)\ \operatorname{Re} z=0;\quad в)\ \operatorname{Im} z=0;\quad г)\ \arg z=\frac{\pi}{4}.$$

3.2. Найдите образы координатных осей $Ox$ и $Oy$ при следующих отображениях:

$$a)\ w=\frac{z-1}{z+1};\quad b)\ w=1+\frac{1}{z};\quad в)\ w=\frac{z+1}{z-1};\quad г)\ w=1-\frac{1}{z}.$$

3.3. Найдите модуль и главное значение аргумента для следующих значений функций в указанных точках:

$$a)\ w=\sin z,\quad z=\pi+i\ln 2;\qquad b)\ w=ze^z,\quad z=i\pi.$$

3.4. Вычислите значение $Ln$ и $ln$ в точках:

$$a)\ z=4+3i;\quad b)\ z=1-i;\quad в)\ z=-i.$$

3.5. Вычислите общее и главное значение указанных выражений:

$$a)\ i^{1/i};\quad b)\ 1^{i};\quad в)\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{i}.$$

3.6. Найдите модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

$$a)\ 2^{i};\quad b)\ 3^{2+i};\quad в)\ th\, i\pi.$$

3.7. Запишите в алгебраической форме указанные комплексные числа:

$$a)\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right);\quad b)\ \cos(\pi-i\ln 2);\quad в)\ sh\frac{i\pi}{2};\quad г)\ ctg\, i\pi.$$

3.8. Найдите действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

$$a)\ \cos(2+i);\quad b)\ \sin(2i);\quad в)\ ctg\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right).$$

3.9. Для каждой из функций: $e^{я}$, $\cos z$, $\sin z$, $tgz$ найдите множество точек z, в которых функция принимает: а) действительные значения; в) мнимые значения.

3.10. Докажите, что любому значению *Arccos(z)* соответствует такое значение *Arcsin(z)*, что сумма этих двух значений равна π/2. Докажите аналогичное утверждение для функций *Arctg(z*) и *Arcctg(z).*

3.11. Для каких значений *z* все значения функций *Arcsin(z), Arccos(z), Arctg(z)* являются действительными?

3.12. Найдите все значения следующих выражений:

$$a)\ Arc\sin\frac{1}{2};\quad b)\ Arc\cos 2;\quad в)\ Arc\sin i;\quad г)\ Arctg(1+2i)$$

3.13. Решите следующие уравнения:

$$a)\ e^{2z}+5e^{z}-6=0;\quad b)\ e^{z}+i=0;\quad в)\ \ln(z+i)=0;\quad г)\ chz+1=0;$$

$$д)\ \sin z=i\pi;\quad e)\ thz-1+i=0.$$

## 4. Дифференцирование функций комплексного переменного

4.1. Проверьте на аналитичность функции *sin z, ln z* и докажите, что *(sin z)'=cos z, (ln z)'=1/z.*

4.2. Найдите постоянные *a, b, c* при которых функция *f(z)=x+ay+i(bx+cy)* будет аналитична.

4.3. Найдите области, в которых функция $f(x)=x^2-y^2+2i|xy|$ является аналитической.

4.4. Проверьте, являются ли функции $|z|^2+2z$ и $(|z|+z)/2$ аналитическими.

4.5. Докажите, что функция $f(z)=\bar{z}$ нигде не является дифференцируемой.

4.6. Докажите, что если для аналитической в области $D$ функции $f(z)$ выполнено в этой области условие $|f(z)| = const$, то $f(z)$ в $D$ является постоянной.

4.7. Определите существуют ли аналитические функции $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$ для которых:
$a)\ u = x^2 - y^2;\quad b)\ v = x^2 - y^2;\quad в) u = y/\left(x^2 + y^2\right);\quad г)\ v = x/y^2.$ Если такие функции существуют, то найдите их.

4.8. Найдите аналитическую функцию, если известна её мнимая часть $v(x,y) = e^x \sin y + 2xy + 5y$ и задано условие $f(0)=10$.

4.9. Установите область сжатия и растяжения плоскости $(z)$ при отображениях: $a)\ w = z^2;\quad b)\ w = 1/z;\quad в)\ w = e^z.$

4.10. Пусть $u$ и $v$ – сопряжённые гармонические функции в области $D$, одновременно не обращающиеся в этой области в нуль. Будут ли функции $u/(u^2+v^2)$ и $-v/(u^2+v^2)$ гармоническими в $D$.

4.11. Найдите площадь области являющейся образом прямоугольника: $\left\{(x,y) \in \Re^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\ \right\}$ при отображении $w=e^z$.

(Используйте формулу $S = \iint\limits_D |f'(z)|^2 dxdy \quad при \quad отображении \quad w = f(z)$)

## 5. Интегрирование функций комплексного переменного

5.1. Вычислите контурные интегралы:

$$a)\ \oint\limits_{|z|=2} z \operatorname{Im} z^2 dz;\quad b)\ \oint\limits_{|z|=1} |z|^2 dz$$

5.2. Вычислите интеграл от функции $f(z) = \bar{z}$ по следующим путям интегрирования, соединяющим точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$:

а) прямая; в) парабола $y = x^2$; d) парабола $y = \sqrt{x}$; г) двухзвенная ломаная с промежуточной точкой $z_*=i$.

5.3. Зависит ли интеграл от функции $ze^z$ от пути интегрирования, соединяющего точки $z_1=-i$ и $z_2=i$. Вычислите этот интеграл.

5.4. Вычислите интеграл от однозначной ветви многозначной функции $1/\sqrt{z}$, принимающей в точке $z=1$ значение, равное 1, подуге полуокружности $|z| = 4, \operatorname{Im} z \ge 0$, проходящей от точки $z_1=-4$ до точки $z_2=4$.

5.5. Вычислите интеграл от функции $e^{\bar{z}}$ вдоль двухзначной ломанной с начальной точкой $z_1=0$, конечной точкой $z_2=1+i$ и промежуточной точкой $z_*$, равной: *а)* $z_*=1$; *в)* $z_*=i$.

5.6. Вычислите интеграл от функции $tgz$ вдоль дуги параболы $y=x^2$, соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

5.7. Вычислите интегралы вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, от следующих функций: $a)\ e^{|z|^2} \operatorname{Re} z;\quad b)\ e^{z^2} \operatorname{Re} z;\quad в)\ \frac{|z|}{|z|+1}.$

5.8. Пусть функция *f(z)* аналитична в некоторой односвязной области *D*, ограниченной контуром *L*, непрерывна в замыкании этой области и постоянна на *L* . Докажите, что она постоянна в *D*.

5.9. Вычислите контурные интегралы:

$$a)\ \oint_{L_1}\frac{sh(z+1)}{z+1}dz;\quad b)\ \oint_{L_2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}dz;\quad в)\ \oint_{L_3}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz;\quad г)\ \oint_{L_4}\frac{e^{\pi z}dz}{\left(z^2+1\right)^2};$$

*здесь* $L_1$ *– астроида* $x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$; $L_2$ *– окружность* $|z|=2$;

$L_3$ *– окружность* $x^2+y^2-2x=0$; $L_4$ *– окружность* $x^2+y^2-2y=0$.

## РАСЧЁТНОЕ ЗАДАНИЕ №2

## 6. Функциональные ряды на комплексной плоскости

6.1. Докажите, что $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2}$ *и* $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$

6.2. Докажите следующие тождества:

$$a)\ \frac{2}{(1=z)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)\,(n+2)\,z^n,\ |z|<1;$$

$$b)\ \frac{1}{\left(1=z^2\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)z^{2n},\quad |z|<1.$$

6.3. Разложите в ряд Тейлора следующие функции в окрестности точки *z=0*:

$$a)\ \frac{2z-5}{z^2-5z+6};\quad b)\ \frac{1}{\left(z^2-1\right)\left(z^4+4\right)};\quad в)\ \sin^4 z+\cos^4\ z.$$

6.4. Разложите в ряд Лорана по степеням $z–z_0$ функции:

$$a)\ \frac{ze^{2z}}{z-1},\ z_0=1;\quad b)\ \frac{z}{z-1}+\cos\frac{1}{z^2},\ z_0=0.$$

Укажите области, где справедливы эти разложения.

6.5. Разложите в ряд Лорана в указанной области функции:

$$a)\ \frac{z}{\left(z^2-4\right)\left(z^2-1\right)},\ 1<|z|<2;\quad b)\ \cos^2\frac{1}{z},\ |z|>0.$$

6.6. Разложите в ряд Тейлора по степеням $\varsigma$ функции:

$$a)\ \ln(2-z),\ z=\varsigma;\quad b)\ \frac{1}{3z+1},\ \varsigma=z+2;\quad в)\ \cos z,\ \varsigma=z+\frac{\pi}{4}.$$

Найдите области сходимости полученных рядов.

6.7. Найдите все разложения по степеням $z–z_0$ функций:

$$a)\ \frac{2z+1}{z^2+z-2},\ z_0=0;\quad b)\ \frac{2}{z^2-1},\ z_0=-2;\quad в)\ \frac{z+2}{z^2-4z+3},\ z_0=1;\quad г)\ \frac{1}{\left(z^2-4\right)^2},\ z_0=-2.$$

Укажите области сходимости полученных рядов.

6.8. Найдите три–четыре первых члена разложения в степенной ряд по степеням $z$ для функций:

$$a)\ \frac{1}{1+e^z};\quad b)\ \frac{1}{5+e^{-z}};\quad в)\ \ln(1+\cos z);\quad г)\ \ln\cos z.$$

Укажите радиусы сходимости этих рядов.

6.9. Просуммируйте в круге $|z|<1$ следующие ряды:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} n z^z;\quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n};\quad в)\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1};\quad г)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}.$$

## 7. Нули и особые точки аналитической функции

7.1. Установите кратность нуля $z=0$ для функций:

$$a)\ z^2\left(e^{z^2}-1\right);\quad b)\ z^3\left(z^6-1\right)+\sin z^3;\quad в)\ e^{\sin z}-e^{tg\, z}.$$

7.2. Пусть точка $z=a$ является нулём кратности $l$ для функции $f(z)$ и нулём кратности $m$ для функции $g(z)$. Установите, чем будет эта точка для функций:

$$a)\ f(z)\,g(z);\quad b)\ f(z)+g(z);\quad в)\ f(z)/g(z).$$

7.3. Найдите нули и установите кратность каждого из них для функций:

$$a)\ z^2+4;\quad b)\ \frac{z^2+4}{z^4};\quad в)\ z\sin z;\quad г) 1-\cos z;\quad д)\ \left(1-e^z\right)\left(z^2-4\right);$$

$$е)\ \sin z-tg\, z;\quad ж)\ \cos^3 z;\quad з)\ \left(1-\sqrt{2-2\cos z}\right)^2.$$

7.4. Разложите в ряд Лорана в окрестности изолированных особых точек ($z=\infty$) функции:

$$a)\ \frac{1}{z(1-z)};\quad b)\ z^2 e^{\frac{1}{z}};\quad в)\ \frac{1}{z^2+1};\quad г)\ z^2\sin\frac{1}{z-1}.$$

Установите области, в которых эти разложения имеют место.

7.5. Выясните, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в точке $z=0$ и удовлетворяющая условиям:

$$a)\ f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2};\quad b)\ f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}.$$

7.6. найдите особые точки (включая точку $z=\infty$) и установите их тип для следующих функций:

$$a)\ \frac{1}{z-z^3};\quad b)\ \frac{z^5}{\left(z^2-1\right)^2};\quad в)\ \frac{e^z}{1+z^2};\quad г)\ \frac{z^2+1}{e^z};\quad д)\frac{1-e^z}{2+e^z};\quad е) z\,e^{-z};\quad ж)\ e^{-\frac{1}{z^2}};$$

$$з)\ e^{z-\frac{1}{z}};\quad и)\ \sin\frac{1}{z-1};\quad к)\ \frac{1}{\sin z-\cos z};\quad л)\ \frac{z^7}{\left(z^2-1\right)^2\cos\frac{1}{z-1}};\quad м)\frac{1}{z^2}+\sin\frac{1}{z};\quad н)\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}.$$

7.7. Постройте примеры функций, имеющие на расширенной плоскости только следующие особенности:

а) полюс второго порядка в точке $z=\infty$;

в) один полюс порядка m;

б) полюс второго порядка в точке *z=0* с главной частью *1/z*$^2$ лорановского разложения функции в окрестности этой точки и простой полюс в бесконечно удалённой точке;

г) полюс порядка *n* в точке *z=0* и полюс порядка *m* в точке $z=\infty$.

7.8. Найдите общий вид функции, имеющей на расширенной комплексной плоскости: а) один простой полюс; б) один полюс порядка *m*; в) *n* простых полюсов.

## 8. Вычеты в изолированных особых точках

8.1. Найдите вычеты в изолированных особых точках функций:

$$a)\ \frac{1}{\sin z};\quad b)\ \frac{e^z}{z^2+1};\quad в)\ \cos z-\sin z;\quad г)\ e^z\cos\frac{1}{z};\quad д)\ \frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}.$$

8.2. Вычислите:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(z+1)^n}\right),\quad n\in N.$$

8.3. Пусть функции *f(z)* и $\varphi(z)$ являются аналитическими в точке *z=a*, причём $f(a)\neq 0$ и $\varphi(z)$ имеют в этой точке нуль кратности 2. Чему равен

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f(z)}{\varphi(z)}?$$

8.4. Пусть функция *f(z)* является аналитической во всех точках плоскости ***C*** за исключением конечного числа изолированных особых точек. Докажите, что для чётной функции *f(z)* верны равенства

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)-\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=0,\quad \operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=-z_0}f(z),\quad z_0\in C,$$

А для нечётной функции *f(z)* – равенство

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\operatorname*{Res}_{z=-z_0}f(z),\quad z_0\in C.$$

8.5. Пусть функция $f(z)$ в бесконечно удалённой точке имеет полюс порядка $m$. Докажите, что

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}\left(z^{m+2}\ f^{(m+1)}(z)\right).$$

8.6. Вычислите контурные интегралы:

$$а)\ \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z\left(z^2+4\right)};\quad b)\ \oint\limits_{|z|=1/2}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\ \cos z\right)dz;\quad в)\ \oint\limits_{|z|=1} z^3\ \cos\frac{1}{z}dz;$$

$$г)\ \oint\limits_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz;\quad д)\ \oint\limits_{|z|=1/2}\frac{ch\,3z-\cos 4iz}{z^2\ \sin 5z}dz;\quad е)\ \oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z^2-1}{z^3}dz;$$

$$ж)\ \oint\frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z}dz;\quad з)\ \oint\limits_{|z|=1/2}\frac{z^5-3z^3+5}{z^4}dz;\quad и)\ \oint\limits_{|z|=1}\frac{ch\,4z-8z^2-1}{z^4\sin\left(8z/3\right)}dz;$$

$$к)\ \oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{1/z}}{1+z^6}dz;\quad л)\ \oint\limits_{|z|=0,3}\frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2\ sh\,3\pi z}dz;\quad м)\ \oint\frac{sh\,2z-z}{z^2\sin^2\left(z/3\right)}dz.$$

8.7. Вычислите при помощи вычетов интегралы:

$$а)\ \int\limits_0^\infty\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3};\quad b)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4x+13\right)^2};\quad в)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x dx}{x^2-2x+10};$$

$$г)\ \int\limits_0^\infty\frac{x^2dx}{1+x^4};\quad д)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3+5x\right)\sin x dx}{x^4+10x^2+9};\quad е)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 5x dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)};$$

$$ж)\ \int\frac{x\sin x dx}{x^2+25};\quad з)\ \int\limits_0^\infty\frac{\cos x dx}{x^2+1};\quad к)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5+4\sin x};$$

$$л)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(\sqrt{5}+\cos x\right)^2};\quad м)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-4\sin x}.$$

8.8. Найдите логарифмические вычеты следующих функций относительно указанных контуров:

$$а)\ \frac{z}{1+z^3},\quad |z|=2;\quad b)\ \cos z+\sin z,\quad |z|=4;\quad в)\ tg^3 z,\quad |z|=6.$$

8.9. Установите число нулей многочленов $P_4(z)$, лежащих в правой полуплоскости:

$$а)\ 2z^4-2z^3+3z^2-z+1;\quad b)\ z^4-5z^3+3;\quad в)\ z^4+z^3+4z^2+2z+3;\quad г)\ z^4+6z^3-4.$$

8.10. Установите число корней следующих уравнений в указанных областях:

$a)\ z^9-2z^6+z^2-8z-2=0,\quad |z|<1;$

$b)\ z^7-5z^4+z^2-2=0,\quad |z|<1;$

$в)\ z^4-5z+1=0,\quad 1<|z|<2;$

$г)\ z^4-8z+10=0,\quad 1<|z|<3.$

8.11. Выясните число корней в каждом квадранте комплексной плоскости у следующих уравнений:

$a)\ z^4+2z^3+3z^2+z+2=0;\quad b)\ 2z^4-3z^3+3z^2-z+1=0;$

$в)\ z^4+z^3+4z^2+3z+3=0.$

## 9. Геометрические принципы теории функций комплексного переменного

9.1. Докажите теорему об обратной функции с помощью теории функций многих действительных переменных.

9.2. Пусть функция *f(z)* аналитична в круге $|z|<R$, непрерывна в замкнутом круге $|z|\le 1$ и $f(z)>a$ при $|z|=R$. Докажите, что если $|f(0)|<a$, то в круге $|z|<R$ есть хотя бы один нуль функции *f(z).*

9.3. Пусть функция *f(z*), аналитическая в круге $|z|<1$и непрерывная в замкнутом круге $|z|\le 1$, удовлетворяет условиям $|f(z)|\le M, |z|=1\ и\ f(a)=0$ где *a* –некоторая точка круга. Докажите, что в круге верно неравенство

$$|f(z)|\le M\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|.$$

9.4. Пусть функция *f(z)* аналитична в круге $|z|<1$, причём $f(0)=0, |f(z)|<1\ при\ |z|<1$, а в точке *z=0* функция *f(z)* непрерывна и *f(1)=1*. Докажите, что если существует производная $f^1(1)$, то $|f^1(1)|\ge 1$.

9.5. Докажите, что функция $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^3}$ однолистна в круге $|z|<{}^1\!/_2$, но не является однолистной ни в каком круге $|z|<r$ радиуса *r>1/2.*

## 10. Конформные отображения

10.1. Найдите все линейные функции, отображающие нижнюю плоскость на верхнюю.

10.2. Существует ли линейное отображение, переводящее треугольник с вершинами в точках *–1–i, –i* и *–3i* в треугольник с вершинами в точках *1+i, 3+i* и *5+i*?

10.3. Найдите угол между двумя параллельными прямыми в бесконечно удалённой точке.

10.4. Докажите, что при дробно–линейном отображении $w=\dfrac{(az+b)}{(cz+d)}, ad\ne bc$ прямые $\mathrm{Re}(\lambda z)=\alpha, \lambda\in C, \alpha\in\Re$, не проходящие через точку *z=–d/c*, переходят в окружности

$$|w-w_0|=\left|\frac{(ad-bc)\lambda}{2\alpha|c|^2+2\operatorname{Re}(c\overline{d\lambda})}\right|, \qquad w_0=\frac{\bar{c}b\lambda+2\alpha a\bar{c}+a\overline{d\lambda}}{2\alpha|c|^2+2\operatorname{Re}(c\overline{d\lambda})}.$$

10.5. Выясните существует ли отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$, при котором точки $z=0$ и $z_1=1/2$ переходят в точки $w=a$ и $w=-a$, где $0<a<1$.

10.6. Найдите дробно–линейную функцию, отображающую круг $|z-2|<1$ на круг $|w-2i|<2$ так, что $w(2)=i$ и $\arg w^1(2)=\pi/2$.

10.7. Найдите образы следующих областей при указанных дробно–линейных отображениях:

$a)$ $\{z\in C: 0<\operatorname{Re}z<1/2\}$, $\quad w=1/z$;

$b)$ $\{z\in C: 0<\arg z<\varphi_0\le\pi\}$, $\quad w-1/z$;

$в)$ $\{z\in C: |z|>R\}$, $w=(z-i)/z$;

$г)$ $\{z\in C: |z|<1, \operatorname{Im}z>0\}$, $\quad w=(1+z)/(1-z)$.

10.8. Найти образ области, ограниченной окружностями $|z+1|=1, \left|z-i\sqrt{3}\right|=1 \quad и \quad |z-1|=1$, при отображении $w=1/z$.

10.9. Найдите отображение $w(z)$, переводящее круг $|z|<2$ на полуплоскость $\operatorname{Re}w>0$ так, что $w(0)=0 \; и \; \arg w^1(0)=\pi/2$.

10.10. Найдите отображение $w(z)$, переводящее круг $|z|<1$ на полуплоскость $|w|<1$ так, что $w(0)=0 \; и \; \arg w^1(0)=-\pi/2$.

10.11. Найдите такое отображение верхней полуплоскости $Imz>0$ на нижнюю полуплоскость $Imz<0$, что $w(a)=\bar{a} \quad и \quad \arg w^1(a)=-\pi/2$, $\operatorname{Im}a>0$.

10.12. Докажите, что дробно–линейное отображение $\dfrac{w-w_0}{w-\overline{\overline{w_0}}}=\dfrac{z-z_0}{z-\overline{\overline{z_0}}}e^{i\alpha}$ полуплоскости $Imz>0$ на полуплоскость $Imw>0$ удовлетворяет условиям $w(z_0)=w_0, \arg w^1(z_0)=\alpha$.

10.13. Отобразите на верхнюю полуплоскость круговую луночку $D=\{z\in C: |z|>1, |z-i|<1\}$.

10.14. Отобразите на верхнюю полуплоскость:

а) круг $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[1/2,1]$ действительной оси;

в) круг $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[-1,0]$ действительной оси;

б) верхнюю половину круга $|z|<1$ с разрезом по отрезку мнимой оси, соединяющему точки $z_1=ai \quad и \quad z_2=i, \quad 0<a<1$.

10.15. Постройте отображение полуплоскости $\operatorname{Im}z<1$ с выкинутым кругом на следующие области с указанной нормировкой:

а) круг $|w|<1$, $w(3i)=0$, $\arg w^1(-3i)=\pi/3$;

в) круг $|w|<1$, $w(-3i)=(-1+i)/2$, $\arg w^1(-3i)=\pi/2$;

б) верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}w>0$, $w(-3i)=1+i$, $\arg w^1(-3i)=\pi$.

10.16. Отобразите на верхнюю полуплоскость плоскость с заданным разрезом:

а) по отрезку *[–1,b]* действительной оси;

в) по дуге окружности $|z|=1$, соединяющей точки $e^{\pm i\alpha}$ и проходящей через точку *z=–1*.

10.17. Отобразите на верхнюю полуплоскость:

а) полосу *0<Rez<1* с разрезом по отрезку *[0, h], h<1* действительной оси;

б) область $\{z \in C : |z-1| > 1, \quad |z+1| > 1\}$с разрезом по лучу $[2,+\infty]$ действительной оси.

10.18. Найдите образы сектора, ограниченного лучами $\arg z = \varphi_0 \quad u \quad \arg z = \varphi_0 + 2\pi/n$, полосы $y_0 < y < y_0 + 2\pi$ и полосы $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ при отображении $w = z^n, n \in N$.

10.19. Найдите образы:

а) полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z > 0$ и полосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ при отображении $w = \cos z$;

б) полуполосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z < 0$ и полосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ при отображении $w = \sin z$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бушуева, Н.А. Функции комплексного переменного / Н.А.Бушуева, И.А. Трутнев. – Красноярск: ИПК СФУ, 2007.
2. Бушуева, Н.А. Функции комплексного переменного: курс лекций / Н.А.Бушуева, И.А. Трутнев. – Красноярск: ИПК СФУ, 2007.
3. Бушуева, Н.А. Функции комплексного переменного: сборник задач / Н.А.Бушуева, И.А. Трутнев, Поляклва И.А. – Красноярск: ИПК СФУ, 2007.
4. Бричикова, Е.А. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление: справочное пособие к решению задач / Е.А. Бричикова, А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск, ТетраСистемс, 2002. – 206 с.
5. Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие для вузов / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 2006.
6. Евграфов, М.А. Сборник задач по теории аналитических функций: учебное пособие для вузов / М.А. Евграфов [и др.]. – М.: Наука, 1972. –187с.
7. Захарова, Ю.В. Функции комплексного переменного: учебно–методическое пособие / Ю.В. Захарова, Титов П.С. – Красноярск: СФУ, 2012.
8. Куваев, М.Р. Математический анализ: учебник для вузов: в 3 ч. Ч. 3 / М.Р. Куваев. – Томск: ТГУ, 1980.
9. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного: учебное пособие для вузов / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987.
10. Лунц, Г.Л. Функции комплексного переменного: учебник для вузов / Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 2002.
11. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций: учебное пособие для вузов/ А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1978.
12. Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций: учебное пособие для вузов / А.И. Маркушевич. – М.: Наука. 1980.
13. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие для втузов / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2007
14. Посицельская, Л.Н. Теория функций комплексного переменного в задачах и упражнениях: учебное пособие / Л.Н. Посицельская. – М.: Физматлит, 2007.
15. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексной переменной: учебник для вузов / И.И.Привалов. – М.: Наука, 1999.
16. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов. – 6–е изд., стер. / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Физматлит, 2010.
17. Тимошкин, А.В. Элементы теории аналитических функций: методические указания / А.В. Тимошкин. – Томск: Изд–во ТГПУ, 2007.
18. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики: типовые расчеты: учебное пособие для вузов / В.Ф. Чудесенко. – М.: Наука, 2007.

19. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / М. И. Шабунин. – М.: Лаборатория знаний, 2013.
20. Шабат, М.И. Введение в теорию функций комплексной переменной: учебник для вузов / М.И. Шабат. – М.: Наука, 1984.
21. Шахмейстр, А. Х. Комплексные числа: пособие для школьников, абитуриентов и преподавателей / А. Х. Шахмейстр. – Спб., М.: Петроглиф, 2011.

**Информационные электронно–образовательные ресурсы**

1. Методика решения задач повышенной сложности по теории функций комплексного переменного / А.Н. Барменков, Е.В. Сандракова, В.Б. Шерстюков, О.В. Шерстюкова. – М.: МИФИ, 2010. – 100 с. – ISBN 978–5–7262–1374–3; То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=231541
2. Шабунин, М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / М.И. Шабунин, М.И. Карлов, Е.С. Половинкин. – 3–е изд. (эл.). – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 363 с. – ISBN 978–5–9963–0801–9; То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222878
3. Туганбаев, А.А. Функции комплексного переменного: учебное пособие / А.А. Туганбаев. – М.: Флинта, 2012. – 47 с. – ISBN 9785976514065; То же [Электронный ресурс]. – URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115140

# СОДЕРЖАНИЕ

**Учебное издание**

Светлана Станиславовна Ахтамова,
Людмила Николаевна Бадуленко

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Редактор И.А. Вейсиг
Корректура авторов
Компьютерная вёрстка С.С. Ахтамовой

Подписано в печать 08.05.2018 Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная Тираж 50 экз.
Усл. печ. л. 4,6 Печать плоская
Заказ № ___

Библиотечно–издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел/факс (391) 206–26–67; http:/bik.sfu–kras.ru
e–mail: publishing_house@sfu–kras.ru