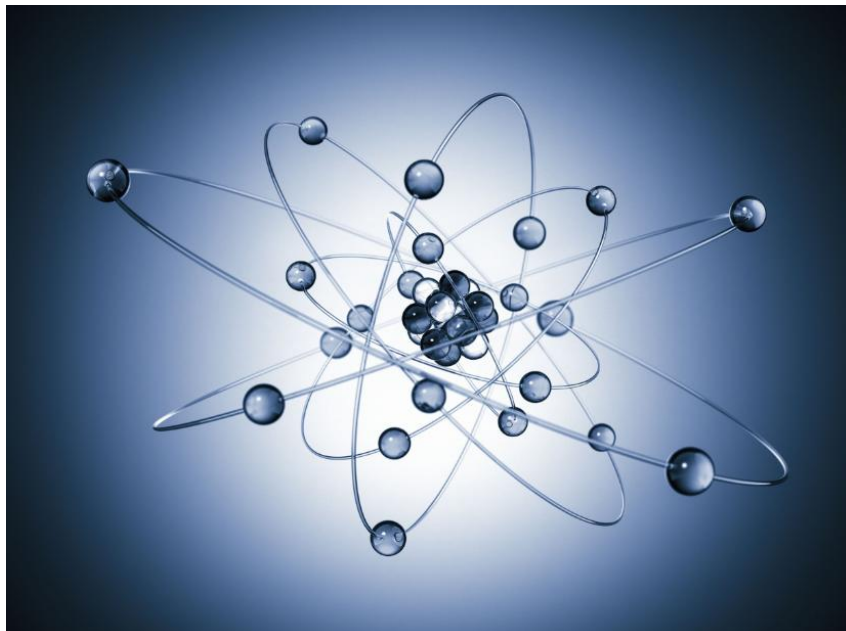


Н.Ф. Романцова

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

*Учебное пособие*



Лесосибирск - 2021

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 44.03.05 – «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», направленность 44.03.05.34 «Математика и физика» (Протокол № 907 от «14» апреля 2021 г.)

**Лесосибирск-2021**

УДК 539.1 (075): 536.7 (075)  
ББК 22.36 Я73+22.365.5Я 73  
Р 69

Рецензенты:

А.Н. Втюрин, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института физики им.  
Л.В. Киренского СО РАН  
А.М. Иванова, учитель высшей категории, МБОУ СОШ № 2 г. Лесосибирска

Романцова Н.Ф.

Р 69 Молекулярная физика и термодинамика: учеб. пособие / Н.Ф.Романцова. –  
Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2021. – 85 с.

ISBN 978-5-7638-4474-0

Пособие по курсу общей физики раздел «Молекулярная физика и термодинамика»  
включает основные теоретические сведения, примеры решения задач и задачи для  
самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, изучающих физику в качестве основной дисциплины,  
обучающихся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями  
подготовки)», направленность (профиль) 44.03.05.34 «Математика и физика»

ISBN 978-5-7638-4474-0

© Романцова Н.Ф., 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	5
1.	Основные понятия и определения молекулярной физики и термодинамики	6
2.	Основные положения молекулярно-кинетической теории газа (вещества). Масса молекул. Число Авогадро. Количество вещества	7
3.	Модель идеального газа. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа	9
4.	Температура и средняя кинетическая энергия теплового движения молекул. Термометры. Температурные шкалы	12
5.	Уравнение состояния идеального газа. Газовые законы	16
6.	Барометрическая формула. Распределение Максвелла	27
7.	Внутренняя энергия. Работа газа. Количество теплоты. Теплоемкость. Первое начало термодинамики	37
8.	Тепловые машины. Коэффициент полезного действия тепловых машин. Цикл Карно. Второе и третье начала термодинамики. Энтропия	48
9.	Явления переноса	62
10.	Свойства жидкости. Поверхностное натяжение	71
	Библиографический список	78
	Приложения	80

## **ВВЕДЕНИЕ**

Основной задачей данного учебного пособия является привитие студентам навыков самостоятельного изучения физики. Предлагаемый материал содержит изложение основных вопросов, знание которых должно способствовать изучению раздела курса общей физики «Молекулярная физика и термодинамика».

Курс общей физики, включающий несколько разделов, на нефизических специальностях проходят в течение четырёх семестров. Данное учебное пособие предназначено в помощь студентам при изучении теоретического материала и при решении задач на практических занятиях по разделу «Молекулярная физика и термодинамика». В нём приведены, кроме теоретического материала, основные формулы, облегчающие усвоение алгоритмов решения типичных задач разной степени сложности, сопровождаемые необходимыми комментариями, и задачи для самостоятельного решения.

Практические занятия - важная компонента учебного процесса. Они учат студентов анализировать изучаемые физические явления, использовать на практике полученные теоретические знания и приобщают к самостоятельной работе. Поэтому каждый раздел пособия заканчивается разработанными автором практическими занятиями, которые содержат вопросы для подготовки к занятиям, примеры решения задач по данной теме и задачи для самостоятельного решения.

## 1. Основные понятия и определения молекулярной физики и термодинамики

*Молекулярно-кинетическая теория.* Теория, объясняющая тепловые явления в макроскопических телах и внутренние свойства этих тел на основе представлений о том, что все тела состоят из отдельных хаотически движущихся частиц, носит название молекулярно-кинетической теории.

*Термодинамика* – это теория тепловых явлений, в которой не учитывается молекулярное строение тел.

Совокупность тел, составляющих макроскопическую систему, называется *термодинамической системой*.

Система может находиться в различных состояниях. Величины, характеризующие состояния системы, называются параметрами состояния: давление  $P$ , температура  $T$ , объем  $V$  и т.д. Связь между  $P$ ,  $T$ ,  $V$  специфична для каждого тела и называется уравнением состояния.

Любой параметр, имеющий определенное значение для каждого равновесного состояния, является функцией состояния системы.

*Равновесной* называется такая система, параметры состояния которой одинаковы во всех точках системы и не изменяются со временем (при неизменных внешних условиях). При этом в равновесии находятся отдельные макроскопические части системы.

Термодинамическое равновесие существенно отличается от механического тем, что, хотя параметры системы остаются неизменными, частицы, из которых состоит система, находятся в непрерывном движении. Например, рассмотрим газ, равномерно распределенный по всему объему. При огромном числе молекул некоторые из них отклоняются от равномерного распределения. Параметры состояния не остаются строго постоянными, а испытывают небольшие колебания внутри своих равновесных состояний. Такие колебания называются *флуктуациями*.

*Термодинамический процесс* – переход из одного равновесного состояния в другое.

*Релаксация* – возвращение системы в равновесное состояние. Если система выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе, т.е. подвержена внешним воздействиям, то в течение достаточно большого промежутка времени самопроизвольно происходит процесс перехода к равновесному состоянию. Время перехода – время *релаксации*.

Если равновесие установилось, то система самопроизвольно не сможет выйти из него. Например, если опустить горячий камень в холодную воду, то через некоторое время наступит равновесное состояние: температуры выровняются. Но обратный процесс невозможен – температура камня самопроизвольно не увеличивается.

## **2. Основные положения молекулярно-кинетической теории газа (вещества). Масса молекул. Число Авогадро. Количество вещества**

В основе молекулярно-кинетической теории строения вещества лежат три положения, каждое из которых в настоящее время доказано с помощью опытов: вещество состоит из частиц; эти частицы движутся хаотически и непрерывно; частицы взаимодействуют друг с другом.

*Размеры молекул.* Для определения размеров молекул рассмотрим опыт Р. Рэлея, который заключается в следующем: на поверхность воды, налитой в большой сосуд, помещают каплю оливкового масла. Капля растекается по поверхности воды и образует пленку. Рэлей предположил, что, когда капля перестает растекаться, ее толщина становится равной диаметру одной молекулы. Опыты показывают, что молекулы различных веществ имеют разные размеры, но для оценки размеров молекул принимают значение, равное  $10^{-10}$  м

*Относительная молекулярная масса.* Так как массы молекул очень малы, удобно использовать в расчетах не абсолютные значения масс, а

относительные. Относительной молекулярной (или атомной) массой вещества  $M_r$  называют отношение массы молекулы (или атома)  $m_0$  данного вещества к  $1/12$  массы атома углерода  $m_{0c}$ :

$$M_r = m_0 / 1/12 m_{0c}.$$

Величина  $M_r$  не имеет наименования.

*Количеством вещества  $\nu$*  называют отношение числа молекул  $N$  в данном теле к числу  $N_A$  атомов в 0,012 кг углерода

$$\nu = \frac{N}{N_A}.$$

где  $\nu$  – количество вещества;  $N$  – число молекул в веществе;  $N_A$  – постоянная Авогадро. Количество вещества выражают в молях. *Моль* – количество вещества, содержащего столько же молекул, сколько содержится атомов в 0,012 кг углерода.



Рис. 1. Авогадро Амедео (1776–1856) – итальянский физик и химик

Основные физические работы Авогадро (рис.1) посвящены молекулярной физике. Уже первыми своими исследованиями в этой области он заложил основы молекулярной теории, выдвинув молекулярную гипотезу. Открыл важный для химии и физики закон, по которому в равных объемах различных газов при одинаковых условиях содержится одинаковое количество молекул (закон Авогадро). Исходя из этого закона, ученый разработал метод определения молекулярного и атомного веса.

Число молекул в моле равно *числу Авогадро*:  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

$$\text{Масса молекулы вещества } m_0 = \frac{m}{N} = \frac{m}{\nu N_A} = \frac{M}{N_A}.$$



где  $m_0$  – масса молекулы вещества;  $m$  – масса вещества;  $N$  – число молекул в веществе;  $\nu$  – количество вещества;  $N_A$  – постоянная Авогадро;  $M$  – молярная масса вещества.

*Молярной массой* называют массу вещества, взятого в количестве одного моля.

$$M = m_0 N_A.$$

Молярную массу  $M$  можно выразить через относительную массу. Выполняя несложные преобразования, получим:  $M = 10^{-3} M_r$  кг/моль.

При одинаковых температурах и давлениях все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. Число молекул идеального газа, содержащихся в  $1\text{ м}^3$  при нормальных условиях, называется *числом Лошмидта*:

$$N_L = \frac{P_0}{kT_0} = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

### 3. Модель идеального газа. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Под *идеальным газом* мы будем понимать газ, для которого:

- радиус взаимодействия двух молекул много меньше среднего расстояния между ними (взаимодействуют только при столкновении);
- столкновения молекул между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие (выполняются законы сохранения энергии и импульса);
- объем всех молекул газа много меньше объема, занятого газом.

Рассмотрим подробнее, что представляет собой один из основных параметров состояния – давление  $P$ . Еще в XVIII в. Даниил Бернулли предположил, что давление газа есть *следствие столкновения газовых молекул со стенками сосуда*. Именно давление чаще всего является единственным сигналом присутствия газа.

Итак, находящийся под давлением газ или жидкость действует с некоторой силой на любую поверхность, ограничивающую его объем. В этом случае сила  $\Delta F$  действует по нормали к ограничивающей объем поверхности  $\Delta S$ . Давление на поверхность  $P = \frac{\Delta F}{\Delta S}$ .

Можно также говорить о давлении внутри газа или жидкости. Его можно измерить, помещая в газ или жидкость небольшой куб с тонкими стенками, наполненный той же средой.

Поскольку среда покоится, на каждую грань куба со стороны среды действует одна и та же сила  $\Delta F$ . В окрестности куба давление равно  $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ , где  $\Delta S$  – площадь грани куба. Из этого следует, что *внутреннее давление* является одним и тем же во всех направлениях и во всем объеме, независимо от формы сосуда. Этот результат называется *законом Паскаля*: если к некоторой части поверхности, ограничивающей газ или жидкость, приложено давление  $P$ , то оно одинаково передается любой части этой поверхности.

Одним из примеров использования закона Паскаля является гидравлический домкрат (рис. 2).

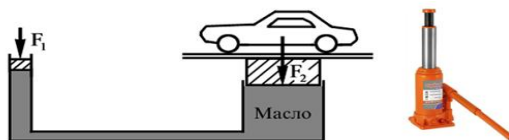


Рис. 2. Принцип действия гидравлического домкрата и его внешний вид

Гидравлический пресс, создающий давление 160 МПа, сжимает металлический контейнер с мусором объемом 250 л в течение нескольких секунд в диск толщиной 20 см.

Вычислим давление, оказываемое газом на одну из стенок сосуда (рис. 3).

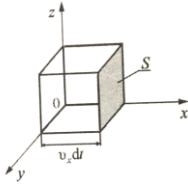


Рис. 3

Обозначим:  $n$  – концентрация молекул в сосуде;  $m$  – масса одной молекулы. Движение молекул по всем осям равновероятно, поэтому к одной из стенок сосуда площадью  $S$  подлетает в единицу времени  $(1/6) nv_x$  молекул, где  $v_x$  – проекция вектора скорости на направление, перпендикулярное стенке.

Каждая молекула обладает импульсом  $mv_x$ , но стенка получает импульс  $2mv_x$  (при абсолютно упругом ударе  $mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$ ). За время  $dt$  о стенку площадью  $S$  успеет удариться число молекул, которое заключено в объеме  $V$ :  $n = Sv_x dt$ .

Общий импульс, который получит стенка,  $p = Fdt$ . Тогда

$$Fdt = 1/6 n 2m v_x v_x S dt = 1/3 m n v_x^2 S dt.$$

Разделив обе части равенства на  $S$  и  $dt$ , получим выражение для давления:

$$F/S = 1/3 m n v_x^2 = P.$$

Таким образом, мы определили давление как силу, действующую в единицу времени на единицу площади:

$$P = dF/dS.$$

Наивно полагать, что все молекулы подлетают к стенке  $S$  с одной и той же скоростью  $v_x$  (рис. 3). На самом деле молекулы имеют разные скорости, направленные в разные стороны, т.е. скорости газовых молекул – случайные величины. Более точно случайную величину характеризует среднеквадратичная величина. Поэтому под скоростью  $v^2$  понимаем среднеквадратичную скорость

$$\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}.$$

Вектор скорости, направленный произвольно в пространстве, можно разделить на три составляющих:

$$\langle v_{\text{KB}}^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle.$$

Ни одной из этих проекций нельзя отдать предпочтение из-за хаотичного теплового движения молекул, т.е. в среднем  $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$ . Следовательно, на другие стенки будет точно такое же давление. Тогда можно записать в общем случае:

$$P = \frac{1}{3} mn \langle v_{\text{KB}}^2 \rangle = \frac{2}{3} n \frac{m \langle v_{\text{KB}}^2 \rangle}{2}.$$

Отсюда получим основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов:

$$P = \frac{2}{3} n \langle E_k \rangle,$$

где  $\langle E_k \rangle$  – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы.

Итак, давление газов определяется средней кинетической энергией поступательного движения молекул.

Уравнение  $P = \frac{2}{3} n \langle E_k \rangle$  называют основным уравнением, потому что давление  $P$  – макроскопический параметр системы – здесь связан с основными характеристиками – массой и скоростью движения молекул.

Рассмотрим единицы измерения давления.

По определению  $P = F/S$ , поэтому размерность давления Н/м<sup>2</sup>.

$$1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}; 1 \text{ атм} = 9,8 \text{ Н/см}^2 = 98066 \text{ Па} \approx 10^5 \text{ Па}.$$

$$1 \text{ мм рт.ст.} = 133,3 \text{ Па}; 1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}; 1 \text{ атм} = 0,98 \text{ бар}.$$

Нормальные условия:  $P_0 = 10^5 \text{ Па}$ ,  $T_0 = 273 \text{ К}$ .

#### **4. Температура и средняя кинетическая энергия теплового движения молекул. Термометры. Температурные шкалы**

Из опыта известно, что если провести в соприкосновение два тела, горячее и холодное, то через некоторое время их температуры выравниваются. Что перешло от одного тела к другому? Раньше, во времена Ломоносова и Лавуазье, считали, что носителем тепла является некоторая жидкость – теплород. На

самом деле ничто не переходит, только изменяется средняя кинетическая энергия – энергия движения молекул, из которых состоят эти тела. Именно средняя кинетическая энергия атомов и молекул служит характеристикой системы в состоянии равновесия.

Это свойство позволяет определить параметр состояния, выравнивающийся у всех тел, контактирующих между собой, как величину, пропорциональную средней кинетической энергии частиц в сосуде. Чтобы связать энергию с температурой, Больцман ввел коэффициент пропорциональности  $k$ , который впоследствии был назван его именем:

$$T = \frac{2m \langle V_{кс}^2 \rangle}{3K \cdot 2} = \frac{3KT}{2} \quad (1)$$

где  $K = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж·К<sup>-1</sup> – постоянная Больцмана.

Величину  $T$  называют абсолютной температурой и измеряют в кельвинах (К). Она служит мерой кинетической энергии теплового движения частиц идеального газа.



Рис. 4. Людвиг Больцман

**Больцман Людвиг** (1844–1906) – австрийский физик-теоретик, один из основоположников классической статистической физики (рис. 4). Основные работы – в области кинетической теории газов, термодинамики и теории излучения. Вывел основное кинетическое уравнение газов, являющееся основой физической кинетики. Впервые применил к излучению принципы термодинамики.

Из (1) получим

$$E_k = \frac{m \langle v_{кс}^2 \rangle}{2} = \frac{3KT}{2} \quad (2)$$

Формула (2) применима для расчетов *средней кинетической энергии на одну молекулу идеального газа*. Можно записать

$$\frac{m \langle v_{кс}^2 \rangle}{2} N_A = k N_A T.$$

Обозначим  $k N_A = R$  – универсальная газовая постоянная, тогда

$$\frac{\mu \langle v_{кс}^2 \rangle}{2} = \frac{3RT}{2} \quad (3)$$

– это формула для *молярной массы газа*.

Так как температура определяется средней энергией движения молекул, то она, как и давление, *статистическая* величина, т.е. параметр, проявляющийся в результате совокупного действия огромного числа молекул. Поэтому не говорят: «температура одной молекулы», нужно сказать: «энергия одной молекулы, но температура газа».

С учетом вышесказанного о температуре, основное уравнение молекулярно-кинетической теории можно записать по-другому. Так как из (3)  $P = \frac{2}{3} n \langle E_k \rangle$ ,

где  $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT$ , то, следовательно,

$$P = nKT \quad (4)$$

В таком виде основное уравнение молекулярно-кинетической теории употребляется чаще.

Наиболее естественно было бы применить для измерения температуры определение

$$T = \frac{m \langle V^2 \rangle}{3K}$$

т.е. измерять кинетическую энергию поступательного движения молекул газа. Однако чрезвычайно трудно проследить за молекулой газа и еще сложнее – за атомом. Поэтому для определения температуры идеального газа используется уравнение

$$PV = \frac{mRT}{M}$$

Действительно, величины  $P$  и  $V$  легко поддаются измерению.

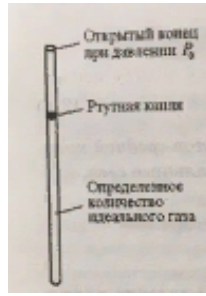


Рис. 5 Газовый термометр

В качестве примера рассмотрим изображенный на рис. 5 простейший газовый термометр с постоянным делением. Объем газа в трубке

$$V = \frac{nk}{P_0}T$$

Как видно, он пропорционален температуре, а поскольку высота подъема ртутной капли пропорциональна  $V$ , то она пропорциональна и  $T$ .

Существенно то, что в газовом термометре необходимо использовать идеальный газ. Если же в трубку вместо идеального газа поместить фиксированное количество жидкой ртути, то мы получим обычный ртутный термометр. Хотя ртуть далеко не идеальный газ, при комнатной температуре ее объем изменяется почти пропорционально температуре. Термометры, в которых вместо идеального газа используются какие-либо другие вещества, приходится калибровать по показаниям точных газовых термометров.

В физике и технике за абсолютную шкалу температур принята шкала Кельвина, названная в честь знаменитого английского физика Лорда Кельвина; 1 К – одна из основных единиц СИ.

Кроме того, используются и другие шкалы:

- Шкала Цельсия – точка таяния льда – 0 °С, точка кипения воды – 100 °С.
- Шкала Фаренгейта – точка таяния льда 32 °F, точка кипения воды – 212 °F.

Соотношение между этими двумя шкалами:

$$t^{\circ}C = \left(\frac{5}{9}\right)(t^{\circ}F - 32^{\circ}C).$$

Абсолютная температура  $T$  связана с температурой  $t$  по шкале Цельсия соотношением  $T(K) = 273,15 + t^{\circ}C$ .

На рис. 6 приведено сравнение разных температурных шкал.

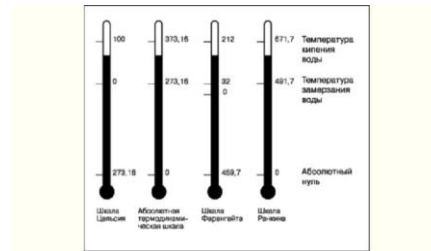


Рис. 6. Разные температурные шкалы

Так как кинетическая энергия  $m\sigma^2/2 \geq 0$  всегда, то и температура  $T$  не может быть отрицательной величиной.

Своеобразие температуры заключается в том, что она не аддитивна (аддитивный – получаемый сложением). Если мысленно разбить тело на части, то температура всего тела не равна сумме температур его частей (длина, объем, масса, сопротивление и т.д. – аддитивные величины). Поэтому температуру нельзя измерять, сравнивая ее с эталоном.

Современная термометрия основана на шкале идеального газа, где в качестве термометрической величины используют давление. Шкала газового термометра является абсолютной ( $T = 0$ ;  $P = 0$ ).

## 5. Уравнение состояния идеального газа. Газовые законы

В XVII-XIX вв. были сформулированы опытные законы газов. Кратко вспомним их.

Изопроцессы идеального газа – процессы, при которых один из параметров остается неизменным.

1. Изохорический процесс, закон Шарля.



Изохорическим процессом называется процесс, протекающий при постоянном объеме  $V$ . Поведение газа при изохорическом процессе подчиняется закону Шарля: при постоянном объеме и неизменных значениях массы газа и его молярной массы отношение давления газа к его абсолютной температуре остается постоянным:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \dots P_0/T_0$$

Или  $P/T = \text{const}$ .

График изохорического процесса на  $PV$ - диаграмме называется изохорой.

Рассмотрим графики изохорического процесса на  $PV$ - и  $PT$ -диаграммах (рис.7).

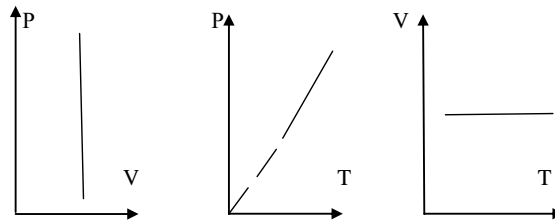


Рис. 7. Графики изохорического процесса

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изохорического процесса записывается в виде

$$P = P_0(1 + \alpha t).$$

где  $P_0$  – давление газа при  $0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha$  – температурный коэффициент давления газа, равный  $1/273 \text{ град}^{-1}$ .

## 2. Изобарический процесс, закон Гей-Люссака.

Изобарическим процессом называется процесс, протекающий при постоянном давлении. Поведение газа при изобарическом процессе подчиняется закону Гей-Люссака: при постоянном давлении и неизменных значениях массы газа и его молярной массы отношение объема газа к его абсолютной температуре остается постоянным:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \dots = V_0/T_0$$

Или

$$\frac{V}{T} = const$$

График изобарического процесса на VT-диаграмме называется изобарой.

Рассмотрим графики изобарического процесса на PV- и VT-диаграммах (рис. 8).

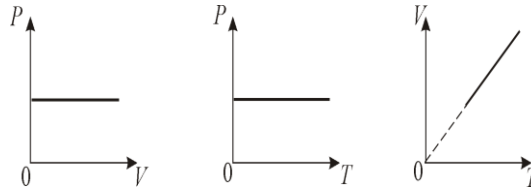


Рис. 8. Графики изобарического процесса

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изобарического процесса записывается в виде  $V = V_0(1 + \alpha t)$ , где  $\alpha = \frac{1}{273} \text{град}^{-1}$  – температурный коэффициент расширения.

### 3. Изотермический процесс, закон Бойля – Мариотта.

Изотермическим процессом называется процесс, протекающий при постоянной температуре T.

Поведение идеального газа при изотермическом процессе подчиняется закону Бойля – Мариотта: при постоянной температуре и неизменных значениях массы газа и его молярной массы произведение объема газа на его давление остается постоянным:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 = \dots = P_0 V_0$$

$$\text{Или } PV = const.$$

График изотермического процесса называется *изотермой* и изображается на PV-диаграмме в виде гиперболы. С повышением температуры газа изотерма удаляется от начала координат (рис.9).

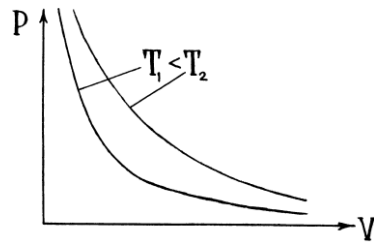


Рис. 9. Графики изотермического процесса

4. Адиабатический процесс – термодинамический процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.

Уравнение адиабаты

$$PV^\gamma = \text{const},$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

На рис. 10 показаны графики различных изопроцессов в  $PV$ -координатах. Как видим, адиабата идет круче, чем изотерма.

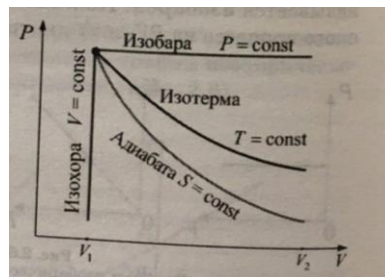


Рис. 10. Графики различных изопроцессов в  $PV$ -координатах

4. Политропический процесс – процесс, при котором теплоемкость газа остается постоянной. Политропический процесс – общий случай всех перечисленных выше процессов.

5. Закон Авогадро: при одинаковых температурах и давлениях в равных объемах любого газа содержится одинаковое число молекул:  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ . Следствием этого закона является то, что моли

любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях объем моля равен:  $V_{\mu} = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

6. Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений  $P_i$  входящих в нее газов:

$$P_{\text{см}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

Парциальное давление  $P_i$ -давление, которое оказывал бы данный газ, если бы он один занимал весь объем.

Давление смеси газов  $P_{\text{см}} = P_1 + P_2, v_{\text{см}} = \frac{m_1}{\mu_1} + m_2/\mu_2,$

$$P_{\text{см}} = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V} + \frac{m_2 RT}{\mu_2 V} = \frac{RT}{V} \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right)$$

7. Объединенный газовый закон (закон Клапейрона).

В соответствии с законами Бойля-Мариотта и Гей-Люссака Клапейрон сделал заключение, что для данной массы газа

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \text{ или } \frac{PV}{T} = \text{const}$$

### Практическая часть

#### Практическое занятие № 1-2

*Тема:* «Основные положения молекулярно-кинетической теории вещества. Газовые законы. Основное уравнение МКТ для идеального газа. Уравнение Клапейрона–Менделеева».

*Вопросы для подготовки к занятию:*

1. Дайте сравнительную характеристику молекулярно-кинетическому, термодинамическому и статистическому методам.
2. Перечислите основные положения МКТ вещества и газа. В чем состоит их экспериментальное подтверждение?
3. Что является объектом изучения МКТ? Приведите пример. Поясните значение терминов «состояние» и «параметры состояния». Покажите на примере.
4. Что называется давлением? Раскройте механизм давления газа.

5. Что характеризуется понятием «температура»? Поясните значение этого термина с позиций МКТ.
6. Каковы способы измерения температуры? Какие имеются термометрические шкалы? Как они соотносятся?
7. Какой газ называется идеальным?
8. Опишите модель «идеального газа».
9. Выведите основное уравнение МКТ и уравнение состояния идеального газа.
10. Сформулируйте законы Авогадро и Дальтона.
11. Что означают термины: *атом, молекула, ион, относительная молекулярная масса, количество вещества, моль, молярная масса, постоянная Авогадро, плотность, концентрация?*

Задачи по данной теме можно поделить на несколько типов:

- задачи с применением основных положений МКТ (определение молярной массы, плотности, концентрации, массы одной молекулы и т.д.);
- задачи на применение основного уравнения МКТ, т.е. требующие рассмотреть давление газа и его механизм;
- задачи на уравнение состояния идеального газа для одного газа постоянной массы;
- задачи на уравнение состояния идеального газа для газа при условии, что его масса меняется;
- задачи на расчет параметров смеси газов, в том числе с учетом закона Дальтона.

#### Методические указания к решению типовых задач

*Задача № 1.* В сосуде вместимостью  $V = 1$  л находится кислород массой  $m = 1$  г. Определите концентрацию  $n$  молекул кислорода в сосуде. ( $1,88 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ )

*Указания по решению.* Согласно основным положениям МКТ данный макрообъект «кислород массой  $m = 1$  г» состоит из совокупности микрообъектов «молекул», причем масса одной молекулы  $m_0$  (вещество

однородное в отличие, например, от смеси газов), а их число в данном примере  $N$ . Исходя из сказанного, можно записать равенство:

$$m = N \cdot m_0.$$

Далее действуем согласно определению концентрации как числа молекул в единице объема, т.е.

$$n = \frac{N}{V}.$$

Пока записано только два равенства, в которых имеется три неизвестных величины:  $N$ ,  $m_0$ ,  $n$ . Требуется еще одно равенство. Для его нахождения заметим, что до сих пор нами не использовалось одно данное задачи, а именно то, что известен вид газа, а значит, дана его молярная масса (находим с помощью таблицы Менделеева).

По определению молярная масса – это масса одного моля вещества, т.е. числа Авогадро  $N_A$  его молекул, это запишется так:

$$\mu = N_A \cdot m_0.$$

Последнее равенство не содержит новых неизвестных, т.е. дополняет систему имеющихся уравнений для нахождения искомой величины.

Проделайте самостоятельно вычисления и сравните ответ.

*Задача № 2.* Найти молярную массу смеси кислорода массой  $m_1 = 25$  г и азота массой  $m_2 = 75$  г.

*Решение.* Молярная масса смеси есть отношение массы смеси  $m_{см}$  к количеству вещества смеси, т.е.

$$\mu_{см} = m_{см} / \nu_{см}. \quad (1)$$

Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси:

$$m_{см} = m_1 + m_2,$$

тогда количество вещества смеси

$$\nu_{см} = \nu_1 + \nu_2 = m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2.$$

Подставив в формулу (1) выражения для  $m_{см}$  и  $\nu_{см}$ , получим

$$\mu_{\text{см}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}.$$

После вычислений найдем  $\mu_{\text{см}} = 30 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

*Задача № 3.* В баллоне вместимостью  $V = 10$  л находится гелий под давлением  $p_1 = 1$  МПа и при температуре  $T_1 = 300$  К. После того как из баллона было взято  $m = 10$  г гелия, температура в баллоне понизилась до  $T_2 = 290$  К. Определить давление  $p_2$  гелия, оставшегося в баллоне.

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2,$$

где  $m_2$  – масса гелия в баллоне в конечном состоянии;  $\mu$  – молярная масса гелия;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Выразим искомое давление:

$$p_2 = m_2 R T_2 / (\mu V). \quad (1)$$

Массу  $m_2$  гелия выразим через массу  $m_1$ , соответствующую начальному состоянию газа, и массу гелия, взятого из баллона :

$$m_2 = m_1 - m. \quad (2)$$

Масса  $m_1$  гелия также находим из уравнения Менделеева-Клапейрона для начального состояния гелия

$$m_1 = \mu p_1 V / (R T_1). \quad (3)$$

Подставив выражения масс (2) и (3) в (1), найдём

$$p_2 = \left( \frac{\mu p_1 V}{R T_1} - m \right) \frac{R T_2}{\mu V} = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m R T_2}{\mu V}.$$

Производим вычисления, учитывая, что  $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Получим  $p_2 = 0,364$  МПа.

*Задача № 4.* 10 г кислорода находятся под давлением 3 атм. при температуре 10 °С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем 10 л. Найти: 1) объем газа до расширения; 2) температуру газа после расширения; 3) плотность газа до расширения; 4) плотность газа после расширения.

*Решение.* Будем считать кислород в состоянии 1 (до расширения) и в состоянии 2 (после расширения) идеальным газом, тогда он подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона и его состояния 1 и 2 определяются уравнениями  $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$  и  $p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$ . Так как по условию задачи  $p_1 = p_2 = p$ , т.е. процесс расширения кислорода изобарический, то из этих уравнений можно найти искомые величины:

$$V_1 = (m/\mu)(RT_1/p); \quad T_2 = pV_2\mu/(m.R).$$

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, находим соотношение для плотности газа:  $\rho = m/V = p\mu/RT$ . Тогда плотности газа в состояниях 1 и 2 равны:  $\rho_1 = p\mu/RT_1$ ;  $\rho_2 = p\mu/RT_2$ .

Вычисления дают следующие результаты:  $V_1 = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ;  $T_2 = 1170 \text{ К}$ ;  $\rho_1 = 4,14 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_2 = 1 \text{ кг/м}^3$ .

*Задача № 5.* Найти среднюю кинетическую энергию движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию движения всех молекул кислорода массой 4 г.

*Решение.* На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия  $\langle \epsilon_i \rangle = 1/2 kT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – термодинамическая температура газа. Поступательному движению двухатомной молекулы кислорода соответствуют три степени свободы, вращательному – две. Тогда средняя кинетическая энергия движения молекулы

$$\langle \epsilon \rangle = 5/2 kT. \quad (1)$$

Кинетическая энергия движения всех молекул газа



$$E_k = N \langle \varepsilon \rangle \quad (2)$$

Число всех молекул газа

$$N = \nu N_A = N_A m / \mu. \quad (3)$$

Подставив выражение  $N$  в формулу (2), получаем

$$E_k = 5kTN_A m / (2\mu) = 5RTm / (2\mu). \quad (4)$$

Произведём вычисления, учитывая, что для кислорода  $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль:

$$\langle \varepsilon \rangle = 1,21 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}; E_k = 910 \text{ Дж}.$$

*Задача № 6.* Плотность некоторого газа  $\rho = 0,06 \text{ кг/м}^3$ , средняя квадратичная скорость его молекул  $\sqrt{\bar{v}^2} = 500 \text{ м/с}$ . Найти давление  $p$ , которое газ оказывает на стенки сосуда.

*Решение:* Давление газа определяется уравнением:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m\bar{v}^2}{2}.$$

Кроме того,  $n$  и  $m$  связаны соотношением

$$n = \frac{\rho}{m}.$$

Следовательно,  $\rho = nm$ .

Таким образом, получаем

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{\rho\bar{v}^2}{3} = \frac{0,06 \cdot 25 \cdot 10^4}{3} = 5 \text{ кПа}$$

*Задача № 7.* Найти число ходов поршня, необходимое для того, чтобы поршневым насосом откачать сосуд емкостью 5 л от нормального давления до давления, в 100 раз меньшего, если при одном ходе поршня захватывается  $3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$  воздуха.

*Решение.* Если поршень движется медленно, то расширение газа происходит изотермически. На основании закона Бойля-Мариотта после первого хода

поршня  $p_0 V_0 = p_1 (V_0 + V) \Rightarrow p_1 = p_0 \frac{V_0}{V_0 + V}$ . В конце второго хода поршня

$p_2 = p_1 \frac{V_0}{V_0 + V} = p_0 \left( \frac{V_0}{V_0 + V} \right)^2$ . В конце  $n$ -го хода поршня  $p_n = p_0 \left( \frac{V_0}{V_0 + V} \right)^n$ .

Логарифмируя это равенство, получим:

$\lg p_n = \lg p_0 + n \lg (V_0 / (V_0 + V))$ , откуда

$$n = \lg(p_0/p_n) / \lg(V_0/(V_0+V)) \approx 80.$$

#### Задачи для самостоятельного решения.

1. В сосуде при температуре  $t = 20$  °С и давлении  $p = 0,2$  МПа содержится смесь газов – кислорода массой  $m_1 = 16$  г и азота массой  $m_2 = 21$  г. Определите плотность смеси.
2. Определите число  $N$  атомов в  $m=1$  кг водорода и массу одного атома водорода.
3. Определите плотность смеси газов водорода массой  $m_1 = 8$  г и кислорода массой  $m_2 = 64$  г при температуре  $T = 290$  К и при давлении  $p = 0,1$  МПа. Газы считать идеальными.
4. Баллон вместимостью 20 л содержит смесь водорода и азота при температуре 290 К и давлении 1 МПа. Определите массу водорода, если масса смеси равна 150 г.
5. В сосуде вместимостью 5 л при нормальных условиях находится азот. Определите: 1) количество вещества; 2) массу азота; 3) концентрацию его молекул в сосуде.
6. Объем газа уменьшили в два раза, а температуру увеличили в полтора раза. Во сколько раз увеличилось давление газа?
7. Для измерения собственного объема сыпучего материала его помещают в цилиндр, который герметически закрывают поршнем. Затем измеряют давление воздуха  $p_1$  и  $p_2$  при одной и той же температуре и двух положениях поршня,

когда суммарный объем воздуха и материала равен  $V_1$  и  $V_2$ . Каков объем материала по этим данным?

8. Давление воздуха внутри бутылки равно 0,1 МПа при температуре  $7^\circ\text{C}$ . На сколько нужно нагреть бутылку, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть, прикладывая к ней силу 10 Н. Сечение пробки  $2\text{ см}^2$ .

9. В цилиндрическом сосуде с газом находится в равновесии тяжелый поршень. Масса газа и его температура над поршнем и под ним одинакова. Отношение внутреннего объема верхней части сосуда к внутреннему объему нижней равно 3. Каким будет это соотношение, если температуру газа увеличить в 2 раза?

10. Найдите формулу соединения азота с кислородом, если 1 г его в газообразном состоянии в объеме 1 л создает при температуре  $17^\circ\text{C}$  давление 314 гПа.

11. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом? Весом оболочки шара пренебречь. Молярная масса воздуха 29 г/моль.

12. Сколько молекул газа находится в сосуде вместимостью  $480\text{ см}^3$  при температуре  $20^\circ\text{C}$  и давлении 25 кПа?

13. В сосуде объемом 2 л находится 6 г углекислого газа  $\text{CO}_2$  и 4 г окиси азота NO при температуре  $127^\circ\text{C}$ . Найдите давление смеси в сосуде.

#### 6. Барометрическая формула. Распределение Максвелла

Среди различных состояний любой макроскопической системы особое место занимают *равновесные состояния*. Это состояния, в которых параметры системы не изменяются со временем, в системе отсутствуют потоки тепла, молекул и их импульса, причем для поддержания такого состояния не нужны никакие внешние воздействия на систему. В состоянии термодинамического равновесия в системе устанавливаются:

- равномерное распределение частиц по объему системы (в отсутствие внешних полей);
- равновероятное распределение молекул по направлениям скорости;
- максвелловское распределение молекул по значениям модуля скорости.

Закон распределения молекул по скоростям Максвелла описывается некоторой функцией  $f(V)$ , которая называется *функцией распределения* молекул по скоростям. Если разбить диапазон скоростей  $v$  молекул на малые интервалы, равные  $dv$ , то на каждый такой интервал будет приходиться некоторое число молекул  $dN(v)$ , имеющих скорости, заключенные в интервале от  $v$  до  $v + dv$ . Функция  $f(v)$  определяет относительное число молекул  $dN(v)/N$ , скорости которых лежат в указанном интервале:

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv$$

(здесь  $N$  – общее число молекул в системе). Максвелл установил конкретный вид функции  $f(v)$ :

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}.$$

Из этого выражения видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (массы его молекул  $m$ ) и от температуры  $T$ . График функции распределения приведен на рис. 11.

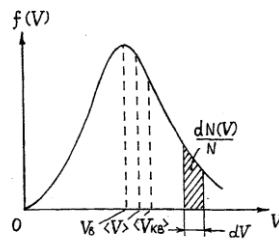


Рис. 11. График функции распределения молекул по скоростям

Относительное число молекул  $dN(v)/N$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , находится как площадь заштрихованной полоски. Из графика следует, что функция распределения стремится к нулю при  $v \rightarrow 0$  и  $v \rightarrow \infty$  и проходит через максимум при некоторой скорости  $v_e$ , называемой *наиболее вероятной*, или *вероятнейшей, скоростью*. Продифференцировав функцию распределения Максвелла и приравняв производную нулю, можно показать, что

$$v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Наряду с наиболее вероятной скоростью, распределение молекул по скоростям можно характеризовать *средней*  $\langle v \rangle$  и *средней квадратичной*  $\langle v_{кв} \rangle$  скоростями. Они определяются выражениями

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \quad \text{и} \quad \langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2},$$

где  $v_i$  – скорость  $i$ -й молекулы.

Используя функцию распределения Максвелла, можно показать, что

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \quad \text{и} \quad \langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Распределение молекул идеального газа по кинетическим энергиям определяет долю  $dN(\varepsilon)/N$  из общего числа  $N$  молекул, которые имеют кинетические энергии  $\varepsilon = mv^2/2$ , заключенные в интервале от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ :

$$dN(\varepsilon) = Nf(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon,$$

где  $f(\varepsilon)$  – функция распределения молекул по кинетическим энергиям.

Если газ находится во внешнем силовом поле (например, в поле силы тяжести), распределение его молекул по объему перестает быть равномерным. В этом случае концентрацию молекул в той области пространства, где их потенциальная энергия во внешнем поле равняется  $U$ , можно найти по формуле, выражающей *распределение Больцмана* молекул по потенциальным энергиям:

$$n = n_0 e^{-U/kT},$$

где  $n_0$  – концентрация молекул в той области, где их потенциальная энергия принята равной нулю.

Используя распределение Больцмана, известное уравнение  $p = nkT$  и выражение для потенциальной энергии молекулы в поле силы тяжести  $U = mgh$ , можно получить так называемую *барометрическую формулу*, определяющую зависимость давления газа от высоты  $h$ :

$$p = p_0 e^{-mgh/kT} = p_0 e^{-\rho gh/kT},$$

где  $p_0$  – давление на высоте  $h = 0$ , т.е. на уровне моря.

#### Практическое занятие № 3-4

*Тема: «Барометрическая формула. Распределение Максвелла»*

*Вопросы для подготовки к занятию:*

1. Запишите барометрическую формулу и поясните входящие в нее величины.
2. Что такое распределение Больцмана? Раскройте его значение. Запишите формулу и поясните входящие в нее величины.
3. Какие теории называются динамическими (статистическими)? В чем разница между динамическими и статистическими законами?
4. Что такое функция распределения? Поясните на примере функции распределения молекул идеального газа по скоростям.
5. Запишите распределение Максвелла и поясните входящие в него величины.
6. Какая скорость называется средней, среднеквадратичной и вероятнейшей? Как их можно найти, зная формулу функции распределения молекул газа по скоростям?
7. Опишите опыты Перрена, Штерна. Каково их значение?

### Методические указания к решению типовых задач

*Задача № 1.* Какая часть молекул кислорода при  $t = 0^\circ \text{C}$  обладает скоростями  $v$  от 100 до 110 м/с?

*Решение.* Согласно закону Максвелла

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-U^2} U^2 \Delta U \quad \Delta v = v_1 - v = 110 - 100 = 10 \text{ м/с}.$$

Наиболее вероятная скорость:

$$v_g = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{0,032}} = 376 \text{ м/с}$$

Относительная скорость:

$$U = \frac{v}{v_g} = \frac{100}{376}; U^2 = \left(\frac{100}{376}\right)^2 = 0,071,$$

$$e^{-U^2} = e^{-0,071} = 0,93,$$

$$\Delta U = \frac{\Delta v}{v_g} = \frac{10}{376}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{3,14}} \cdot 0,93 \cdot 0,071 \cdot \frac{10}{376} = 0,004 = 0,4\%$$

То есть число молекул, скорости которых лежат в заданном интервале, равно 0,4% заданного числа молекул.

*Задача № 2.* Обсерватория расположена на высоте  $h = 3250 \text{ м}$  над уровнем моря. Найти давление воздуха на этой высоте. Температуру воздуха считать постоянной и равной  $t = 5^\circ \text{C}$ . Молярная масса воздуха  $M = 0,029 \text{ кг/моль}$ . Давление воздуха на уровне моря  $p_0 = 101,3 \text{ кПа}$ .

*Решение.* Используя барометрическую формулу, получим:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} = 101,3 \cdot 10^3 \cdot \exp\left(-\frac{0,029 \cdot 10 \cdot 3250}{8,31 \cdot 278}\right) = 67,2 \text{ кПа}$$

*Задача № 3.* Полагая температуру воздуха и ускорение свободного падения не зависящими от высоты, определить, на какой высоте  $h$  над уровнем моря концентрация воздуха в 2 раза меньше своего значения на уровне моря. Температуру воздуха считать равной  $0^\circ \text{C}$ .

*Решение.* Согласно закону Больцмана:  $\frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$ .

Таким образом: 
$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{n}{n_0} = \frac{8,31 \cdot 273 \cdot \ln 2}{0,029 \cdot 10} = 5,5 \text{ км}$$

*Задача № 4.* На какой высоте плотность воздуха в 2 раза меньше, чем его плотность на уровне моря? Считайте, что температура воздуха везде одинакова и равна  $T = 273 \text{ К}$ .

*Указания по решению.* Рассмотрим барометрическую формулу

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}},$$

где  $p$  и  $p_0$  – давления на разных уровнях с разностью высот  $h$ ;  $m_0$  – масса молекулы,  $T$  – температура, причем предполагается, что  $T = \text{const}$  и не меняется при переходе от начального рассматриваемого уровня к конечному.

Далее с учетом основного уравнения МКТ в виде  $p = nkT$ , при условии  $T = \text{const}$  получим:

$$nkT = n_0 k T e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} \Rightarrow nkT = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}},$$

где  $\mu$  – молярная масса газа (в данной задаче  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  – молярная масса воздуха).

Теперь, вспомнив определения плотности и концентрации вещества, запишем:

$$\rho = n m_0.$$

Имеем:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Согласно условию задачи делаем рисунок.



По условию  $\rho = \frac{1}{2}\rho_0$ , т.е.  $\frac{1}{2}\rho_0 = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \Rightarrow e^{\frac{\mu gh}{RT}} = 2$ ; логарифмируем по

основанию  $e$ :  $\frac{\mu gh}{RT} = \ln 2$ ,  $h = \frac{RT \ln 2}{\mu g}$

**Задача № 5.** Температура окиси азота NO  $T = 300$  К. Определите долю молекул, скорости которых лежат в интервале от  $v_1 = 820$  м/с до  $v_2 = 830$  м/с.

*Указания по решению.* Используем закон распределения молекул газа по скоростям (распределение Максвелла). Функция распределения в этом случае

$$\text{имеет вид } f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

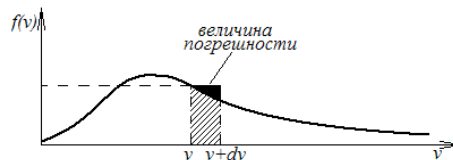
По определению функции распределения

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv},$$

где  $\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv$  – доля молекул со скоростями от  $v$  до  $v + dv$ .

По условию:  $v = v_1$ ,  $\Delta v = v_2 - v_1$

Рассмотрим график  $f(v)$ :



На нем доля  $\frac{dN(v)}{N}$  равна площади под графиком на участке от  $v$  до  $v + dv$  (заштрихована). Поэтому в расчетах в случае конечных значений  $\Delta v$ , принимаемых приближенно за  $dv$ , получаем замену истинной площади площадью прямоугольника. В данной задаче согласно этой методике расчета получаем:

$$k_1 = \frac{dN}{N} = f(v_1) \cdot \Delta v = \left[ \begin{matrix} v_1 = 820 \text{ м/с} \\ \Delta v = 10 \text{ м/с} \end{matrix} \right] = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v_1^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v_1^2}{2kT}} \cdot \Delta v.$$

Вычислим:

$$k_1 = 4 \cdot 3,14 \left( \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,31 \cdot 300} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 820^2 \cdot \exp\left( -\frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot 820^2}{2 \cdot 8,31 \cdot 300} \right) \cdot 10 \approx 0,004 = 0,4 \%$$

Точный расчет соответствует нахождению интеграла:  $\frac{dN}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$ .

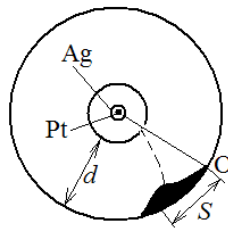
Вычислим в системе Mathcad:  $k_2 = \int_{820}^{830} f(v) dv = 3,776 \cdot 10^{-3}$ .

Найдем погрешность первого приближения:

$$\varepsilon = \frac{|k_2 - k_1|}{k_2} \cdot 100\% = 3,786\% \approx 4\%$$

**Задача № 6.** Какой средней скоростью  $v_{\text{ср}}$  обладала молекула паров серебра, если ее угловое смещение в опыте Штерна составляло  $\varphi = 5,4^\circ$  при частоте вращения прибора  $n = 150 \text{ с}^{-1}$ . Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно  $d = 2 \text{ см}$ .

*Указания по решению.* Опыт Штерна осуществляется на установке: два коаксиальных цилиндра, по оси внутреннего цилиндра с щелью натянута платиновая проволока, покрытая слоем серебра, которая нагревается током при откачанном воздухе. При нагревании серебро испаряется. Атомы серебра, вылетая через щель, попадают на внутреннюю поверхность второго цилиндра, давая изображение щели O.



Если прибор привести во вращательное движение вокруг общей оси цилиндров, то атомы серебра не осядут против щели, а сместятся от точки O на некоторое расстояние  $S$ . Изображение щели получается размытым. Исследуя

толщину осажденного слоя, можно оценить распределение молекул по скоростям, которое соответствует распределению Максвелла.

Зная радиусы цилиндров, их угловую скорость вращения, а также измеряя  $S$ , можно вычислить скорость движения атомов серебра при данной температуре проволоки. Результаты опытов показали, что средняя скорость атомов серебра близка к той, которая следует из закона Максвелла.

Итак, за время прохождения молекулы Ag расстояния  $d$  между цилиндрами они повернутся, двигаясь с частотой  $n$ , на угол  $\varphi$ . Получаем:

$$\frac{d}{v_{cp}} = \frac{\varphi}{2\pi n} \Rightarrow v_{cp} = \frac{2\pi n d}{\varphi}.$$

Следует заметить, что при вычислении значение угла поворота  $\varphi$  должно быть переведено в радианы.

*Задача № 7.* Определите наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении  $p = 40$  кПа составляет  $\rho = 0,35$  кг/м<sup>3</sup>.

*Указания по решению.* Воспользуемся формулой  $v_g = \sqrt{2 \cdot \frac{RT}{\mu}}$ . Из уравнения состояния выражаем плотность газа:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{\mu} \Rightarrow \frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho},$$

тогда  $v_g = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$ .

#### ***Задачи для самостоятельного решения***

1. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна 10<sup>0</sup>С
2. Каково давление воздуха в шахте на глубине 1 км, если считать, что температура по всей высоте постоянная и равна 22 <sup>0</sup>С, а ускорение свободного падения не зависит от высоты? Давление воздуха у поверхности Земли принять равным  $p_0$ .

3. Определите отношение давления воздуха на высоте 1 км к давлению на дне скважины глубиной 1 км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.
4. На какой высоте плотность воздуха в  $e$  раз меньше по сравнению с его плотностью на уровне моря? Температуру воздуха и ускорение свободного падения считать не зависящими от высоты.
5. У поверхности Земли молекул гелия почти в  $10^8$  раз, а водорода почти в  $10^6$  раз меньше, чем молекул азота. На какой высоте число молекул гелия будет равно числу молекул азота? Водорода? Принять среднюю температуру атмосферы равной  $0^\circ\text{C}$ .
6. На высоте 3 км над поверхностью Земли в  $1\text{ см}^3$  воздуха содержится примерно  $10^2$  пылинок, а у самой поверхности – примерно  $10^5$ . Определите среднюю массу пылинки и оцените ее размер, предполагая, что плотность пылинки  $1,5\text{ г/см}^3$ . Температура воздуха  $27^\circ\text{C}$ .
7. При какой температуре функция распределения по скоростям молекул водорода будет совпадать с функцией распределения по скоростям молекул азота при комнатной температуре?
8. Найдите отношение числа молекул водорода, имеющих проекцию скорости на ось  $x$  в интервале от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул водорода, имеющих проекцию скорости на ту же ось в интервале от 1500 до 1510 м/с. Температура водорода 300 К.
9. Источник атомов серебра создает узкий ленточный пучок, который попадает на внутреннюю поверхность неподвижного цилиндра радиусом 30 см и образует на ней пятно. Устройство начинает вращаться с угловой скоростью  $100\pi$  рад/с. Определите скорость атомов серебра, если пятно отклонилось на угол  $0,314$  рад от первоначального положения.

10. Определите скорости молекул азота при  $27^{\circ}\text{C}$ : 1) наиболее вероятную; 2) среднюю арифметическую; 3) среднюю квадратичную.
11. Определите давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность равна  $0,01 \text{ кг/м}^3$ , а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет  $480 \text{ м/с}$ .
12. Определите наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении  $40 \text{ кПа}$  равна  $0,35 \text{ кг/м}^3$ .
13. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на  $100 \text{ м/с}$ ?
14. Считая воздух газом, состоящим из одинаковых молекул, определите среднеквадратичную скорость молекул при нормальных условиях, если плотность воздуха при этом равна  $1,3 \text{ кг/м}^3$ .
15. Средняя квадратичная скорость некоторого газа при нормальных условиях равна  $480 \text{ м/с}$ . Сколько молекул содержит  $1 \text{ г}$  этого газа?

## 7. Внутренняя энергия. Работа газа. Количество теплоты. Теплоемкость.

### Первое начало термодинамики

Для идеального газа, молекулы которого не взаимодействуют на расстоянии, при не слишком высоких температурах можно считать, что внутренняя энергия равна сумме энергий теплового движения всех молекул. Тогда внутренняя энергия, приходящаяся на одну молекулу, равна  $\frac{i}{2}kT$ , а внутренняя энергия произвольной массы газа  $M$  определяется выражением

$$U = \nu RT = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT.$$

Возможны два различных способа изменения энергии макросистемы при ее взаимодействии с внешней средой: путем совершения *работы* и путем *теплообмена*. Работа совершается при силовом взаимодействии системы с окружающими телами и сопровождается направленным перемещением тел, ограничивающих систему (например, движением поршня в цилиндре). При

этом всегда изменяется объем системы. При бесконечно малом его изменении совершается работа  $\delta A = pdV$ , а при конечном изменении объема от  $V_1$  до  $V_2$  работа определяется выражением

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$$

При теплообмене имеет место передача кинетической энергии хаотического теплового движения от внешних тел к системе или наоборот. Количество энергии, переданное системе в результате теплообмена, называется *теплотой*, или *количеством теплоты*. Важной характеристикой теплообмена является *теплоемкость*.

*Теплоемкость тела  $C$*  равна количеству теплоты, необходимому для нагревания данной массы тела на 1 К:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \text{ Дж/К}$$

(здесь  $dT$  – изменение температуры тела при сообщении ему теплоты  $\delta Q$ ).

*Удельная теплоемкость вещества  $c$*  – количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{MdT}, \text{ Дж/(кг·К)}$$

где  $M$  – масса тела.

*Молярная теплоемкость вещества ( $c$ )* – количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{\delta Q}{\frac{M}{\mu} dT}, \text{ Дж/(моль·К)}$$

Теплоемкость зависит от того, в каких условиях протекает процесс теплообмена. Поэтому различают теплоемкость при постоянном объеме  $(c)_V$  и теплоемкость при постоянном давлении  $(c)_P$ .

*Первый закон (начало) термодинамики* устанавливает связь между подведенной к системе теплотой  $Q$ , изменением внутренней энергии системы  $\Delta U$  и работой  $A$ , совершенной системой над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A.$$

Для бесконечно малого изменения состояния системы уравнение первого закона термодинамики примет вид

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где  $dU$  – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы;  $\delta A$  – бесконечно малая работа;  $\delta Q$  – бесконечно малое количество теплоты.

Первый закон термодинамики позволяет рассчитать теплоемкость и работу расширения идеального газа при различных изопроцессах.

Например, при изохорическом процессе  $dV = 0$  и, следовательно,  $\delta A = 0$ . Тогда

$$\delta Q = dU = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R dT \text{ и}$$

$$(c)_v = \frac{i}{2} R.$$

При изобарическом процессе  $\delta Q = dU + \delta A = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R dT + p dV$  и, поскольку согласно

уравнению Менделеева-Клапейрона при этом  $p dV = \frac{M}{\mu} R dT$ ,

получаем  $\delta Q = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R dT + \frac{M}{\mu} R dT = \frac{M}{\mu} (\frac{i}{2} R + R) dT$  и, наконец,

$$(c)_p = \frac{i}{2} R + R = (c)_v + R.$$

Работа расширения идеального газа при изобарическом процессе определяется выражением

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = \frac{M}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

При изотермическом процессе в предыдущее подынтегральное выражение согласно уравнению Менделеева-Клапейрона подставим  $p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V}$  и после интегрирования получим:

$$A_{12} = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

*Адиабатическим* называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между макросистемой и окружающей средой ( $\delta Q = 0$ ). Из первого закона термодинамики следует, что для адиабатического процесса  $\delta A = -dU$ , т.е. работа против внешних сил совершается системой за счет уменьшения ее внутренней энергии. При адиабатическом процессе изменяются все три термодинамических параметра:  $p$ ,  $V$  и  $T$ . Связь между ними определяется одним из следующих соотношений:  $pV^\gamma = const$  (уравнение Пуассона),  $TV^{\gamma-1} = const$  или  $T^\gamma p^{1-\gamma} = const$ . В этих соотношениях безразмерная величина

$$\gamma = \frac{(c)_p}{(c)_v} = \frac{i+2}{i}$$

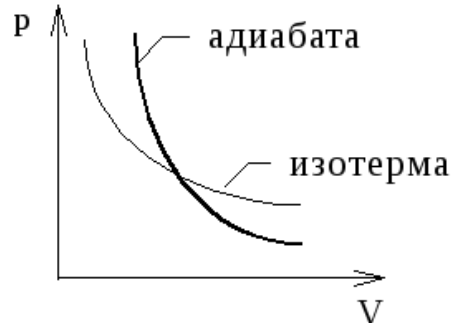
называется *коэффициентом Пуассона*, или *показателем адиабаты*.

Работа, совершаемая газом при адиабатическом изменении объема, определяется выражениями:

$$A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma-1} \frac{M}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right].$$

При адиабатическом расширении объем газа увеличивается (газ расширяется), а давление и температура уменьшаются. При адиабатическом сжатии объем газа уменьшается (газ сжимается), а температура и давление увеличиваются.

График адиабаты круче, чем график изотермы, так как при адиабатном процессе давление увеличивается не только за счет уменьшения объема, но и за счет увеличения температуры.





**Вопросы для подготовки к занятию**

1. Что называется термодинамической системой?
2. Дайте определение внутренней энергии термодинамической системы.
3. Чему равна внутренняя энергия идеального газа? Вывести формулу.
4. Что называется числом степеней свободы  $i$ ? Сколько степеней свободы у молекулы одно-, двух- и трехатомного газа? Как зависит значение  $i$  от температуры газа?
5. Сформулируйте теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы.
6. Выведите формулу работы расширения газа. Как можно найти работу газа в различных изопроцессах? Как связана работа расширения газа с работой внешних сил по сжатию газа?
7. Что называется количеством теплоты? Зависит ли величина поглощенной теплоты от процесса перехода газа из одного состояния в другое?
8. Дайте определения теплоемкости, удельной теплоемкости, молярной теплоемкости. Каковы единицы измерения теплоемкости?
9. Как связаны теплоемкости  $c_{\mu p}$  и  $c_{\mu V}$  с числом степеней свободы? Запишите уравнение Майера. Сформулируйте на его основе физический смысл газовой постоянной  $R$ .

**Методические указания к решению типовых задач**

*Задача № 1.* Средняя энергия одной молекулы газа в широком диапазоне температуры достаточно точно определяется формулой  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$ , где  $i$  – число степеней свободы молекулы, равное числу координат, определяющих положение молекулы. Найдите, пользуясь этой формулой, среднюю энергию молекул  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2O$ ,  $CH_4$  при температуре  $T$ .

*Указания по решению.* При средних температурах двух-, трех- и пятиатомный газы обладают степенями свободы поступательного и вращательного движений, т.е. для  $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$   $i = 5$ , а для  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CH}_4$   $i = 6$ .

Используя принцип Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы, считаем, что на каждую степень свободы приходится средняя энергия одной молекулы, равная  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}kT$ , тогда полная средняя кинетическая энергия молекулы  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT$ .

Подставляя найденные значения величины  $i$ , получим искомые энергии молекул данных газов с учетом числа атомов в молекуле.

*Задача № 2.* Кислород массой  $m = 1$  кг находится при температуре  $T = 320$  К. Определите: 1) внутреннюю энергию кислорода; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул кислорода. Газ считать идеальным.

*Указания по решению.* Внутренняя энергия газа вычисляется по формуле

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT .$$

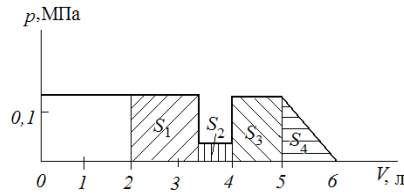
Покажем, как найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул кислорода. Вращательных степеней свободы у двухатомного газа  $i_{\text{вращ.}} = 2$ . На каждую из них в соответствии с теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы приходится энергия, равная  $\frac{1}{2}kT$ .

Тогда каждая молекула обладает средней кинетической энергией вращательного движения  $2 \cdot \frac{1}{2}kT$ . Зная число молей газа и число Авогадро (число молекул в одном моле), можно найти полное число молекул в заданной массе газа и далее их суммарную энергию вращательного движения.

*Задача № 3.* На рисунке дан график зависимости давления газа от объема. Найдите графически работу газа при расширении его от 2 до 6 л.

*Указания по решению.* В условии задачи на диаграмме ( $pV$ ) изображен график функции  $p(V)$ . По определению работа расширения газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV.$$



Значение определенного интеграла, численно равное работе газа, на диаграмме изображается площадью под графиком на участке от  $V_1$  до  $V_2$  (на рис. заштрихована). Для нахождения этой площади разбиваем ее на 3 прямоугольника и 1 треугольник. Площадь треугольника найдем как половину площади соответствующего ему прямоугольника с теми же сторонами. Получаем:

$$A = S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Пользуясь графиком, вычислите искомое значение работы расширения газа самостоятельно.

**Задача № 4.** Воздух, занимавший объем  $V_1 = 2$  л при давлении  $p_1 = 0,8$  МПа, изотермически расширился до  $V_2 = 10$  л. Определите работу  $A$ , совершенную воздухом.

*Указания по решению.* Работа газа при  $p \neq \text{const}$  вычисляется по формуле

$$A_T = \int_1^2 dA = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV,$$

где зависимость  $p(V)$  выразим из уравнения состояния  $p(V) = \nu RT \cdot \frac{1}{V}$ ,

где  $T$  – температура, при которой происходит расширение воздуха, причем  $T =$

const. Получаем:  $A_T = \int_{V_1}^{V_2} \nu RT \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ .

С учетом уравнения начального состояния  $p_1 V_1 = \nu R T$  получаем искомую

$$\text{величину } A = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

*Задача № 5.* Определите удельные теплоемкости  $c_V$  и  $c_P$  смеси углекислого газа массой  $m_1 = 3$  г и азота массой  $m_2 = 4$  г.

*Указания по решению.* По определению удельной теплоемкости имеем:

$$c_{уд} = \frac{Q}{m \Delta T}.$$

Рассмотрим  $\Delta T = 1$  К. Для нагревания смеси на 1 К требуется затратить  $Q_1$  для нагревания углекислого газа  $CO_2$  и  $Q_2$  для нагревания азота  $N_2$ :

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

$$\text{Имеем } Q_1 = c_1 m_1 \Delta T = \frac{c_{\mu_1}}{\mu_1} m_1 \Delta T,$$

$$\text{аналогично } Q_2 = \frac{c_{\mu_2}}{\mu_2} m_2 \Delta T.$$

$$\text{Тогда для смеси получаем } c_{уд \text{ смеси}} = \frac{\frac{c_{\mu_1}}{\mu_1} m_1 + \frac{c_{\mu_2}}{\mu_2} m_2}{m_1 + m_2},$$

где  $m = m_1 + m_2$  – масса смеси, а на  $\Delta T$  сократили дробь.

В соответствии с полученным выражением искомые величины равны

$$c_V = \left( \frac{c_{\mu_1 V}}{\mu_1} m_1 + \frac{c_{\mu_2 V}}{\mu_2} m_2 \right) / (m_1 + m_2),$$

$$c_P = \left( \frac{c_{\mu_1 P}}{\mu_1} m_1 + \frac{c_{\mu_2 P}}{\mu_2} m_2 \right) / (m_1 + m_2),$$

где молярные теплоемкости изохорного и изобарного процессов вычисляются как

$$c_{\mu_1 V} = \frac{i_1}{2} R, \quad c_{\mu_1 P} = \frac{i_1 + 2}{2} R$$

и

$$c_{\mu_2 V} = \frac{i_2}{2} R, \quad c_{\mu_2 P} = \frac{i_2 + 2}{2} R,$$

здесь  $i_1 = 6$  – число степеней свободы для  $\text{CO}_2$ , так как  $\text{CO}_2$  – трехатомный газ, а  $i_2 = 5$  – число степеней свободы для  $\text{N}_2$ , так как  $\text{N}_2$  – двухатомный газ.

*Задача № 6.* Найти среднее число столкновений  $\bar{z}$  в единицу времени молекул углекислого газа при температуре  $t = 100^\circ \text{C}$ , если средняя длина свободного пробега  $\bar{\lambda} = 870 \text{ мкм}$ .

*Решение:* Средняя длина свободного пробега молекулы:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}},$$

Где  $\bar{v}$  – средняя арифметическая скорость молекул:  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

Следовательно,

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\bar{\lambda}} = \frac{\sqrt{8 \cdot 8,31 \cdot 373}}{870 \cdot 10^{-6}} = 4,87 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1},$$

где  $M(\text{CO}_2) = 0,044 \text{ кг/моль}$

*Ответ:*  $\bar{z} = 4,87 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

*Задача № 7.* Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении неона и водорода, принимая эти газы за идеальные. Рассчитать также удельные теплоемкости смеси указанных газов, если массовые доли неона и кислорода составляют 80 и 20 % соответственно.

*Решение.* Удельные теплоёмкости идеальных газов определяются по формулам

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}; \quad c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}.$$

Для неона (одноатомный газ) число степеней свободы  $i = 3$  и  $\mu_1 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ . Поэтому

$$c_{v1} = 3 \cdot 8,31 / (2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}) = 624 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}), c_{p1} = 1040 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}).$$

Для водорода (двухатомный газ)  $i = 5$  и  $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

$$c_{v2} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}), c_{p2} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}).$$

Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме  $c_v$  найдём следующим образом. Теплоту, необходимую для нагревания смеси на  $\Delta T$ , выразим двумя способами:

$$Q = c_v(m_1 + m_2) \Delta T, \quad (1)$$

$$Q = (c_{v,1}m_1 + c_{v,2}m_2)\Delta T. \quad (2)$$

Приравняв правые части (1) и (2) и разделив обе части полученного равенства на  $\Delta T$ , получим

$$c_v(m_1 + m_2) = c_{v,1}m_1 + c_{v,2}m_2.$$

Отсюда  $c_v = c_{v,1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{v,2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ , или  $c_v = c_{v,1}\omega_1 + c_{v,2}\omega_2$ ,

где  $\omega_1 = m_1 / (m_1 + m_2)$  и  $\omega_2 = m_2 / (m_1 + m_2)$ .

Рассуждая так же, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении

$$c_p = c_{p,1}\omega_1 + c_{p,2}\omega_2.$$

Произведем вычисления:

$$c_v = (6,24 \cdot 10^2 \cdot 0,8 + 1,04 \cdot 10^4 \cdot 0,2) = 2580 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К});$$

$$c_p = (1,04 \cdot 10^2 \cdot 0,8 + 1,46 \cdot 10^4 \cdot 0,2) = 3752 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}).$$

#### Задачи для самостоятельного решения

1. Азот массой  $m = 10$  г находится при температуре  $T = 290$  К. Определите: 1) среднюю кинетическую энергию одной молекулы азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения всех молекул азота. Газ считать идеальным.
2. В закрытом сосуде находится смесь азота массой  $m_1 = 56$  г и кислорода

массой  $m_2 = 64$  г. Определите изменение внутренней энергии этой смеси, если ее охладили на  $20^\circ\text{C}$ .

3. Чему равна внутренняя энергия (в джоулях) при нормальных условиях  $1\text{ см}^3$  воздуха?  $1\text{ кг}$  воздуха?

4. Воздух в комнате нагрели от температуры  $T_0$  до  $T$ , при этом давление не изменилось. Изменилась ли внутренняя энергия воздуха внутри комнаты?

5. Газ, занимавший объем  $2\text{ л}$  при давлении  $0,1\text{ МПа}$ , расширился изотермически до  $4\text{ л}$ . После этого, охлаждая газ изохорно (при постоянном объеме), уменьшили его давление в два раза. Далее газ изобарно расширился до  $8\text{ л}$ . Найдите работу, совершенную газом. Начертите график зависимости давления от объема.

6. Некоторый газ массой  $1\text{ кг}$  находится при температуре  $300\text{ К}$  и под давлением  $0,5\text{ МПа}$ . В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в  $2$  раза. Работа, затраченная на сжатие, равна  $432\text{ кДж}$ . Определите: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа.

7. При адиабатном расширении кислорода ( $\nu=2$  моль), находящегося при н.у., его объем увеличился в  $n = 3$  раза. Определите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа.

8. Азот, находившийся при температуре  $400\text{ К}$ , подвергли адиабатному расширению, в результате которого его объем увеличился в  $n = 5$  раз, а внутренняя энергия уменьшилась на  $4\text{ кДж}$ . Определите массу азота.

9. Определите количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом  $V = 20\text{ л}$  его давление изменилось на  $\Delta p = 100\text{ кПа}$ .

10.  $1\text{ м}^3$  водорода при  $0^\circ\text{C}$  находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим поршнем массой  $1\text{ т}$  и сечением  $0,5\text{ м}^2$ . Атмосферное давление  $973\text{ гПа}$ . Какое количество теплоты потребуется на нагревание водорода до  $300^\circ\text{C}$ ? Найдите изменение его внутренней энергии.

11. Считая азот идеальным газом, определите его удельную теплоемкость: 1) для изобарного процесса; 2) для изохорного процесса.

12. Определите удельные теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях  $1,43 \text{ кг/м}^3$ .

13. Определите удельные теплоемкости  $c_v$  и  $c_p$  некоторого газа, если известно, что его удельный объем при нормальных условиях  $0,7 \text{ м}^3/\text{кг}$ . Что это за газ?

## 8. Тепловые машины. Коэффициент полезного действия тепловых машин. Цикл Карно. Второе и третье начала термодинамики. Энтропия

Известно, что для того, чтобы тепловая машина совершила за цикл положительную (полезную) работу, она должна после получения некоторого количества теплоты от нагревателя  $Q_1$  и совершения полезной работы при расширении газа понизить его температуру, отдав некоторое количество теплоты  $Q_2$  холодильнику (например, окружающему воздуху), и только после этого возвращаться в исходное состояние. Таким образом, общее количество теплоты, полученное машиной в ходе цикла, равняется  $Q = Q_1 - Q_2$ . Поэтому коэффициент полезного действия любой тепловой машины определяется выражением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Французским физиком С. Карно предложен так называемый *идеальный цикл Карно*, при котором теплота наиболее эффективно превращается в полезную работу. Этот цикл состоит из двух изотермических и двух адиабатических процессов. С. Карно показал, что ни одна из тепловых машин не может иметь КПД выше, чем КПД идеального цикла Карно при тех же температурах нагревателя  $T_1$  и холодильника  $T_2$ . В свою очередь, КПД идеального цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и определяется только указанными температурами:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$



Опыт показывает, что все процессы, протекающие в изолированных макросистемах, необратимы. Это означает, что они проходят в определенном направлении и не могут самопроизвольно проходить в противоположном направлении. Существует термодинамическая величина, зависящая от состояния системы, которая единообразно изменяется при всех необратимых процессах в изолированных системах и называется *энтропией*. Согласно *второму закону (началу) термодинамики* при всех необратимых процессах в изолированных макросистемах энтропия системы возрастает и в состоянии термодинамического равновесия достигает максимума.

Из рассмотренного цикла Карно видно, что равны между собой отношения значений теплоты к температурам, при которых они были получены или отданы в *изотермическом процессе*. Отношение теплоты  $Q$  в изотермическом процессе к температуре, при которой происходила передача теплоты, называется приведенной теплотой  $Q'$ :

$$Q' = \frac{Q}{T}.$$

Для подсчета приведенной теплоты в произвольном процессе необходимо разбить этот процесс на бесконечно малые участки, где температуру  $T$  можно считать константой. Приведенная теплота на таком участке будет равна  $\delta Q/T$ .

Суммируя приведенную теплоту на всех участках процесса, получим

$$Q'_{1-2} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Тогда в обратимом цикле Карно имеем

$$Q'_{\text{Карно}} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_1} + \int_B^C \frac{\delta Q}{T} + \int_C^D \frac{\delta Q}{T_2} + \int_D^A \frac{\delta Q}{T}.$$

Этот результат справедлив для любого обратимого процесса. Таким образом, для процесса, происходящего по замкнутому циклу,

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0.$$

Из равенства нулю интеграла, взятого по замкнутому контуру, следует, что подынтегральное выражение  $\frac{\delta Q}{T}$  есть полный дифференциал некоторой функции, которая определится только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Это позволяет ввести новую функцию состояния  $S$ :

$$dS = \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обр}}.$$

Функция состояния, полный дифференциал которой равен  $\frac{\delta Q}{T}$ , называется *энтропией* (от греч. entropia – поворот, превращение) – мера способности теплоты превращаться в другие виды энергии.

*Энтропия*  $S$  – это отношение полученной или отданной теплоты к температуре, при которой происходил этот процесс:

$$S = \int \frac{dQ}{T}.$$

Понятие энтропии впервые введено Р. Клаузиусом в 1865 г.

Для обратимых процессов *изменение энтропии*, как следует из  $\Delta S_{\text{обр}} = 0$ , т.е.  $S = \text{const}$ , так как

$$\Delta S_{\text{обр}} = 0, \text{ т.е. } S = \text{const}, \text{ так как } \oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Это выражение называется равенством Клаузиуса.

В необратимом цикле известно, что КПД

$$\eta_{\text{обр}} > \eta_{\text{необр}}, \text{ т.е. } 1 - Q_2/Q_1 < 1 - T_2/T_1.$$

Отсюда  $\left| \frac{Q_2}{T_2} \right| > \left| \frac{Q_1}{T_1} \right|$ , тогда

$$\Delta S_{\text{необр}} = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{хол}} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} > 0.$$

Таким образом,

$$\Delta S_{\text{необр}} > 0 \text{ или } \oint \frac{\delta Q}{T} > 0.$$

Это выражение называют неравенством Клаузиуса: при любом необратимом процессе в замкнутой системе энтропия возрастает ( $dS > 0$ ).

*Примечание.* На основании этих рассуждений Р. Клаузиус выдвинул гипотезу о тепловой смерти Вселенной – ошибочный вывод о том, что все виды энергии во Вселенной в конце концов должны перейти в энергию теплового движения, которая равномерно распределится по веществу Вселенной, после чего в ней прекратятся все макроскопические процессы.

#### **Свойства энтропии:**

1) энтропия является функцией состояния, так как зависит только от начальных и конечных параметров состояния системы и не зависит от пути протекания процесса;

- 2) энтропия определяется с точностью до произвольной постоянной;
- 3) энтропия  $S$  – величина *аддитивная*, т. е. она равна сумме энтропий всех тел, входящих в систему:

$$S = \sum_{i=1}^n S_i;$$

- 4) в теплоизолированной системе при протекании обратимого процесса энтропия не меняется. Поэтому равновесные адиабатические процессы называют *изоэнтропийными процессами*;
- 5) при постоянном объеме энтропия является непрерывно возрастающей функцией внутренней энергии системы.

Энтропия системы является функцией ее состояния, определенной с точностью до произвольной постоянной.

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то изменение энтропии

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}. \quad (1)$$

Таким образом, по формуле (1) можно определить энтропию лишь с точностью до аддитивной постоянной, т. е. начало *энтропии произвольно*. Физический смысл имеет лишь *разность энтропий*.

Исходя из этого, найдем изменения энтропии в процессах идеального газа.

Так как  $T = \text{const}$ , то

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT = 0, \delta A = P dV = \frac{m RT}{\mu V} dV;$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Таким образом, *изменение энтропии*  $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$  идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида перехода 1→2.

Каждый из изопроцессов идеального газа характеризуется своим изменением энтропии, а именно:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}, \text{ так как } V_1 = V_2;$$

- *изохорический:*
- *изобарический:*

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_2} C_P \frac{dT_2}{T_1} = \frac{m}{\mu} C_P \ln \frac{T_2}{T_1}, \text{ так как } P_1 = P_2;$$

- *изотермический:*

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}, \text{ так как } T_1 = T_2$$

- *адиабатический:*

$$\Delta S = 0, \text{ так как } \delta Q = 0.$$

Отметим, что в последнем случае адиабатический процесс называют *изоэнтропийным процессом*, так как  $S = \text{const}$ .

Таким образом, изменение энтропии при любом процессе можно рассчитать по формуле

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T},$$

где  $\delta Q$  – бесконечно малое количество теплоты, полученное системой на бесконечно малом участке процесса;  $T$  – температура этого участка.

**Вопросы для подготовки к занятию**

1. Какими двумя способами можно изменить внутреннюю энергию термодинамической системы?
2. Сформулируйте первое начало термодинамики (две формы). Выражением какого фундаментального закона в области тепловых явлений служит первое начало термодинамики?
3. Какие процессы называются обратимыми, необратимыми, равновесными, неравновесными? Приведите примеры.
4. Что такое приведенное количество теплоты?
5. Что такое термодинамическая вероятность? Покажите на примере.
6. Что называется энтропией? От чего зависит значение энтропии? Как меняется энтропия в различных процессах?
7. Дайте несколько формулировок второго начала термодинамики. Каково его значение?
8. Существует ли процесс, при котором все переданное телу от нагревателя тепло превращается в работу? Можно ли всю внутреннюю энергию газа превратить в механическую работу?
9. Изобразите на диаграмме цикл Карно и поясните процессы перехода газа из одного состояния в другое.
10. Как можно рассчитать КПД тепловой машины? КПД идеальной тепловой машины? Что называется термическим КПД?

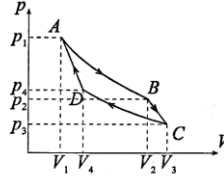
**Методические указания к решению типовых задач**

*Задача № 1.* Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Воздух при давлении  $p_1 = 708 \text{ кПа}$  и температуре  $t_1 = 127^\circ \text{C}$  занимает объем  $V_1 = 2 \text{ л}$ . После изотермического расширения воздух занял объем  $V_2 = 5 \text{ л}$ ; после адиабатического расширения объем стал равным  $V_3 = 8 \text{ л}$ . Найти: а) координаты пересечения изотерм и адиабат; б) работу  $A$ , совершаемую на каждом участке

цикла; в) полную работу  $A$ , совершаемую за весь цикл; г) к.п.д.  $\eta$  цикла; д) количество теплоты  $Q_1$ , получаемое машиной за один цикл от нагревателя; е) количество теплоты  $Q_2$ , отдаваемое за один цикл холодильнику.

**Решение** а) Запишем уравнение изотермы АВ

$$pV = \frac{M}{\mu} RT_1. \quad (1)$$



Поскольку точка А принадлежит АВ, то  $p_1 V_1 = \frac{M}{\mu} RT_1$ , откуда

$$\frac{M}{\mu} = \nu = \frac{p_1 V_1}{RT_1}; \quad \nu = 0,427 \text{ моль.} \quad \text{Тогда (1) можно записать в виде}$$

$pV = 0,427 RT_1 = 1,42 \text{ кДж.}$  По закону Бойля-Мариотта для точки В

$$p_2 = \frac{pV}{V_2} = 284 \text{ кПа.} \quad \text{Точки В и С принадлежат адиабате ВС, следовательно,}$$

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma, \quad \text{откуда} \quad p_3 = p_2 \left( \frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma = 146 \text{ кПа.} \quad \text{Уравнение изотермы CD имеет вид}$$

$$pV = \nu RT_2 = p_3 V_3, \quad \text{отсюда} \quad T_2 = \frac{p_3 V_3}{\nu R}; \quad T_2 = 330 \text{ К.} \quad \text{Координаты точек D и A}$$

удовлетворяют уравнению адиабаты DA, следовательно,  $\left( \frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$ , откуда

$$V_4 = 3,2 \text{ л.} \quad \text{Кроме того,} \quad \left( \frac{V_4}{V_1} \right)^\gamma = \frac{p_1}{p_4}, \quad \text{откуда} \quad p_4 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_4} \right)^\gamma = 365 \text{ кПа.} \quad \text{Таким}$$

образом, координаты искомых точек: А(2;708), В(5;284), С(8;146), D(3,2;365), здесь объем измеряется в литрах, давление – в килопаскалях.

б) Работа на участке АВ (изотерма):  $A_1 = \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 1300 \text{ Дж}$ .

Работа на участке ВС (адиабата):

$$A_2 = \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = 620 \text{ Дж}.$$

Работа на участке CD (изотерма):  $A_3 = \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -1070 \text{ Дж}$ .

Работа на участке DA (адиабата):  $A_4 = \frac{M}{\mu} \frac{RT_2}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) = -620 \text{ Дж}$ .

в) Работа за полный цикл  $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 230 \text{ Дж}$ .

г) К.п.д. цикла  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,175$ .

д) Количество теплоты, полученное от нагревателя за один цикл,  
 $Q = \frac{A}{\eta} = 1300 \text{ Дж}$ .

е) Количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл,  
 $Q_2 = Q_1 - A = 1070 \text{ Дж}$ .

*Задача № 2.* Масса  $M = 10 \text{ г}$  кислорода нагревается от температуры  $t_1 = 50^\circ \text{C}$  до температуры  $t_2 = 150^\circ \text{C}$ . Найти изменение  $\Delta S$  энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

*Решение.* а) При изохорическом нагревании  $\delta Q = c_V M dT$ , где  $c_V = \frac{(c)_V}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{i}{2} R$ .

Тогда изменение энтропии

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = c_V M \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Так как кислород – двухатомный газ, то число степеней свободы  $i = 5$  и изменение энтропии

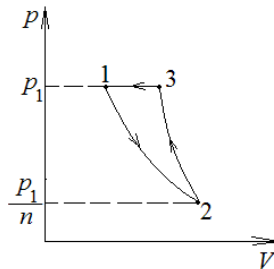
$$\Delta S = \frac{M}{\mu} \frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}; \quad \Delta S = 1,75 \text{ Дж/К}.$$



б) При изобарическом расширении изменение энтропии  $\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ , где  $\delta Q = c_p M dT$ . Удельная теплоемкость при постоянном давлении  $c_p = \frac{(c)_p}{\mu} = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}$ , тогда

$$\Delta S = \int_1^2 c_p m \frac{dT}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{i+2}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}; \quad \Delta S = 2,45 \text{ Дж/К}.$$

**Задача № 3.** Азот массой  $m = 500$  г, находящийся под давлением  $p_1 = 1$  МПа при температуре  $t_1 = 127$  °С, изотермически расширяется, в результате чего давление газа уменьшилось в  $n = 3$  раза. После этого газ адиабатно сжимают до начального давления, а затем изобарно сжимают до начального объема. Постройте график цикла и определите работу, совершенную газом за цикл.



**Указания по решению.** Изображаем на диаграмме ( $pV$ ) процессы перехода газа из состояния 1 в состояние 2 и т.д.

Имеем: 1) 1-2:  $T = \text{const}$ , 2) 2-3:  $Q = 0$ , 3) 3-1:  $p = \text{const}$ .

Работа газа положительна, если газ расширяется, и отрицательна в противном случае, т.е. имеем

$$A_{1-2} > 0, A_{2-3} < 0, A_{3-1} < 0.$$

Суммарная работа

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1}$$

есть искомая величина.

Будем искать каждое слагаемое по отдельности, рассматривая соответствующий процесс перехода.

1) Рассмотрим переход 1-2 при  $T_1 = \text{const}$ . Из уравнения состояния

$$p(V) = \frac{m}{\mu} RT_1 \cdot \frac{1}{V}.$$

Тогда 
$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Но при изотермическом переходе  $p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1},$

тогда 
$$A_{1-2} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln n.$$

2) Адиабатный процесс 2-3 – это процесс без теплообмена, т.е.  $Q_{2-3} = 0,$

тогда из I начала термодинамики имеем  $\Delta U = A'_{2-3}$  или  $\Delta U = -A_{2-3},$

где  $A'_{2-3}$  – работа внешних сил по сжатию газа,  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии. В данном случае  $\Delta U > 0,$  так как температура газа увеличивается (точка

3 лежит правее изотермы 1-2). Тогда  $A_{2-3} = -\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_3).$

Значение температуры  $T_3$  найдем из уравнения Пуассона:  $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$

т.е.  $T_1^\gamma \left(\frac{p_1}{n}\right)^{1-\gamma} = T_3^\gamma p_1^{1-\gamma}, T_3^\gamma = T_1^\gamma \cdot n^{\gamma-1} \Rightarrow T_3 = T_1 \cdot n^{1-\frac{1}{\gamma}}.$

3) При  $p = \text{const}$   $A_{3-1} = p_1 \Delta V = p_1 (V_1 - V_3),$

где  $V_1$  можно найти из уравнения состояния 1, а  $V_3$  – из уравнения изобары:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow V_3 = \frac{T_3}{T_1} V_1 = n^{1-\frac{1}{\gamma}} V_1.$$

**Задача № 4.** Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет  $A = 2$  кДж. Определите количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно.

*Указания по решению.* По первому началу термодинамики подведенное к газу количество теплоты  $Q$  расходуется им на изменение внутренней энергии и на совершение работы расширения:

$$Q = \Delta U + A.$$

1) В случае  $T = \text{const}$   $\Delta U = 0$  и  $Q_1 = A,$

2) При  $p = \text{const}$  получаем

$$Q_2 = \frac{i}{2} \nu R \Delta T + p \Delta V,$$

где  $\Delta T$  – изменение температуры при изобарном увеличении объема на  $\Delta V$ . Из уравнений начального и конечного состояний получаем

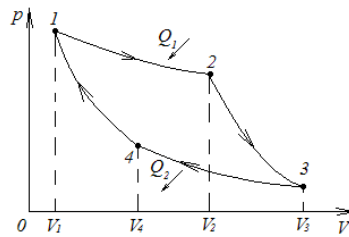
$$p \Delta V = \nu R \Delta T,$$

т.е.  $A = \nu R \Delta T$ .

Итак  $Q_2 = \frac{i}{2} A + A = A(\frac{i}{2} + 1)$ , где  $i = 5$ , так как газ двухатомный.

**Задача № 5.** Газ, совершающий цикл Карно, КПД которого  $\eta = 25\%$ , при изотермическом расширении производит работу  $A_1 = 240$  Дж. Какова работа  $A_2$ , совершаемая газом при изотермическом сжатии?

**Указания по решению.** Изобразим на диаграмме ( $pV$ ) цикл Карно, состоящий из двух изотерм (1-2 – расширение газа и 3-4 – сжатие газа) и двух адиабат: 2-3 и 4-1.



При адиабатном процессе система не получает и не отдает тепла (теплообмена с внешней средой нет), в ходе процесса 1-2 газ получает тепло  $Q_1$ , при переходе 3-4 – отдает  $Q_2$ .

Запишем I начало термодинамики для перехода 1-2. Так как  $T_1 = \text{const}$ , то  $\Delta U = 0$ , тогда

$$Q_1 = A_{1-2} = A_1,$$

т.е. полученное количество теплоты равно работе газа в процессе изотермического расширения. Аналогично для перехода 3-4:  $Q_2 = A_2$ .

Тогда формулу  $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

можно в данном случае переписать так:  $\eta = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}$ .

Отсюда, зная  $A_1$  и  $\eta$ , можно найти искомую величину  $A_2$ .

**Задача № 6.** При нагревании двухатомного идеального газа ( $\nu = 2$  моль) его термодинамическая температура увеличилась в  $n = 2$  раза. Определите изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно; 2) изобарно.

*Указания по решению.* Рассмотрим определение и основные свойства величины энтропии  $S$ . Энтропия системы – это функция состояния системы. Приращение энтропии  $dS$  равно приведенному количеству теплоты, полученному в результате перехода из одного состояния в другое:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

В соответствии с определением  $\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\Delta U + \delta A}{T}$ .

1) При  $V = \text{const}$   $\delta A = 0 \Rightarrow \Delta S_V = \int_1^2 \frac{dU}{T} = \frac{i}{2} \nu R \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i}{2} \nu R \ln n$ .

2) При  $p = \text{const}$   $\delta A = p dV = \nu RT \frac{dV}{V}$ , тогда

$$\Delta S_p = \int_1^2 \frac{\frac{i}{2} \nu R dT + \nu RT \frac{dV}{V}}{T} = \nu R \left( \frac{i}{2} \int_1^2 \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{dV}{V} \right) = \nu R \left( \frac{i}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

При изобарном переходе  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = n$ .

Поэтому  $\Delta S_p = \nu R \ln n \left( \frac{i}{2} + 1 \right) = \nu c_{\mu p} \ln n$ , где для двухатомного газа  $i=5$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

1. Азот массой  $m = 50$  г находится при температуре  $T_1 = 280$  К. В результате изохорного охлаждения его давление уменьшилось в  $n = 2$  раза, а затем в результате изобарного расширения температура газа в конечном состоянии стала равна первоначальной. Определите: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии газа.
2. Идеальный двухатомный газ ( $\nu = 3$  моль), занимающий объем  $V_1 = 5$  л и находящийся под давлением  $p_1 = 1$  МПа, изохорно нагревают до  $T_2 = 500$  К. После этого газ изотермически расширяется до начального давления, а затем он в результате изобарного сжатия возвращается в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите термический КПД цикла.
3. Рабочее тело — идеальный газ — теплового двигателя совершает цикл, состоящий из последовательных процессов: изобарного, адиабатного и изотермического. В результате изобарного процесса газ нагревается от  $T_1 = 300$  К до  $T_2 = 600$  К. Определите термический КПД теплового двигателя.
4. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя  $T_1 = 500$  К, холодильника  $T_2 = 300$  К. Работа изотермического расширения газа составляет  $A = 2$  кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии.
5. Паровая машина мощностью 14,7 кВт потребляет за 1 час работы 8,1 кг угля с удельной теплотой сгорания  $3,3 \cdot 10^7$  Дж/кг. Температура котла 200 °С, холодильника 58 °С. Найдите КПД этой машины и сравните его с КПД идеальной тепловой машины.
6. На сколько возрастет энтропия 1 кг воды, находящейся при температуре 293 К, при превращении ее в пар?
7. Найдите приращение энтропии водорода при расширении его от объема  $V$  до объема  $2V$ : а) в вакууме, б) при изотермическом процессе. Масса газа  $m$ .

8. Азот массой 28 г адиабатно расширили в  $n = 2$  раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема. Определите изменение энтропии газа в ходе указанных процессов.

### 9. Явления переноса

В ходе своего хаотического теплового движения каждая молекула пробегает различные расстояния от одного соударения с другими молекулами до другого. Промежутки времени между двумя последовательными соударениями также изменяются хаотически. Однако можно ввести *среднюю длину свободного пробега молекул*  $\bar{\lambda}$ , т.е. среднее расстояние, пробегаемое молекулой между соударениями, и *среднюю частоту соударений*  $\bar{z}$ , т.е. среднее число соударений, испытываемое молекулой за 1 секунду. Можно показать, что

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$$

и 
$$z = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}},$$

где  $\sigma$  – эффективный диаметр молекул, значения которого для различных газов приводятся в таблицах.

Импульс, переносимый молекулами из одного слоя газа в другой через элемент поверхности площадью  $\Delta S$  за время  $dt$ ,  $dp = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S dt$ ,

где  $\eta$  – динамическая вязкость газа;  $dv/dz$  – поперечный градиент скорости течения его слоев.

Динамическая вязкость  $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$ , где  $\rho$  – плотность газа (жидкости).

Закон Ньютона для силы внутреннего трения (вязкости) между слоями площадью  $\Delta S$   $F = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S$ .

Закон теплопроводности Фурье  $\Delta Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S \Delta t$ ,

где  $\Delta Q$  – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадку  $S$  за время  $\Delta t$ ;  $dT/dx$  – градиент температуры;  $\lambda$  – теплопроводность, для газов

$$\lambda = \frac{1}{3} c_v \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

$c_v$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;  $\rho$  – плотность газа;  $\langle v \rangle$  и  $\langle l \rangle$  – средняя арифметическая скорость и средняя длина свободного пробега молекул.

*Закон диффузии Фика*

$\Delta m = -D \frac{d\rho}{dx} S \Delta t$ , где  $\Delta m$  – масса вещества, переносимая в результате диффузии через поверхность площадью  $S$  за время  $\Delta t$ ;  $d\rho/dx$  – градиент плотности;  $D$  – коэффициент диффузии; для газов

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

#### Практическое занятие № 9-10

##### **Вопросы для подготовки к занятию**

1. Чем равновесное состояние термодинамической системы отличается от неравновесного состояния?
2. Что называется градиентом функции? Как он направлен?
3. Что такое явления переноса? Приведите примеры.
4. Что служит движущей силой явлений переноса?
5. Какие физические величины (скалярная и векторная) используются для описания явлений переноса? Как они связаны друг с другом?
6. Запишите в общем виде закон, описывающий явления переноса. Что переносится в случае диффузии, теплопроводности и вязкости? Какой поток рассматривается в каждом из этих случаев?
7. Запишите закон диффузии Фика и поясните входящие в него переменные.
8. Запишите формулу для вычисления коэффициента диффузии  $D$ . От чего зависит его значение?

9. Запишите закон теплопроводности Фурье и поясните входящие в него переменные.
10. Запишите формулу для вычисления коэффициента теплопроводности  $\lambda$ . От чего зависит его значение?
11. Запишите закон внутреннего трения Ньютона и поясните входящие в него переменные.
12. Запишите формулу для вычисления коэффициента внутреннего трения  $\eta$ . От чего зависит его значение?
13. Какими соотношениями связаны между собой значения коэффициентов теплопроводности, диффузии и вязкости?

#### Методические указания к решению типовых задач

*Задача № 1.* В сферической колбе объемом  $V = 1 \text{ л}$  находится азот. При какой плотности  $\rho$  азота средняя длина свободного пробега молекул азота становится больше размеров сосуда?

*Решение.* Так как колба сферическая, то ее объем  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6}$ .

Отсюда диаметр колбы  $D = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$ . Средняя длина свободного пробега молекул

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}. \quad (1)$$

Из уравнения состояния идеального газа в форме  $p = nkT$  найдем концентрацию молекул  $n = \frac{p}{kT}$ . (2)

Плотность газа можно найти из уравнения Менделеева-Клапейрона  $\rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ . Отсюда давление  $p = \frac{\rho RT}{\mu}$ . Подставив это выражение в (2),

получим  $n = \frac{\rho RT}{\mu kT} = \frac{\rho R}{\mu k} = \frac{\rho N_A}{\mu}$ , а после подстановки данного результата в (1)

$$\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho N_A}.$$



По условию  $\lambda > D$ , следовательно,  $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} < \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2\rho N_A}}$ .

Значит, плотность должна быть  $\rho < \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2 N_A} \sqrt[3]{6V/\pi}}$ ;  $\rho < 9,38 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^3$ .

*Задача № 2.* Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул азота, коэффициент диффузии и вязкость при давлении  $10^5 \text{ Па}$  и температуре  $17^\circ \text{C}$ . Как изменятся найденные величины в результате двукратного увеличения объема газа: а) при постоянном давлении; б) при постоянной температуре?

*Решение.* Средняя длина свободного пробега определяется по формуле  $\bar{\lambda} = 1/(\sqrt{2}\pi^2 n)$ ; а концентрацию молекул по заданным значениям давления и температуры находим из уравнения  $p = nkT$ , тогда

$$\bar{\lambda} = kT/(\sqrt{2}\pi^2 p); \quad \bar{\lambda} = 9,52 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Для расчета коэффициента диффузии по формуле  $D = \bar{\lambda}\bar{v}/3$  можно воспользоваться полученным результатом, определив предварительно среднюю скорость:  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ .  $\bar{v} = 470 \text{ м/с}$ . Тогда  $D = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Для расчета  $\eta$  подставим в формулу  $\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{\lambda}\bar{v}$  выражение для  $\bar{\lambda}$ , а  $\rho$  найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона:  $\rho = p\mu/(RT)$ .

$$\text{Тогда } \eta = \frac{1}{3}\bar{v} \frac{kT\rho\mu}{\sqrt{2}\pi^2 pRT} = \frac{\bar{v}\mu}{3\sqrt{2}\pi^2 N_A}$$

$$\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с.}$$

Как видно из выражения для  $\bar{\lambda}$ , длина свободного пробега зависит только от концентрации молекул. При двукратном увеличении объема концентрация уменьшается вдвое. Следовательно, при любом процессе  $\bar{\lambda}_2/\bar{\lambda}_1 = n_1/n_2 = V_2/V_1 = 2$ .

В выражении коэффициента диффузии входит не только длина свободного пробега, но и средняя скорость. Следовательно,

$$D_2/D_1 = (\lambda_2/\lambda_1)(T_2/T_1)^{1/2}.$$

а) При  $p = \text{const}$   $T_2/T_1 = V_2/V_1 = 2$ . Таким образом,  $D_2/D_1 = 2\sqrt{2}$ . б) При  $T = \text{const}$   $D_2/D_1 = (\lambda_2/\lambda_1) = 2$ .

Вязкость зависит только от скорости молекул, следовательно, и от температуры, т.е.  $\eta_2/\eta_1 = (T_2/T_1)^{1/2}$ . При  $p = \text{const}$   $\eta_2/\eta_1 = \sqrt{2}$ . При постоянной температуре коэффициент  $\eta$  не изменяется.

*Задача № 2.* При атмосферном давлении  $p_0$  и температуре  $t_0 = 0$  °С длина свободного пробега молекулы водорода равна  $\langle l \rangle = 0,1$  мкм. Оцените диаметр  $d$  этой молекулы.

*Указания по решению.* Так как при столкновении молекулы сближаются на расстояния того же порядка величины, что и размеры самих молекул, то в качестве оценки диаметра молекулы примем значение эффективного диаметра<sup>1</sup> молекул водорода.

Средняя длина свободного пробега молекулы газа вычисляется по формуле

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где  $d$  – эффективный диаметр молекулы;  $n$  – концентрация молекул. Из основного уравнения МКТ

$$p = nkT$$

выразим

$$n = \frac{p}{kT},$$

тогда

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi \langle l \rangle p}}.$$

*Задача № 3.* Оцените тепловой поток из комнаты, размеры которой 5 x 5 x 4 м, наружу через два окна с рамами площади 1,5 x 2 м, расположенными на расстоянии  $\Delta x = 0,2$  м друг от друга, и время, в течение которого температура в комнате уменьшится на 1 °С, если температура комнатного воздуха  $T_1 = +20$

<sup>1</sup> Эффективным диаметром молекул газа называется минимальное расстояние между их центрами в момент столкновения.

°С, а наружного  $T_2 = -20$  °С. Почему тепловой поток через окна всегда значительно больше?

*Указания по решению.* По закону Фурье плотность теплового потока  $j_E$  прямо пропорциональна градиенту температуры:

$$j_E = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, значение которого можно найти по формуле

$$\lambda = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle l \rangle \cdot \frac{i}{2} k = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle \cdot c_{y\partial V}.$$

Искомый тепловой поток легко вычислить, найдя его плотность из закона Фурье:

$$W = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = j_E \cdot \Delta S = \lambda \frac{dT}{dx} \cdot \Delta S.$$

Здесь  $\Delta S$  – площадь поверхности, через которую тепло покидает комнату, т.е. в данном случае суммарная площадь двух окон;  $\frac{dT}{dx}$  – градиент температуры между рамами окна, т.е.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x}.$$

Покажем, как найти коэффициент теплопроводности из формулы

$$\lambda = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle l \rangle \cdot \frac{i}{2} k.$$

Средняя скорость молекул равна

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}},$$

где  $T = 273$  К, что соответствует 0 °С (средняя температура между рамами), а длина свободного пробега молекул воздуха

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n},$$

где  $d$  – эффективный диаметр молекул газа. Воздух – это смесь различных газов, для каждого из которых эта величина различна. Но в задаче требуется

лишь провести оценку искомой величины. В соответствии с этим выберем для расчета значение эффективного диаметра для молекул азота и кислорода, доля которых в составе воздуха значительно больше доли других компонентов смеси. Получаем

$$d = 3,4 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,34 \text{ нм.}$$

Также известна молярная масса воздуха:  $\mu = 29 \text{ г/моль}$ .

Кроме того, число степеней свободы примем равным  $i = 5$ , как для двухатомного газа.

Подставляя записанные выражения в формулу теплового потока, получим:

$$W = \lambda \frac{dT}{dx} \cdot \Delta S = \frac{ik}{6} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \cdot \Delta S = \frac{ik}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \cdot \Delta S,$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Теперь найдем время, за которое температура воздуха в комнате уменьшится на  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ . Для этого по определению теплоемкости необходимо, чтобы из комнаты наружу было передано количество теплоты, равное теплоемкости  $C_V$  воздуха в комнате при постоянном объеме ( $V$  – объем комнаты согласно указанным в условии линейным размерам):

$$Q = C_V = \nu \cdot c_{\mu V} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R.$$

Из уравнения состояния выражаем

$$\frac{m}{\mu} R = \frac{pV}{T_1}, \text{ т.е. } Q = C_V = \frac{pV}{T} \cdot \frac{i}{2}.$$

Искомое время будет равно

$$\Delta t = \frac{Q}{W}.$$

**Задача № 4.** Оцените коэффициент диффузии пара воды в воздухе при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Радиус молекул воды  $r_1 = 0,21 \text{ нм}$ . Радиус молекул азота и кислорода  $r_2 = 0,18 \text{ нм}$ .

*Указания по решению.* Рассматриваем диффузию пара воды в воздухе, т.е. для воздуха водяной пар в этом случае служит примесью (диффузантом).

Коэффициент диффузии определяется по формуле

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \quad \text{и} \quad \langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p},$$

здесь концентрация молекул газа выражена из основного уравнения МКТ.

В ходе диффузии молекулы воды движутся из мест, где их концентрация больше, в места, где их концентрация меньше. При этом молекулы  $\text{H}_2\text{O}$  испытывают соударения с молекулами воздуха, т.е. газа, в котором они диффундируют. Из этого следует (согласно определению эффективного диаметра молекул), что в качестве величины  $d$  необходимо брать сумму  $r_1 + r_2$ , так как по определению  $d$  – это минимальное расстояние, на которое молекула воды может приблизиться к молекулам воздуха (азота или кислорода).

*Задача № 5.* Определите, во сколько раз отличаются коэффициенты диффузии азота и углекислого газа, если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

*Указания по решению.* Рассматриваем диффузию каждого газа (азота с радиусом  $r_1$  молекулы  $\text{N}_2$  и углекислого газа с радиусом  $r_2$  молекулы  $\text{CO}_2$ ) в одном и том же «чужом» газе с радиусом «чужих» молекул  $r_3$ .

В соответствии с решением задачи № 5 коэффициент диффузии равен

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p},$$

где эффективный диаметр молекул равен  $r_1 + r_3$  в случае диффузии азота и  $r_2 + r_3$  в случае диффузии углекислого газа. Так как по условию  $r_1 = r_2$ , то  $d_1 = d_2 = d$ , т.е. при делении эта величина сократится.

Тогда отношение коэффициента диффузии азота к коэффициенту диффузии углекислого газа равно

$$\frac{D_{\text{N}_2}}{D_{\text{CO}_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}.$$

Заметим также, что температура – мера средней кинетической энергии молекул газа, т.е. при одинаковой температуре равны средние энергии движения молекул  $N_2$  и  $CO_2$ . Поэтому чем больше масса молекулы, тем меньше скорость ее движения. Так как  $m_0(N_2) < m_0(CO_2) \Rightarrow D_{N_2} > D_{CO_2}$ , так как молекулы  $N_2$  будут двигаться быстрее.

#### Задачи для самостоятельного решения

1. Оцените длину свободного пробега молекулы азота в воздухе при нормальных условиях. Радиус молекул азота и кислорода принять равным 0,18 нм.
2. В баллоне вместимостью  $V = 2,53$  л содержится углекислый газ  $CO_2$  при температуре  $T = 400$  К и давлении  $p = 1,3$  Па. Сколько столкновений  $z$  происходит между молекулами за  $t = 1$  с?
3. Определите среднюю длину свободного пробега молекул кислорода, находящегося при температуре  $0$  °С, если среднее число столкновений, испытываемых молекулой в 1 с, равно  $3,7 \cdot 10^9$ .
4. В разреженном газе нагретое тело остывает за время  $t$ . За какое время остынет тело из того же материала, если все его линейные размеры увеличить в  $n$  раз?
5. Коэффициент диффузии кислорода при температуре  $0$  °С равен  $0,19$  см<sup>2</sup>/с. Определите среднюю длину свободного пробега молекул кислорода.
6. Эффективный диаметр молекул аргона  $2,7 \cdot 10^{-9}$  см. Определите коэффициент внутреннего трения для аргона при температуре  $50$  °С.
7. Коэффициент теплопроводности кислорода при температуре  $100$  °С равен  $3,25 \cdot 10^{-2}$  Вт/м·К. Вычислите коэффициент вязкости кислорода при этой температуре.
8. Найдите коэффициент внутреннего трения  $\eta$  азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии при этих условиях  $D = 1,42 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с.

## 10. Свойства жидкости. Поверхностное натяжение

Коэффициент поверхностного натяжения

$$\alpha = \frac{F}{l} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где  $F$  — сила поверхностного натяжения, действующая на контур  $l$ , ограничивающий поверхность жидкости;  $\Delta E$  — изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанное с изменением площади  $\Delta S$  поверхности этой пленки.

Формула Лапласа, выражающая давление  $p$ , создаваемое сферической поверхностью жидкости,

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

где  $R$  — радиус сферической поверхности.

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g R},$$

где  $\theta$  — краевой угол ( $\theta = 0$  при полном смачивании стенок трубки жидкостью;  $\theta = \pi$  при полном несмачивании),  $R$  — радиус канала трубки;  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения.

Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными друг другу плоскостями

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g d},$$

где  $d$  — расстояние между плоскостями.

**Вопросы для подготовки к занятию**

1. Что называется поверхностным натяжением? Приведите примеры проявления сил поверхностного натяжения.
2. Запишите две формулы, по-разному определяющие значение коэффициента поверхностного натяжения. Каков его физический смысл?
3. Что такое давление Лапласа? Запишите расчетные формулы.
4. Опишите явления смачивания и несмачивания. Что такое краевой угол  $\theta$ ? Чему он равен в случаях полного смачивания и несмачивания? Показать на рисунке.
5. В чем суть капиллярных явлений? Запишите формулу для высоты подъема жидкости в капилляре.

**Методические указания к решению типовых задач**

*Задача № 1.* Найти добавочное давление  $\Delta p$  внутри мыльного пузыря диаметром  $d = 10$  см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

*Решение.* Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности: внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки очень мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$\Delta p = 2 \frac{2\alpha}{R},$$

где  $R$  – радиус пузыря.

Так как  $R = d / 2$ , то  $\Delta p = 8\alpha / d$ .

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить площадь ее поверхности на  $\Delta S$ , выражается формулой

$$A = \alpha \Delta S = \alpha(S - S_0).$$



В данном случае  $S$  – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря;  $S_0$  – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивающей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая  $S_0$ , получаем

$$A = \alpha S = 2\pi d^2 \alpha.$$

Произведя вычисления, получим

$$\Delta p = 3,2 \text{ Па}; A = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

*Задача № 2.* Оцените максимальный размер капель воды, которые могут висеть на потолке. Поверхностное натяжение воды  $0,073 \text{ Н/м}$ .

*Указания по решению.* В соответствии с определением коэффициент поверхностного натяжения равен силе поверхностного натяжения воды, отнесенной к единице длины периметра границы капли. Тогда сила тяжести капель воды, висящих на потолке, уравнивается силой поверхностного натяжения, действующей по периметру основания капель, радиус которых  $R$ :

$$mg = \sigma \cdot 2\pi R,$$

где  $m = \rho V = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$ .

Зная плотность воды и величину поверхностного натяжения, легко найти искомый радиус капель.

*Задача №3.* Какую работу против сил поверхностного натяжения нужно совершить, чтобы разделить сферическую каплю ртути радиусом  $R = 3 \text{ мм}$  на две одинаковые капли?

*Указания по решению.* Капля ртути имеет поверхность, площадь которой вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2.$$

При делении ее на две одинаковые капли радиусом  $r$  получаем суммарную поверхность площадью

$$S_1 = 2 \cdot 4\pi r^2.$$

Для сравнения исходной и конечной площадей поверхностей выразим радиус  $r$  малой капли через величину  $R$ . Для этого воспользуемся тем, что объем воды не меняется в результате деления:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Отсюда

$$r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$$

и тогда

$$S_1 = 2 \cdot 4\pi r^2 \cdot 2^{-2/3} = \sqrt[3]{2} \cdot 4\pi R^2 \approx 1,26 \cdot 4\pi R^2,$$

т.е. площадь поверхности при делении капли увеличивается.

Согласно определению коэффициента поверхностного натяжения для увеличения площади поверхности жидкости необходимо совершить работу

$$A = \sigma \Delta S = \sigma(\sqrt[3]{2} - 1) \cdot 4\pi R^2.$$

*Задача № 4.* Две капли воды радиусом  $r = 1$  мм каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определите уменьшение поверхностной энергии при этом слиянии, если поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м.

*Указания по решению.* При слиянии двух капель в одну суммарная площадь поверхности уменьшается, а следовательно, уменьшается и поверхностная энергия на величину работы, которую бы пришлось затратить при обратном процессе увеличения поверхности, т.е.

$$\Delta W = A = \sigma \Delta S = \sigma(2 \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2),$$

где  $R$  – радиус большой капли, определяемый из условия постоянства объема воды

$$2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Отметим, что условие протекания процесса слияния капель при постоянной температуре сказывается на том, что внутренняя энергия воды не

меняется и изменение поверхностной энергии связано только лишь с соответствующим изменением площади поверхности воды.

*Задача № 5.* Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определите работу  $A$ , которую надо совершить, чтобы увеличить его диаметр от  $d_1 = 6$  мм до  $d_2 = 60$  мм. Поверхностное натяжение мыльного раствора принять равным  $40$  мН/м.

*Указания по решению.* При увеличении диаметра мыльного пузыря от  $d_1$  до  $d_2$  увеличивается поверхность мыльной пленки на величину

$$\Delta S = 2 \cdot (\pi d_2^2 - \pi d_1^2) = 2\pi(d_2^2 - d_1^2).$$

Множитель «2» обусловлен тем обстоятельством, что всякая пленка – это двусторонняя поверхность.

Тогда работа, совершенная при этом, при условии  $T = \text{const}$  (нет изменения внутренней энергии, и работа затрачивается только на увеличение площади поверхности мыльной пленки)

$$A = \sigma \cdot \Delta S$$

*Задача № 6.* На поверхности жидкости плавает погруженная на глубину  $h$  шайба радиусом  $r$  и высотой  $2h$ , не смачиваемая жидкостью. Плотность жидкости и шайбы равна  $\rho$ . Поверхность жидкости соприкасается с боковой поверхностью шайбы. Определите поверхностное натяжение жидкости.

*Указания по решению.* Из условия ясно, что шайба, плотность которой равна плотности жидкости, выступает над ее поверхностью на величину  $h$ . Это теоретически возможно лишь с учетом силы поверхностного натяжения, действующей на шайбу со стороны поверхности не смачивающейся жидкостью, соприкасающейся с боковой поверхностью шайбы.

Равновесие шайбы обеспечивается взаимным уравновешиванием трех сил: силы тяжести, выталкивающей силы Архимеда и силы поверхностного натяжения жидкости, распределенной по периметру основания шайбы и направленной вверх для уменьшения поверхности жидкости. Условие касания поверхностей жидкости и шайбы равносильно заданию краевого угла, который в этом случае равен  $180^\circ$ , т.е. сила натяжения направлена вертикально вверх. Получаем:

$$mg = F_A + F_{нат.},$$

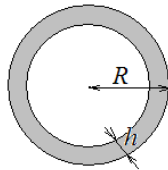
$$\rho \cdot \pi r^2 \cdot 2h \cdot g = \rho \cdot \pi r^2 \cdot h \cdot g + 2\pi r \sigma,$$

отсюда

$$\sigma = \frac{\rho g h r}{2}.$$

*Задача № 7.* Внешний радиус мыльного пузыря равен  $R$ , толщина его стенки равна  $h$ . Найдите давление воздуха внутри пузыря. Давление воздуха вне пузыря  $p_0$ , поверхностное натяжение воды  $\sigma$ .

*Указания по решению.* Мыльный пузырь представляет собой пленку, имеющую две поверхности – внутреннюю и внешнюю. Добавочное давление, вызываемое кривизной поверхности, создает каждая из этих двух поверхностей.



Давление Лапласа для внешней поверхности равно

$$p_1 = \frac{2\sigma}{R},$$

аналогично для внутренней поверхности с учетом ее радиуса получаем

$$p_2 = \frac{2\sigma}{R-h}.$$

Тогда искомое давление воздуха внутри пузыря равно сумме

$$p = p_0 + 2\sigma \cdot \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R-h} \right),$$

где  $p_0$  – внешнее атмосферное давление.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Определите радиус  $R$  капли спирта, вытекающей из узкой вертикальной трубки  $r = 1$  мм. Считать, что в момент отрыва капля сферическая. Поверхностное натяжение спирта  $\sigma = 22$  мН/м, а его плотность  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.
2. Какую работу нужно совершить, чтобы жидкость объема  $V$  с поверхностным натяжением  $\sigma$  растянуть в пленку, толщина которой  $\Delta \ll \sqrt[3]{V}$ ?
3. Большая и тонкая пластина не тонет, если ее осторожно положить на поверхность воды. Определите максимальную массу единицы ее площади. Пластина водой не смачивается.
4. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на  $\Delta p = 200$  Па больше атмосферного. Определите диаметр  $d$  пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\sigma = 40$  мН/м.
5. Вертикальный стеклянный капилляр погружен в воду. Определите радиус кривизны мениска, если высота столба воды в трубке  $h = 20$  мм. Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, поверхностное натяжение  $\sigma = 73$  мН/м.
6. Капилляр с внутренним радиусом 0,5 мм опущен в жидкость. Определите массу жидкости, поднявшейся в капилляре, если ее поверхностное натяжение равно 60 мН/м.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гнатюк, В. С. Опорный конспект лекций по механике, молекулярной физике и термодинамике : учебное пособие / В. С. Гнатюк, Н. Н. Морозов, З. Ф. Мурашова. — Мурманск : МГТУ, 2018. — 244 с. — ISBN 978-5-86185-961-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/142667> (дата обращения: 02.04.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Дмитриева, Е. И. Физика в примерах и задачах : учебное пособие / Е.И. Дмитриева. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ФОРУМ, 2021. - 512 с. - ISBN 978-5-91134-712-3. - ISBN 978-5-16-109155-5. - ISBN 978-5-16-006390-4 : Б. ц. - Текст : непосредственный.
3. Кошелев, Э. А. Молекулярная физика. Термодинамика : учебно-методическое пособие / Э. А. Кошелев. - Новосибирск : НГТУ, 2019. - 46 с. - ISBN 978-5-7782-3995-1 : Б. ц. - Текст : непосредственный.
4. Кудин Л. С., Бурдуковская Г. Г. Курс общей физики в вопросах и задачах: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2013. – 320 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Кузнецов С. И. Курс физики с примерами решения задач. Ч.1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: Учебное пособие / Под ред. В. В. Ларионова. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 464 с.: ил.
6. Пинчук Р. Г., Гончарова Н. П., Матюшенко В. Я. Механика. Молекулярная физика и термодинамика: Пособие для самостоятельной работы студентов инженерно-технических специальностей втузов безотрывной формы обучения. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 82 с.
7. Прудникова, И. А. Молекулярная физика и термодинамика в блок-схемах и таблицах : учебное пособие / И. А. Прудникова, А. А. Бабарико - Омск : Омский ГАУ, 2020. - 78 с. - ISBN 978-5-89764-901-3 : Б. ц. - Текст : непосредственный.

8. Складорова, Е. А. Курс лекций по физике: Молекулярная физика. Термодинамика : учебное пособие / Е. А. Складорова, Л. И. Семкина, С. И. Кузнецов. — Томск : ТПУ, 2017. — 156 с. — ISBN 978-5-4387-0735-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/107758> (дата обращения: 02.04.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
9. Сугакевич А.Г. Методические указания к решению типовых задач по разделам «Основы МКТ», «Основы термодинамики». Молекулярная физика и термодинамика: методы решения задач. – АСК ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет», 2008. – 47 с.
10. Фатыхов М.А. Механика. Молекулярная физика и термодинамика: Методическое пособие по решению задач. Ч. I. – Уфа: Изд-во БГПУ им. М. Акмуллы, 2009. – 79 с.
11. Фёдоров, Д. Л. Физика. Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики : учебное пособие / Д. Л. Фёдоров, Ю. Н. Лазарева, В. Г. Средин. — Санкт-Петербург : БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова, 2017. — 66 с. — ISBN 978-5-906920-13-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/121815> (дата обращения: 02.04.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
12. Физика. Механика и молекулярная физика : учебно-методическое пособие / Сиб. федер. ун-т, Ин-т инж. физики и радиоэлектроники ; сост. В. А. Орлов [и др.]. - Электрон. текстовые дан. (pdf, 8,2 Мб). - Красноярск : СФУ, 2020 (2020-02-17). - Загл. с титул. экрана. - Изд. № 2020-10975 : Б. ц. - Текст : электронный.
13. Филимонова Л.В. Методические указания для практических занятий по общей и экспериментальной физике. Ч. 2. МКТ и термодинамика. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2005. – 103 с.: ил.

**ПРИЛОЖЕНИЯ**

Приложение А

**Основные физические постоянные (округленные значения)**

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	$g$	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R$	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	$e$	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Скорость света в вакууме	$c$	$3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная Вина	$b$	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	$R_a$	$1,01 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радиус Бора	$a_0$	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнитная Бора	$\mu_B$	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Энергия ионизации атома водорода	$E_i$	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ (13,6 эВ)
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

Приложение Б

**Некоторые астрономические величины**

Наименование	Значение	Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$	Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$	Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$	Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$	Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$



**Плотность ( $\rho$ ) твердых тел**

Вещество	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Вещество	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Вещество	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Алюминий	$2,70 \cdot 10^3$	Железо	$7,88 \cdot 10^3$	Свинец	$11,3 \cdot 10^3$
Барий	$3,50 \cdot 10^3$	Литий	$0,53 \cdot 10^3$	Серебро	$10,5 \cdot 10^3$
Ванадий	$6,02 \cdot 10^3$	Медь	$8,93 \cdot 10^3$	Цезий	$1,90 \cdot 10^3$
Висмут	$9,80 \cdot 10^3$	Никель	$8,90 \cdot 10^3$	Цинк	$7,15 \cdot 10^3$

**Плотность ( $\rho$ ) жидкостей**

Вещество	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Вещество	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Вещество	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Вода	$1,00 \cdot 10^3$	Керосин	$0,8 \cdot 10^3$	Сероуглерод	$1,26 \cdot 10^3$
Глицерин	$1,26 \cdot 10^3$	Масло смазочн.	$0,9 \cdot 10^3$	Спирт	$0,8 \cdot 10^3$
Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$	Масло кастор.	$0,96 \cdot 10^3$	Эфир	$0,7 \cdot 10^3$

**Упругие постоянные твердых тел**

Вещество	Модуль Юнга $E$ , ГПа	Модуль сдвига $G$ , ГПа
Алюминий	69	24
Вольфрам	380	140
Железо (сталь)	200	76
Медь	98	44
Серебро	74	27

**Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях**

Вещество	Эффективный диаметр $d$ , нм	Динамическая вязкость $\eta$ , мкПа·с	Теплопроводность $\lambda$ , мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	0,27	17,2	24,1
Гелий	0,22	18,9	142
Кислород	0,36	19,8	24,4
Пары воды	0,30	8,32	15,8

## Критические параметры и поправка Ван-дер-Ваальса

Газ	Критическая температура $T_{кр}$ , К	Критическое давление $P_{кр}$ , МПа	Поправка Ван-дер-Ваальса	
			$a$ , Н· м <sup>4</sup> /моль <sup>2</sup>	$b$ , 10 <sup>-5</sup> м <sup>3</sup> /моль
Азот	126	3,39	0,135	3,86
Аргон	151	4,86	0,134	3,22
Водяной пар	647	22,1	0,545	3,04
Кислород	155	5,08	0,136	3,17
Неон	44,4	2,74	0,209	1,70
Углекислый газ	304	7,38	0,361	4,28
Хлор	417	7,71	0,650	5,62

Динамическая вязкость ( $\eta$ ) жидкостей при 20 °С, мПа · с

Вода	1,00
Глицерин	1480
Масло касторовое	967
Масло машинное	100
Ртуть	1,58

Поверхностное натяжение ( $\sigma$ ) жидкостей при 20 °С, мН/м

Вода	73
Глицерин	62
Мыльная вода	40
Ртуть	500
Спирт	22

## Удельная теплоемкость твердых и жидких веществ

Вещество	Удельная теплоемкость $c$ , Дж/(кг · К)	Вещество	Удельная теплоемкость $c$ , Дж/(кг · К)
Алюминий	$8,96 \cdot 10^2$	Спирт	$2,43 \cdot 10^3$

Вода	$4,18 \cdot 10^3$	Сталь	$4,69 \cdot 10^2$
Глицерин	$2,43 \cdot 10^3$	Серебро	$2,3 \cdot 10^2$
Керосин	$2,14 \cdot 10^3$	Медь	$3,8 \cdot 10^2$
Лед	$2,09 \cdot 10^3$	Свинец	$1,26 \cdot 10^2$
Ртуть	$1,38 \cdot 10^2$		

## Приложение К

### Температура плавления и удельная теплота плавления

Вещество	Температура плавления $T_{пл}$ , К	Удельная теплота плавления $\lambda$ x $10^3$ Дж/кг
Алюминий	933	4,0
Лед	273	3,34
Ртуть	233,2	0,117
Сталь	1573	0,873
Серебро	1253,6	0,88
Медь	1353	2,1
Никель	1726	3,0
Свинец	600	0,25

## Приложение Л

### Температура кипения ( $T_k$ ) и удельная теплота парообразования ( $r$ ) при температуре кипения

Вещество	Температура кипения $T_k$ , К	Удельная теплота парообразования $r$ x $10^3$ Дж/кг
Азот	77,2	2,01
Вода	373	22,6
Водород	20,3	4,61
Воздух	80	2,09
Глицерин	563	
Кислород	90	2,14
Ртуть	629,7	2,88
Спирт	351,3	8,46
Углекислый газ	194,5	5,95

## Приложение М

### Коэффициент теплопроводности ( $\chi$ ) при нормальных условиях

Вещество	Коэффициент теплопроводности $\chi$ , Вт/(м · К)	Вещество	Коэффициент теплопроводности $\chi$ , Вт/(м · К)
Азот	$2,37 \cdot 10^{-2}$	Гелий	$1,41 \cdot 10^{-2}$

Алюминий	$2,01 \cdot 10^2$	Кислород	$2,39 \cdot 10^{-2}$
Водяной пар	$1,58 \cdot 10^{-2}$	Лед	2,51
Водород	0,168	Сталь	46,1
Воздух	$2,37 \cdot 10^{-2}$	Углекислый газ	$2,32 \cdot 10^{-2}$

Учебное издание

РОМАНЦОВА НАТАЛЬЯ ФЕДОРОВНА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Редактор И.А. Вейсиг  
Компьютерная верстка Н. Ф. Романцова

Библиотечно-издательский комплекс  
Сибирского федерального университета

660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а  
Тел. (391) 206-26-67; <http://bik.sfu-kras.ru>  
E-mail [publishing\\_house@sfu-kras.ru](mailto:publishing_house@sfu-kras.ru)

Подписано в печать 13.01.2021. Формат 60x84/16  
Усл. печ. л 6,0. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано в типографии ИП Азарова Н.Н.  
(«ЛИТЕРА-принт»),  
Красноярск, ул. Гладкова, 6,  
т. 8-902-924-15-77