Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
Л.Н. Храмова
подпись инициалы, фамилия
«14» 06 2022г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
код-наименование направления

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Руководитель 10.06.22 к.ф.-м.н., доцент Е. Н. Яковлева
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Студент 10.06.22 Д.А. Поздеева
подпись, дата инициалы, фамилия

Нормоконтролер 10.06.22 Е. Н. Яковлева
подпись, дата инициалы, фамилия

Лесосибирск 2022

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ» содержит 54 страницы текстового документа, 41 использованнйх источник, 3 таблицы, 2 приложения.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ.

Актуальность исследования состоит в том, что тригонометрические уравнения из года в год встречаются в заданиях ЕГЭ (единого государственного экзамена) второй части, где им уделяют особое внимание, чтобы набрать наибольшее количество баллов.

Цель работы: рассмотреть методику изучения темы «Тригонометрические уравнения» в курсе математики средней школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в средней школе.

Предмет исследования: методика изучения тригонометрических уравнений.

Основные задачи исследования:

1. Изучить теоретические основы темы «Тригонометрические уравнения» и рассмотреть методы решения тригонометрических уравнений;

2. Организовать и провести констатирующий эксперимент по теме «Тригонометрические уравнения».;

3. Разработать методические рекомендации по предупреждению ошибок по теме «Тригонометрические уравнения», составить конспекты уроков и подборку упражнений для учащихся старших классов по подготовке к ЕГЭ.

В результате исследования были разработаны методические рекомендации по предупреждению ошибок, конспекты уроков и подборка тренировочных упражнений по теме «Тригонометрические уравнения».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время изучению тригонометрических функций и тригонометрических уравнений уделяется большое внимание в школьном курсе алгебры и начала анализа, так как данная тема сложная и очень важная. Тригонометрические уравнения возникают при решении задач в планиметрии, стереометрии, астрономии, физике и других областях. Тригонометрические уравнения из года в год встречаются в заданиях ЕГЭ (единого государственного экзамена) второй части, где им уделяют особое внимание, чтобы набрать наибольшее количество баллов.

В ЕГЭ задания с тригонометрическими уравнениями содержат две части: решение уравнения, где в ответе получается бесконечное число корней и отбор корней из определенного промежутка.

Цель работы: рассмотреть методику изучения темы «Тригонометрические уравнения» в курсе математики средней школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в средней школе.

Предмет исследования: методика изучения тригонометрических уравнений.

Задачи исследования:

1. Изучить теоретические основы темы «Тригонометрические уравнения» и рассмотреть методы решения тригонометрических уравнений;
2. Организовать и провести констатирующий эксперимент по теме «Тригонометрические уравнения»;
3. Разработать методические рекомендации по предупреждению ошибок по теме «Тригонометрические уравнения» и составить конспекты уроков и подборку упражнений для учащихся старших классов по подготовке к ЕГЭ.

Методы исследования: изучение литературы по теме исследования; анализ учебной и учебно-методической литературы; констатирующий эксперимент.

Этапы исследования:

I этап (сентябрь 2021 – ноябрь 2021) – анализ научной, педагогической и методической литературы по теме исследования, постановка цели, определение предмета, объекта и задач исследования.

II этап (декабрь 2022 – январь 2022) – проведение констатирующего эксперимента и анализ результатов исследования.

III этап (февраль 2022 – май 2022) – разработка методических рекомендаций по предупреждению ошибок, тренировочных упражнений для учащихся.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования методических рекомендаций по предупреждению ошибок при изучении темы «Тригонометрические уравнения» и использовании тренировочных упражнений при подготовке к ЕГЭ учащимися старших классов.

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, включающего 41 наименование. Результаты работы представлены в 3 таблицах, 9 рисунках. Общий объем работы – 54 печатных листа.

По результатам исследования подготовлена и опубликована статься на тему: «Методика изучения темы «Тригонометрические уравнения» в курсе математики средней школы» на сайте Инфоурок.

1 Теоретические основы изучения темы «Тригонометрические уравнения»

1.1 Основные теоретические сведения по теме исследования

Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение катета этого треугольника, лежащего против угла, к гипотенузе треугольника.

Решение простейших тригонометрических уравнений в схемах представлено на рисунках 1-4.

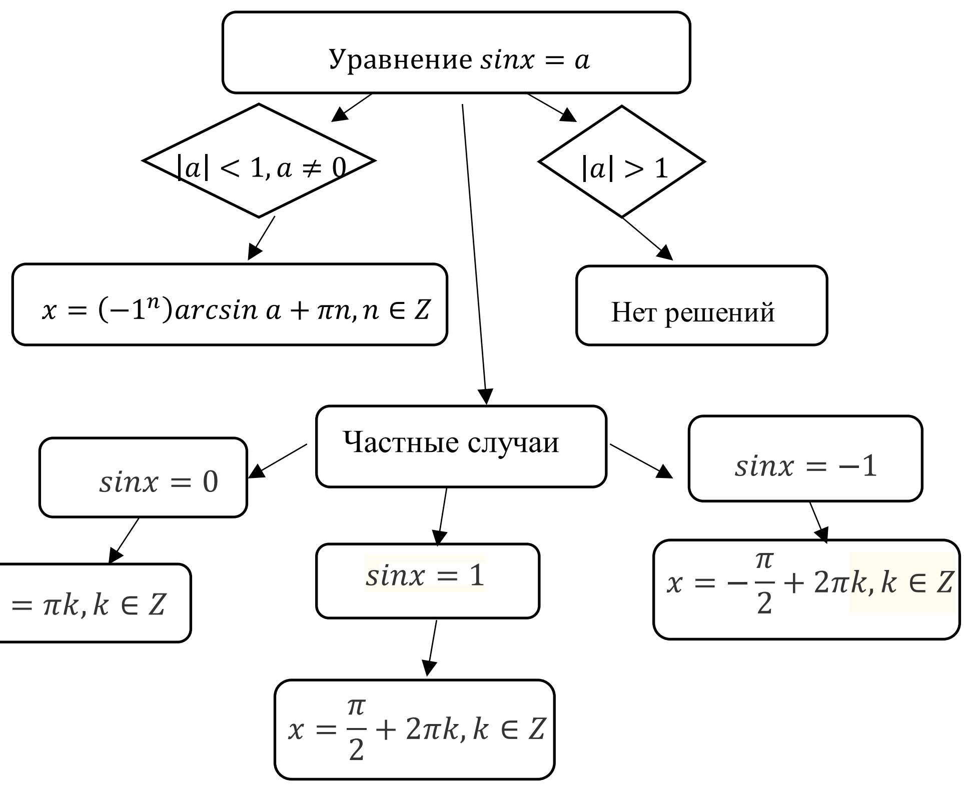


Рисунок 1 – Решение тригонометрического уравнения $sinx = a$

Косинусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе треугольника.

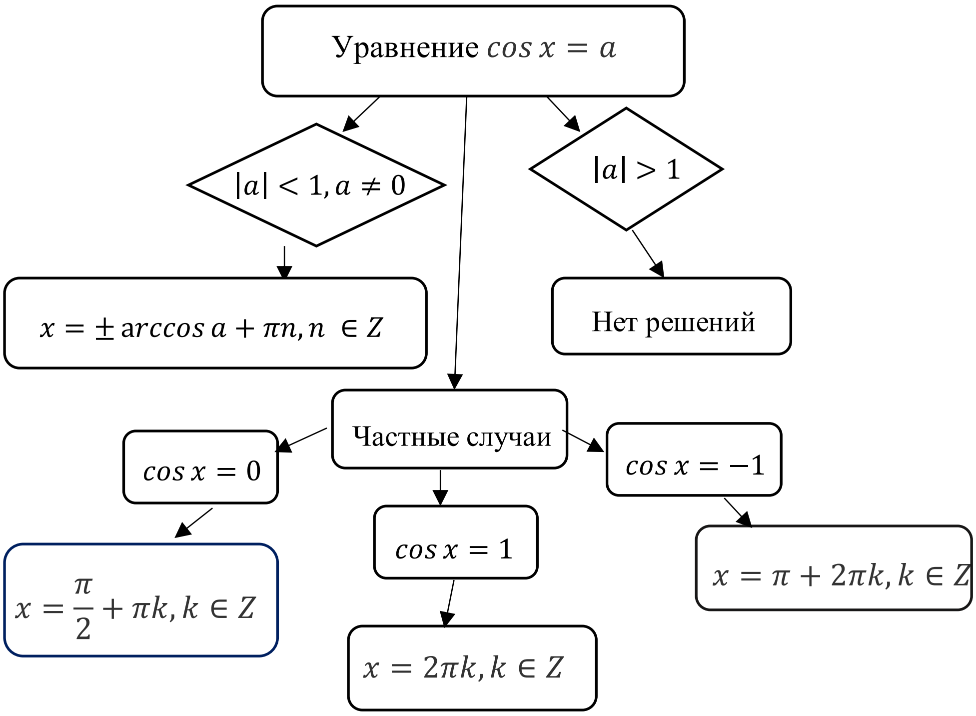


Рисунок 2 – Решение тригонометрического уравнения $cosx = a$

Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение катета этого треугольника, лежащего против угла, к катету треугольника, прилежащему к углу.

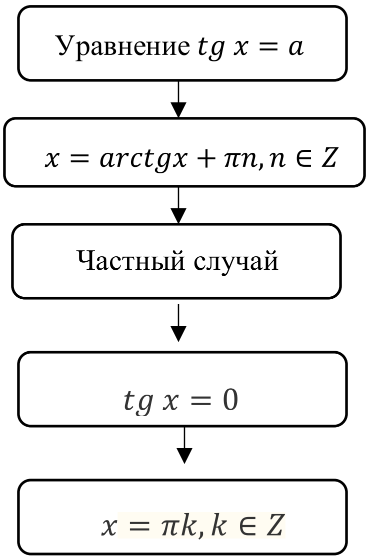


Рисунок 3 – Решение тригонометрического уравнения $tgx = a$

Котангенс является обратно пропорциональной величиной к тангенсу, то есть, это отношение прилежащего катета к противолежащему.

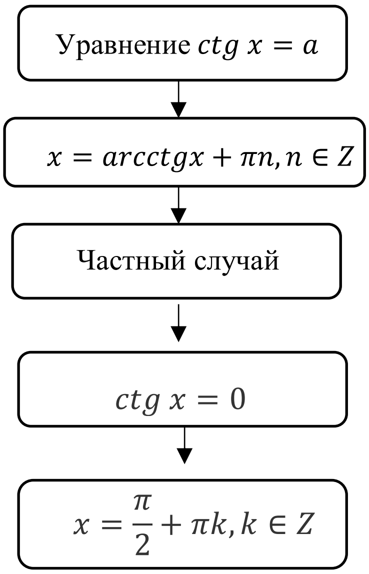


Рисунок 4 – Решение тригонометрического уравнения $ctgx = a$

При решении тригонометрических уравнений используются и обратные тригонометрические функции [36].

Арксинус

Если $|a| \leq 1$, то $arcsin\, a$ – это такое число, из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Если $|a| \leq 1$, то $arcsina = t \implies \begin{cases} sin\, t = a \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

$arcsin\,(-a) = -arcsina,$ *где* $0 \leq a \leq 1.$

Если $|a| \leq 1$, то уравнение $sin\, t = a$, можно решить и записать двумя способами:

$$t_1 = arcsin\, a + 2\pi k, k \epsilon Z,$$
$$t_2 = (\pi - arcsin\, a) + 2\pi k, k \epsilon Z,$$
$$t = (-1)^n arcsin\, a + \pi n, n \epsilon Z$$

Арккосинус

Если $|a| \leq 1$, то $arccos\, a$ – это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Если $|a| \leq 1$, то $arccos\, a = t \Rightarrow \begin{cases} cos\, t = a \\ 0 \leq 1 \leq \pi \end{cases},$

$arccosa\ (-a) = \pi - arccosa$, где $0 \leq a \leq 1$,

Уравнение вида $\cos x = a$, если, $a \leq 1$, имеет решение $a = arccos\, a + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Арктангенс

$arctg\, a$ - это такое число, из отрезка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a.

$$arctga = t \Rightarrow \begin{cases} tgt = a \\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$arctg(-a) = -arctga$$

Уравнение $tgt = a$ имеет решение $t = arctga + \pi k, k\epsilon Z$.

•После решения тригонометрических уравнений необходима проверка найденных решений: [30]

•-если в процессе решения произошло расширение области определения уравнения в результате некоторых преобразований (освобождение от знаменателей, сокращение дроби, приведение подобных членов);

•-если в процессе решения уравнения использовалось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

•-если при решении применялись тригонометрические тождества, левая и правая части которых имеют неодинаковые области определения, например:

$$\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = sin\alpha,\ \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = cos\alpha,\ tg\alpha\, ctg\alpha = 1 \text{ и др.}$$

Для правильного и быстрого отбора корней в тригонометрии используют тригонометрический круг (окружность) (рисунок 5):

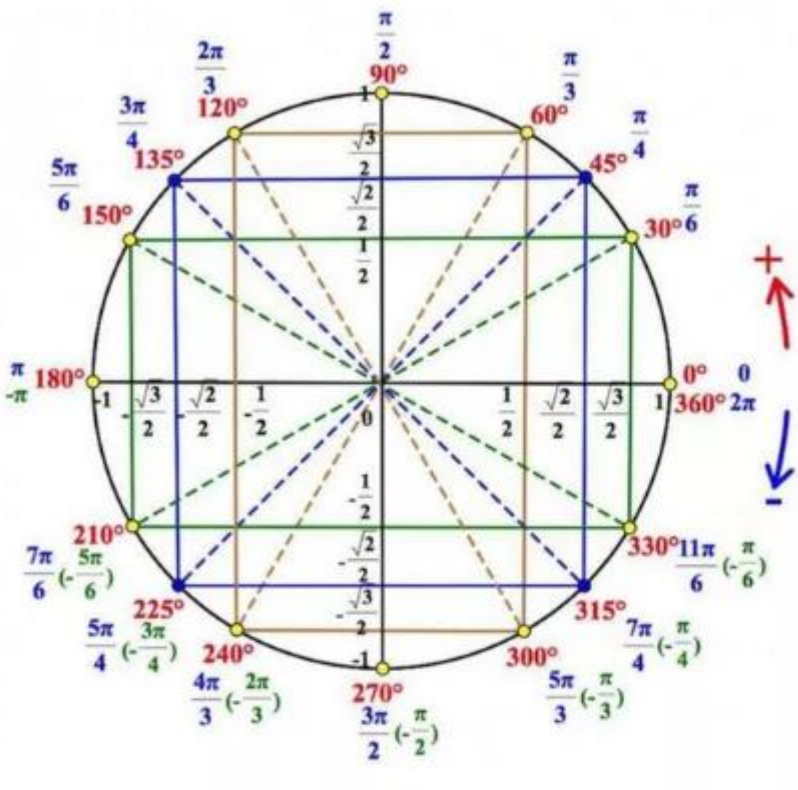


Рисунок 5 – Тригонометрическая окружность

Тригонометрический круг для тангенса и котангенса представлен на рисунках 6 и 7:

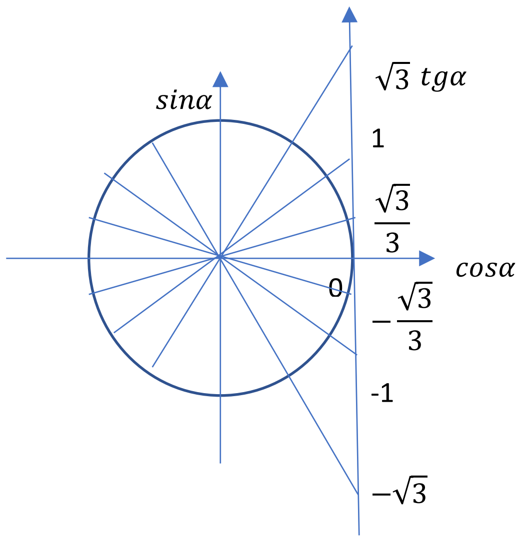


Рисунок 6 – Тригонометрический круг тангенса

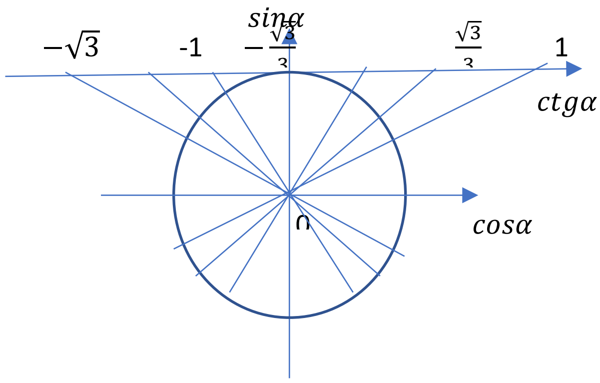


Рисунок 7 – Тригонометрический круг котангенса

При решение тригонометрических уравнений используют формулы приведения (таблицы 1, 2).

Таблица 1 – Формулы приведения в радианах

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-sin\,\alpha$
$cos\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$

Пользоваться данной таблицей легко. Достаточно выбрать строку с нужной функцией и столбец с нужным аргументом. Например, чтобы упростить $cos(\pi-\alpha)$, нужно взять ответ на пересечении столбца, озаглавленного $\pi-\alpha$ и строки $cos\,\alpha$. Получим $cos(\pi-\alpha) = -cos\,\alpha$.

Углы можно измерять как в радианах, так и в градусах. π радиан составляют 180º, а $\frac{\pi}{2}$, соответственно, 90º.

Таблица 2 – Формулы приведения в градусах

	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-sin\,\alpha$
$cos\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$

Так же при решении тригонометрических уравнений, используются свойства тригонометрических функций [34].

Четность тригонометрических функций: косинус – четная функция, $\cos(-t) = cos$;

синус, тангенс и котангенс, нечетные функции: $\sin(-t) = -sint; tg(-t) = -tgt; ctg(-t) = -ctgt$.

Периодической называется функция, которая повторяет свои значения через какой-то регулярный интервал, то есть не меняющая своего значения при добавлении к аргументу фиксированного ненулевого числа (периода функции). Тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс, котангенс) являются периодическими.

Функции $sinx, cosx$ – периодические функции с наименьшим положительным периодом 2π:

$$\sin(x + 2\pi k) = sinx, cosx(x + 2\pi k) = cosx, k \in Z,$$

Функции $tgx, ctgx$ – периодические функции с наименьшим положительным периодом π:

$$\mathrm{tg}(x + \pi k) = tgx, ctgx(x + \pi k) = ctgx, k \in Z.$$

Выполняя преобразование тригонометрических выражений, используют тригонометрические тождества:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}; \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$
3. $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}; \quad \alpha \neq \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$
4. $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1; \quad \alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbf{Z}$

Из основного тригонометрического тождества $sin^2 a + cos^2 a = 1$ можно выразить формулы для нахождения синуса и косинуса:

$$sin\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha},$$

$$cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha},$$

Формулы двойного угла:

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha;$$

$$sin2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha};$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha;$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Формулы суммы, разности и произведения синуса и косинуса:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm sin\beta cos\alpha;$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sinsin\alpha;$$

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$2sin\alpha sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

$$2cos\alpha cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta);$$

$$2sin\alpha cos\beta = sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta).$$

1.2 Методы решения тригонометрических уравнений

Основными методами решения тригонометрических уравнений являются:

1.1. Алгебраический метод;

2.2. Разложение на множители;

3.3. Приведение к однородному уравнению;

4.4. Переход к половинному углу;

5.5. Введение вспомогательного угла;

6.6. Преобразование произведения в сумму;

7.7. Универсальная подстановка.

Разберем каждый из данных методов на конкретных примерах.

1. *Алгебраический метод (метод замены переменной и подстановки)*

Пример 1. $2cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+1=0,$

Решение: Используя формулы приведения, получим уравнение:

$$2cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0,$$

Выполним замену: $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=y,$ тогда $2y^2-3y+1=0,$

Находим корни: $D=\ b^2-4ac$; $D=(-3)^2-4*2*1=9-8=1,$

$y_1=1;\ y_2=\frac{1}{2}$, отсюда следуют два случая:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1, \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},$$

$$x+\frac{\pi}{6}=2\pi k, \qquad x+\frac{\pi}{6}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k, k\in Z,$$

$$x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z, x_2=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in Z,$$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \ x_2=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k.$

2. *Разложение на множители*

Приведем уравнение к виду $f(x)=0$ и представим левую часть уравнения в виде произведения $f_1(x)*f_2(x)*\cdots*f_n(x).$ Тогда данное уравнение приводится к совокупности уравнений: $f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,$ $f_n(x)=0.$ Следует помнить, что эта совокупность не всегда равносильна исходному уравнению и что здесь надо руководствоваться правилом:

произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а все остальные при этом имеют смысл.

Пример 2. Решить уравнение $cos^2x + sinx * cosx = 1,$

Решение: Используя основное тригонометрическое тождество, получим:

$$cos^2x + sinx * cosx - sin^2x - cos^2x = 0,$$

$$sinx * cosx - sin^2x = 0,$$

$$sinx * (cosx - sinx) = 0,$$

Найдем корни: 1) $sinx = 0;\ x_1 = \pi k,$

2)$cosx - sinx = 0;\ \ tgx = 1;\ \ x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z,$

Ответ: $\pi k, \frac{\pi}{4} + \pi m.$

3. *Приведение к однородному уравнению*

Уравнение вида $asinx + b\,cosx = 0$ называется однородным относительно $sinx$ и $cosx$, если все его члены одной и той же степени относит ельно $sinx$ и $cosx$ одного и того же угла.

Чтобы решить однородное уравнение, необходимо [18]:

1.1. Перенести все его члены в левую часть;

2.2. Вынести все общие множители за скобки;

3.3. Приравнять все множители и скобки нулю;

4.4. Скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на $cosx$ в старшей степени;

5.5. Решить полученное алгебраическое уравнение относительно tgx.

Пример 3. Решить уравнение $3sin^2x + 4sinx * cosx + 5cos^2x = 2,$

Решение: $3sin^2x + 4sinx * cosx + 5cos^2x = 2sin^2x + 2cos^2x,$

$$sin^2x + 4sinx * cosx + 3cos^2x = 0,$$

$$tg^2x + 4tgx + +3 = 0, \text{сделаем замену } tgx = y, \text{тогда}$$

$$y^2 + 4y + 3 = 0,$$

Найдем корни: $D = b^2 + 4ac; D = 4^2 - 4 * 1 * 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2,$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\ y_1 = \frac{-4+2}{2} = -1;\ y_2 = \frac{-4-2}{2} = -3,$$

$$1)\ tgx = -1,$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k. k \in Z,$$

$$2)\ tgx = -3,$$

$$x_2 = -arctg + \pi m, m \in Z,$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, -arctg + \pi m$

4. *Переход к половинному углу*

Для решения используем формулу:

$$sin2x = 2sinxcosx;$$

$$cos2x = cos^2x - sin^2x;$$

$$cos2x = 2cos^2x - 1;$$

$$cos2x = 1 - 2sin^2x;$$

Пример 4. Решить уравнение $3sinx - 5cosx = 7,$

Решение: Применим формулу двойного угла:

$$6sin\frac{x}{2} * \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 5cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 5sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 7sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 7cos^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$2sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 6\sin\left(\frac{x}{2}\right) * cos\left(\frac{x}{2}\right) + 12cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$tg^2\left(\frac{x}{2}\right) - 3tg\left(\frac{x}{2}\right) + 6 = 0,$$

Пусть $tg\left(\frac{x}{2}\right) = t,$ тогда $t^2 - 3t + 6 = 0,$

$$D = 9 - 4 * 1 * 6 = 9 - 24 = -15 \Rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: нет корней

5. *Введение вспомогательного угла*

Рассмотрим теперь общий случай — уравнение $a\,cosx + b\,sinx = c$. Делим обе части на $\sqrt{a^2+b^2}$;

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}; \qquad (1)$$

Для чего мы выполнили это деление? Всё дело в получившихся коэффициентах при косинусе и синусе. Легко видеть, что сумма их квадратов равна единице:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1; \qquad (2)$$

Это означает, что данные коэффициенты сами являются косинусом и синусом некоторого угла φ.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=cos\varphi;\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=sin\varphi;$$

Соотношение (1) тогда приобретает вид:

$$cos\varphi cosx+sin\varphi sinx=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

Исходное уравнение сведено к простейшему. Теперь понятно, почему рассматриваемый метод называется введением дополнительного угла. Этим дополнительным углом как раз и является угол φ.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{3}sin3x-cos3x=1$,

Решение: $a=\sqrt{3}; b=-1$, поэтому разделим обе части на $\sqrt{3+1=2}$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}*sin3x-\left(\frac{1}{2}\right)*cos3x=\frac{1}{2},$$

$$cos\frac{\pi}{6}*sin3x-sin\frac{\pi}{6}*cos3x=\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},$$

Отсюда следует: $x=(-1)^k*\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z$,

Ответ: $(-1)^k*\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$.

6. *Преобразование произведения в сумму*

Для решения использовали формулу:

$$2sin\alpha sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta);$$

$$2cos\alpha cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta);$$

$$2sin\alpha cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta);$$

Пример 6. $2sinx * sin3x = cos4x$,

Решение: Преобразуем левую часть в сумму:

$$cos4x\text{-}cos8x = cos4x,$$

$$cos8x = 0,$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} k,$$

$$x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}, k\in Z,$$

Ответ: $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$.

7. Универсальная подстановка

Как известно, метод замены переменной (метод подстановки) удобен в том случае, если уравнение можно представить в виде $F(j(x)) = 0$, где F и j -- некоторые функции. Метод заключается в том, что вводят новую переменную $t = j(x) = 0$.Тогда исходное уравнение примет вид:$F(t) = 0$. Найдем корни последнего уравнения и для каждого его корня t_0 решим уравнение$j(x) = t_0$. В результате получаем корни исходного уравнения.

Пример 7: Решить уравнение 3 *sin x*-4 *cos x* = 3,

Решение: Возможны два случая: 1)$x \neq (2m+1)\pi$,

$$3\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 4\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 3,$$

$$6tg\left(\frac{x}{2}\right) - 4 + 4tg^2\left(\frac{x}{2}\right) = 3 + 3tg^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + 6tg\left(\frac{x}{2}\right) - 7 = 0,$$

Замена: $tg\left(\frac{x}{2}\right) = u;\ u^2 + 6u - 7 = 0,$

$$u_1 = -7;\ u_2 = 1,$$

Случай 1: а) $tg\left(\frac{x}{2}\right) = -7,\ \ x_1 = -2arctg7 + 2\pi k,$

б)$tg\left(\frac{x}{2}\right) = 1, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z,$

Случай 2: $x = (2m+1)\pi$; $3\sin[(2m+1)\pi] - 4\cos[(2m+1)\pi] = 4 \neq 3,$

Ответ: : а) $tg\left(\frac{x}{2}\right) = -7; x_1 = -2arctg7 + 2\pi k;$ б)$tg\left(\frac{x}{2}\right) = 1; x_2 = \frac{\pi}{2},$

2 Содержательно-методическое обеспечение обучения решению тригонометрических уравнений

2.1 Анализ учебников по теме исследования

С целью сравнения и выявления какие методы решения тригонометрических уравнений рассматривают авторы учебников по математике для 10-11 классов средней школы. Для сравнения были взяты следующие учебники:

Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях: учебник (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Москва : Просвещение, 2020;

Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных. учреждений: базовый / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын. – Москва : Просвещение, 2010;

Муравин, Г. К. Муравина, О.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – Москва : Просвещение, 2019.

Анализ школьных учебников был проведен по следующим критериям:

1. Количество часов, отводимых на изложение темы.
2. Место изучения данного материала в курсе математики.
3. Методика изложения материала по теме «Тригонометрические уравнения», виды уравнений и методы их решений.

Мордкович А. Г., Семёнов П. В., «Алгебра и начала математического анализа», учебник для 10-11 классов [26].

В примерном тематическом планировании (3 часа в неделю), изложенном в учебнике на изучение главы «Тригонометрические уравнения» выделяется 10 часов.

В главе «Преобразование тригонометрических выражений» также рассматривается решение тригонометрических уравнений. На изучение этой главы отведено 15 часов.

После изучения первой главы «Тригонометрические уравнения» начинается раздел «Тригонометрические функции», за которым следует раздел «Преобразование тригонометрических выражений».

В главах «Производная», «Первообразная и интеграл», «Уравнения и неравенства». Системы уравнений и неравенств», отводимых на изучение в 11 классе, так же встречаются задания по тригонометрии.

В разделе «Тригонометрические уравнения» подробно вводятся первые представления о решении простейших тригонометрических уравнений. Рассматривается понятие арккосинус и решение уравнения $\cos x = a$; арксинус и решение уравнения $\sin x = a$; арктангенс и решение уравнения $tg\ x = a$; арккотангенс и решение уравнения $ctg\ x = a$. В этом разделе рассматриваются три метода решения тригонометрических уравнений:

1. Метод введения новой переменной;
2. Метод разложения на множители.
3. Приведение к однородному уравнению.

Рассматривается метод решения однородных тригонометрических уравнений. Другие методы решения рассматриваются в главе «Преобразование тригонометрических выражений». В этой главе уже приводятся специальные методы решения тригонометрических уравнений с помощью формул: синус и косинус суммы и разности аргументов, тангенс суммы и разности аргументов, формулы двойного аргумента, формулы понижения степени. преобразование сумм тригонометрических функций в произведения. Преобразование произведений тригонометрических функций в сумму.

Предлагается новая схема представления: «функция - уравнения - преобразования». Данная схема построения учебного материала, которая позволяет учащимся не перегружать свою память многочисленными формулами и обучать учеников осознанному решению тригонометрических уравнений. Наличие отдельного задачника позволяет авторам учебника выстроить в нём полноценную как по объёму, так и по содержанию трёхуровневую систему упражнений, достаточную для работы в классе и дома, для решения домашних заданий.

Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Ивлев Б. М., Швацбурд С. И., «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов. [19]

В примерном тематическом планировании (3 часов в неделю) дается 14 часов на изучение раздела «Разрешение тригонометрических уравнений и неравенств» отводится 14 часов.

Первая глава учебника называется «Тригонометрические функции». Весь материал по данной теме разбит на 3 параграфа. В первом параграфе изучаются тригонометрические функции числового аргумента, затем следует параграф, в котором описываются основные свойства этих функций. В третьем параграфе «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» рассматриваются тригонометрические уравнения и их решения, материал по этой теме разделён на 4 пункта.

Изучение темы начинается с повторения радианной меры угла, основных формул тригонометрии. Авторы напоминают, что понятия *sin x, cos x, tg x, ctg x* были ранее изучены во время алгебры и геометрии и не дает им определения. Затем идёт рассмотрение основных тригонометрических формул. Далее изучаются тригонометрические функции и их графики и основные свойства, и, наконец, на базе изученного материала, первая глава учебника завершается решением тригонометрических уравнений и неравенств. Здесь, при помощи графиков тригонометрических функций, вводятся такие понятия как *arcsin, arcos, arctg* числа. Затем с помощью единичной окружности выводятся формулы корней для решения простейших тригонометрических уравнений. В последнем пункте главы «Тригонометрические функции» А. Н. Колмогоров отражает основные идеи решения тригонометрических уравнений. Стоит отметить, что авторы учебника не указывают названия используемых методов (разложения на множители, способ решения однородных уравнений первой, второй и высших степеней, метод подстановки) решения тригонометрических уравнений и не систематизируют их. Вместе с тем, в данном учебнике не рассматриваются способы решения уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$. Уравнения такого вида встречаются лишь в задачах повышенной трудности шестой главы.

Таким образом, с точки зрения изложения теоретического материала нельзя сказать, что данный учебник не может быть рекомендован к самостоятельному изучению. Предложенная авторами схема изложения материала «преобразования – функция – уравнения» сталкивает учеников с непониманием: тригонометрические уравнения и преобразования тригонометрических выражений так и остаются в голове учащихся на “разных берегах реки”.

Стоит отметить, что в этом учебнике предложен большой набор тригонометрических формул для использования их при решении тригонометрических уравнений. Анализ содержания задач по теме

«Тригонометрические уравнения» показал, что преобладающими являются простейшие тригонометрические уравнения, фактически отсутствуют тригонометрические уравнения, способ решения которых основан на свойстве ограниченности синуса и косинуса.

Муравин Г.К. Муравина О.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень - Муравин Г.К., Муравина О.В. Москва, -2019г. [28]

В примерном тематическом планирование (от 1 до 3 часов в неделю) на каждый параграф, а на изучение главы «Тригонометрические функции и их свойства» отводится 38 часов.

Данная тема рассматривается в 4й главе. В данной главе содержится 15 параграфов: первые 4 параграфа отводятся для изучения градусной и радианной меры углов, определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса произвольных углов. Затем изучаются параграфы простейшие тригонометрические уравнения, формулы приведения, свойства и график тригонометрических функций, основные тригонометрические формулы и их преобразование.

Изучение тригонометрических уравнений начинается с простейших уравнений. Рассматривается понятие арккосинус и решение уравнения $\cos x = a$; арксинус и решение уравнения $\sin x = a$; арктангенс и решение уравнения $tg\ x = a$; арккотангенс и решение уравнения $ctg\ x = a$. В этой главе рассмотрены три метода решения тригонометрических уравнений:

1. Метод введения новой переменной;
2. Метод разложения на множители.
3. Приведение к однородному уравнению.

Таким образом, с точки зрения изложения теоретического материала можно сказать, что учебник подходит для самостоятельного изучения. Стоит отметить, что в этом учебнике предложен большой набор тригонометрических формул для использования их при решении тригонометрических уравнений.

Ученикам будет легко разобраться в данной теме, так как очень подробное и простое объяснение теории. Так же приведено подробное решение примеров. Ученикам, пропустившим урок, дома будет достаточно легко разобраться с данной темой.

Проанализировав учебники, можно сказать, что все они подходят как для изучения темы «Тригонометрические уравнения» в школе, так и для самостоятельного изучения. Авторы учебников используют большой спектр формул, которые необходимы для решения тригонометрических уравнений, а так же они предлагают при изучении темы «Тригонометрические уравнения» только три основных метода решения тригонометрических уравнений – это метод замены переменной (алгебраический метод), метод разложения на множители и приведение к однородному уравнению. таким образом учебник Мордковича отличается более доступным изложением теории учебного материала для школьников, с многочисленными примерами решения задач с подробным решением.

Исходя из вышеизложенного, нас заинтересовал вопрос, какие методы используют школьники при решении тригонометрических уравнений.

2.2 Констатирующий эксперимент

В ходе исследования, был проведен констатирующий эксперимент в 11-ом классе средней школы, где ученики учатся по учебнику А. Г. Мордковича. Цель данного эксперимента - проверить какими методами пользуются ученики при решении тригонометрический уравнений.

Учащимся были предложены следующие задания:

Задание 1. Решить уравнение: $2sin^2x - 5\,sin\,x + 2 = 0$,

Задание 2. Решать уравнение: $sin7x + sin3x = 3cos2x$,

Задание 3. Решить уравнение: $sin^2x + 2sinx\,cosx - 3cos^2x = 0$, Задание 4. Решить уравнение: $sinx - cosx = 1$,

Задание 5. Решить уравнение $11sinx - 2cos\,x = 10$.

Были получены следующие результаты: с заданием 1 справилось 100% учеников, с заданием 2 – 94,4%, с заданием 3 – 77,7%, с заданием 4 – 54% и с заданием 5 – 33,3% учеников.

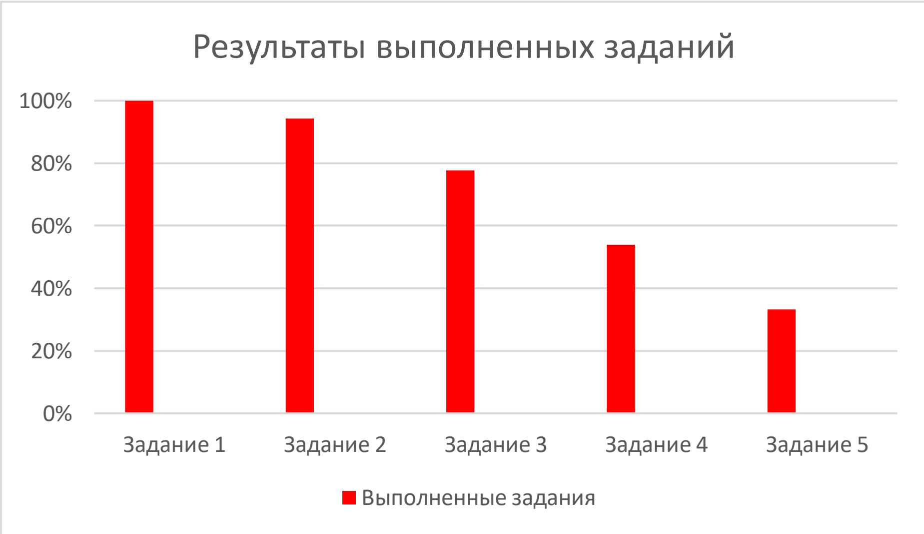


Рисунок – 8. Результаты выполненных заданий

При анализе выполненных работ, было выяснено какие методы были лучше всего усвоены учениками. Всеми 5 методами пользовались 33,3% учеников, любыми 4 методами – 50% учеников, любыми 3 методами – 70% учеников, любыми 2 методами – 90% учеников и любым 1 методом - 100% учеников.

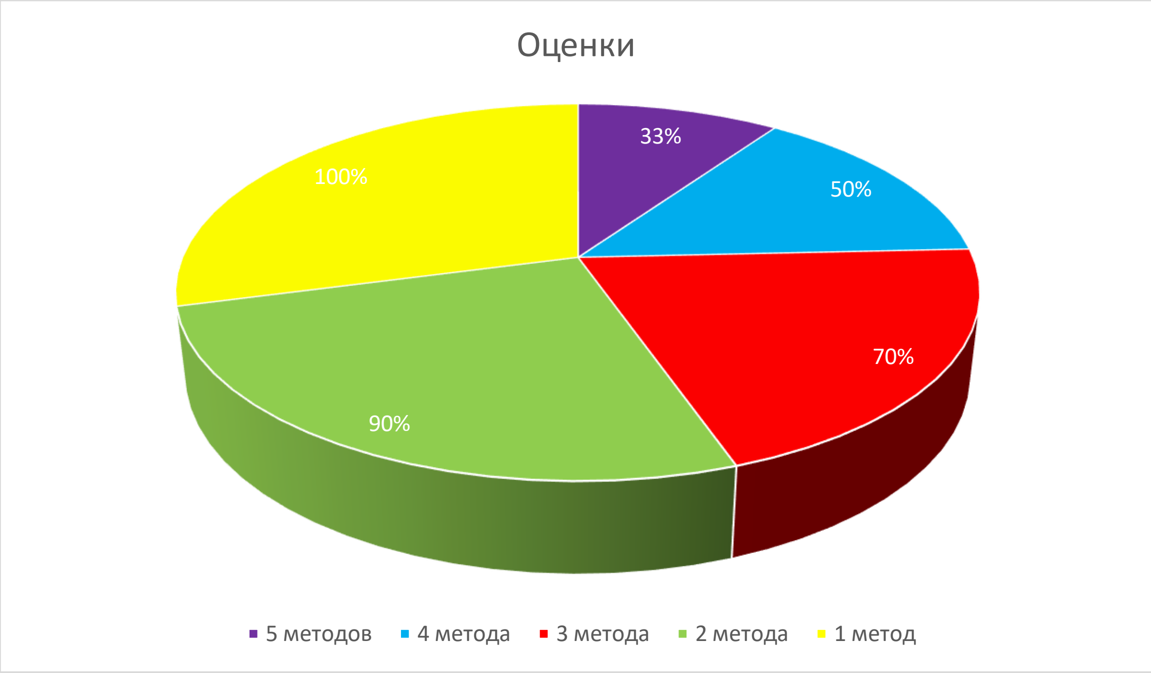


Рисунок 9 – Результаты полученных оценок

При решении данных уравнений учащиеся использовали следующие методы решения тригонометрических уравнений:

1. Алгебраический метод (задание 1);
2. Метод разложения на множители (задание 2);
3. Приведения к однородному уравнению (задание 3);
4. Введение вспомогательного угла (задание 4);
5. Переход к половинному углу (задание 5).

Чаще всего используются следующие методы решения тригонометрических уравнений: алгебраический, метод разложения на множители и приведение к однородному уравнению.

2.3 Методические рекомендации по предупреждению ошибок по теме «Тригонометрические уравнения»

Эксперимент и анализ научно-методической литературы показал, что при решении тригонометрических уравнений школьники часто допускают типичные ошибки. Рассмотрим их подробнее.

1. При упрощении тригонометрических выражений необходимо не только хорошо знать тригонометрические формулы, но и владеть навыками преобразования алгебраических выражений, такими как: правилами раскрытия скобок и заключения в скобки, формулами сокращенного умножения и т.д. недостаточное знание формул курса алгебры провоцирует неправильное решение уравнений.

Пример 1. Решить уравнение: $(sinx + cosx)^2 = 1$.

Неправильное решение: $sin^2x + cos^2x = 1$;

$$sin^2x = 1 - cos^2x;$$

$$sin^2x = sin^2x.$$

Комментарий: В данном примере ошибка заключается в том, что при возведении в квадрат, учащиеся возводят неправильно, забывая про формулы сокращенного умножения.

Пример 2. Решить уравнение: $2sin^3(\pi + x) = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

Неправильное решение: $2sin^3(\pi + x) = \frac{1}{2}(-sinx)$;

$$2(-sin^3x) + \frac{1}{2}siinx = 0;$$

$$-2sin^3x + \frac{1}{2}sinx = 0;$$

$$sinx(-4sin^2x + 1) = 0;$$

$$sinx = 0; \qquad 4sin^2x = 1;$$

$$x = \pi n, n \in Z. \qquad sin^2x = \frac{1}{4};$$

$$sinx = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

Правильное решение: $2sin^3(\pi + x) = \frac{1}{2}(-sinx)$;

$$2(-sin^3x) + \frac{1}{2}siinx = 0;$$

$$-2sin^3x + \frac{1}{2}sinx = 0;$$

$$sinx(-4sin^2x + 1) = 0;$$

$$sinx = 0; \qquad 4sin^2x = 1;$$

$$x = \pi n, n \in Z. \qquad sin^2x = \frac{1}{4};$$

$$sinx = \pm\frac{1}{2};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z, x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

2. Ошибки при отборе корней.

Пример 3. Решить уравнение $2sin^3(\pi + x) = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$. Найдите все корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Неправильное решение: $2sin^3(\pi + x) = \frac{1}{2}(-sinx)$;

$$2(-sin^3x) + \frac{1}{2}sinx = 0 \;/* \;(-2);$$

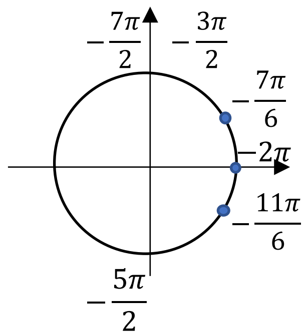
$$sinx(-4sin^2x + 1) = 0;$$

$$sinx = 0 \qquad\qquad 4sin^2x = 1;$$

$$x = \pi n, n \in Z \qquad\qquad sin^2x = \frac{1}{4};$$

$$sinx = \pm\frac{1}{2};$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$



Ответ: а) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$, б) $-\frac{11\pi}{6}, -2\pi, -\frac{7\pi}{6}$

Правильное решение: $2sin^3(\pi + x) = \frac{1}{2}(-sinx)$;

$$2(-sin^3x) + \frac{1}{2}sinx = 0 \ /* \ (-2);$$

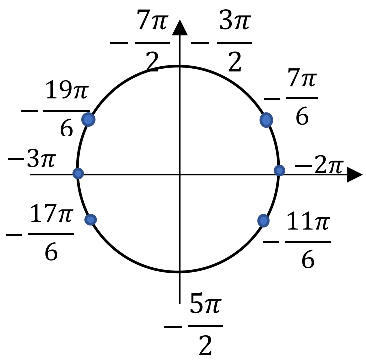
$$sinx(-4sin^2x + 1) = 0;$$

$sinx = 0;$ $\quad$ $4sin^2x = 1;$

$x = \pi n, n \in Z.$ $\quad$ $sin^2x = \frac{1}{4};$

$sinx = \pm\frac{1}{2};$

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$



Ответ а) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$, б) $-\frac{7\pi}{6}; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}; -3\pi -\frac{19\pi}{6}$.

3. В тригонометрических уравнениях, как и в других видах уравнений, причиной ошибок становится невнимательное отношение к области допустимых значений (ОДЗ).

Пример 4. Решить уравнение $3tg^2x + 4tgx + 4ctgx + 3ctg^2x + 2 = 0$ (решение смотри в приложении Б).

4. Так же учащиеся забывают, что сокращение уравнения на выражение, содержащее неизвестную, часто приводит к потере корней уравнения. Кроме того, универсальная подстановка так же может привести к потере корней.

Пример 5. Решить уравнение $cosx\ (2sin2x - x) = cosxsin2x$.

Неправильное решение. $2sin2x - 1 = sin2x$;

$$sin2x = 1;$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Правильное решение. $cosx\ (2sin2x - 1) - cosxsin2x = 0$

$$cosx\ (2sin2x - 1 - sin2x) = 0;$$

$$cosx\ (sin2x - 1) = 0;$$

$$1)\ cosx = 0, x = x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$2)\ sin2x - 1 = 0, \qquad sin2x = 1,$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

5. Еще одна причина появления ошибок – недостаточное внимание к проверке. Не следует забывать, что при отборе корней тригонометрических уравнений часто удобно использовать единичную окружность.

Таким образом, необходимо помнить, что при решении тригонометрических уравнений:

1. Нельзя сокращать на перемнную величину, это может привести к потере корней уравнения. Необходимо каждый множитель исследовать на решение;

2. Необходимо учитывать область допустимых значений (О.Д.З.);

3. При возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появляться посторонние корни. Необходим отбор полученных решений, но это сложно, поэтому по возможности нужно обходиться без этой операции;

4. Потеря корней уравнения может произойти и от замены тригонометрических функций через тангенс $tg\frac{x}{2} = t$ - универсальная тригонометрическая подстановка.

2.4 Конспекты уроков по теме исследования

Урок изучения нового материала

Тема урока: Решение тригонометрических уравнений.

Тип урока: Изучение нового материала.

Цель урока:

-Образовательная: научиться решать тригонометрические уравнения следующими способами: введение вспомогательного угла, введение выражений для $sinx$ $и$ $cosx$ $через$ $tg\frac{\alpha}{2}$ по формулам, сведение к однородному уравнению, преобразование суммы в произведение, возведение в квадрат обеих частей уравнений и замена выражения.

-Воспитательная: воспитать аккуратность, внимательность при решении уравнений

-Развивающая: развить навыки умения работать с учебником, умение самостоятельно найти необходимую информацию, развить умение применять полученные знания на уроке в процессе работы.

Метод обучения: объяснительно-иллюстративный

УУД: личностные: формировать учебную мотивацию, самооценку и необходимость приобретения новых знаний;

Коммуникативные: умение выражать свои мысли при решении уравнений;

Познавательные: умение выбрать подходящий метод решения уравнения, в зависимости от типа уравнения.

Регулятивные: формирование сознательности мышления

Оборудование: интерактивная доска, меловая доска, Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях. Учебник (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов – Москва : Просвещение, 2020г,

Структура урока:

1. Организационный момент. Постановка цели.
2. Актуализация знаний.

3. Изучение нового материала. Первичное закрепление.
4. Постановка домашнего задания.
5. Подведение итогов. Рефлексия.

Ход урока:

1. Организационный момент. Постановка цели.

Приветствие учащихся. Перекличка. Постановка темы и цели урока.

2. Актуализация знаний.

Сколько тригонометрических функций вы знаете? И какие? (4, синус, косинус, тангенс, катангенс)

Что такое синус, косинус, тангенс, катангенс?

3. Изучение нового материала. Первичное закрепление.

Рассмотрим различные способы решения уравнения.

$$sin\,x + cos\,x = 1 \qquad (*)$$

I способ. Введение вспомогательного угла:

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$sin\,x + cos\,x = 1 \ \ /:\sqrt{2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}sinx + \frac{1}{\sqrt{2}}cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{или}$$

$$cos\frac{\pi}{4}sin\,x + sin\frac{\pi}{4}cos\,x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k \in Z, \text{т. е.}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

II способ: введение выражений для $sin\alpha$и $cos\alpha$ через $tg\frac{\alpha}{2}$по формулам:

$$sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

Обращение к функциям $tg\frac{\alpha}{2}$ предполагает, что $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, т.е. $x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$. Итак по формулам (1) из исходного уравнения (*) получаем:

III способ: Сведение к однородному уравнению.

Выразим $sin\, x, cos\, x$ и 1 через функции половинного аргумента:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2},$$

$$2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} - 2sin^2\frac{x}{2} = 0\ /{:}\ 2cos^2\frac{x}{2},$$

$$tg\frac{x}{2} - tg^2\frac{x}{2} = 0, \text{или } tg\frac{x}{2}\left(1 - tg\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$\text{Если } tg\frac{\pi}{2} = 0, \text{ то } \frac{x}{2} = \pi n, n \in Z,$$

$$\text{Если } tg\frac{\pi}{2} = 1, \text{ то } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

IV способ. Преобразование суммы в произведение.

Выразим $cos\, x$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = 1.$$

Отсюда: $2tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2}$

$$2tg\frac{x}{2} - 2tg^2\frac{x}{2} = 0\ /{:}\ 2,$$

$$tg\frac{x}{2}\left(1 - tg\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$tg\frac{x}{2} = 0 \text{ или } tg\frac{x}{2} = 1.$$

Если $tg\frac{x}{2} = 0$, то $\frac{x}{2} = \pi n, n \in Z$ и тогда $x = 2\pi n, n \in Z$.

Если $tg\frac{x}{2} = 1$, то $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

$$sin\,x + sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1,$$

$$2\,sin\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} * cos\frac{x + \frac{\pi}{2} + x}{2} = 1,$$

$$2sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{или } \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1. \text{Тогда}$$

$$cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } x - \frac{\pi}{4} = \pm arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

V способ: Применение формулы

$$sin\,x + cos\,x = \sqrt{2}\,sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt{2}sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1\ /: 2$$

$$sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

VI способ: Возведение в квадрат обеих частей уравнения $(*)$.

$$(sinx + cosx)^2 = 1,$$

$$2sinxcosx + 1 = 1,$$

$$2sinxcosx = 0\ \ /: 2,$$

$$sinx = 0 \text{ или } cosx = 0,$$

Если $sinx = 0$,то $x = \pi k, k \in Z$.

Если $cosx = 0$,то $x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Этот способ требует отбора решений.

Из серии чисел $x = \pi k$ решением будет серия $x = 2\pi k, (k \in Z)$ – постороннее решение.

$$sinx \pm \sqrt{1 - sin^2x} = 1,$$

$$\pm\sqrt{1 - sin^2x} = 1 - sinx,$$

$$1 - sin^2x = (1 - sinx)^2,$$

$$(1 - sinx)(1 + sinx - 1 + sinx) = 0,$$

$$2(1 - sinx)sinx = 0,$$

$$sinx = 1 \text{ или } sinx = 0.$$

$$\text{Если } sinx = 1, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Если } sinx = 0, \text{ то } x = \pi k, k \in Z.$$

Из серии $x = \pi k$ решением является только $x = 2\pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, x = 2\pi k, k \in Z.$

Урок закрепления изученного материала

Тема урока: Тригонометрические уравнения.

Тип урока: Закрепление изученного материала.

Цель урока:

-Образовательная: научиться решать тригонометрические уравнения следующими способами: алгебраический метод, метод разложения на множители, однородные уравнения первой и второй степени.

-Воспитательная: воспитать аккуратность, внимательность при решении уравнений.

-Развивающая: развить навыки умения работать с учебником, умение самостоятельно найти необходимую информацию, развить умение применять полученные знания на уроке в процессе работы.

Метод обучения: самостоятельная работа.

УУД: личностные: формировать учебную мотивацию, самооценку и необходимость приобретения новых знаний;

Коммуникативные: умение выражать свои мысли при решении уравнений;

Познавательные: умение выбрать подходящий метод решения уравнения, в зависимости от типа уравнения.

Регулятивные: формирование сознательности мышления.

Оборудование: интерактивная доска, меловая доска, Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях. Учебник (профильный уровень) - Мордкович А.Г., Семенов П.В. — Москва : Просвещение, 2020г,

1.Структура урока:

2.1. Организационный момент. Постановка цели.

3.2. Актуализация знаний.

4.3. Закрепление материала.

5.4. Постановка домашнего задания.

6.5. Подведение итогов. Рефлексия.

Ход урока:

1. Организационный момент.

   Приветствие учащихся. Перекличка. Постановка темы и цели урока.

2. Актуализация знаний.

   Какие тригонометрические функции вы знаете? (*sin a*, *cos a*, *tg a, ctg a*).

   Какие решение простейших тригонометрических уравнений вы знаете?

3. Закрепление материала.

   Начнем с вами с решения уравнений, а после будет самостоятельная работа на 25 минут.

Задание 1. а) Решите уравнение $2\,cos^2x + 2\sin 2x = 3$. б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение: $2cos^2x + 2(2sinxcosx) = 3$, представим 3 как $3 * 1$,

$$2cos^2x + 2(2sinxcosx) = 3(cos^2x + sin^2x),$$

$$2cos^2x + 4sinxcosx - 3cos^2x - sin^2x,$$

$$-cos^2x + 4sinxcosx - 3cos^2x = 0, \qquad /: cos^2x$$

$$-1 + 4tgx - 3tg^2x = 0,$$

$$tgx = t,$$

$$-3t^2 + 4t - 1 = 0,$$

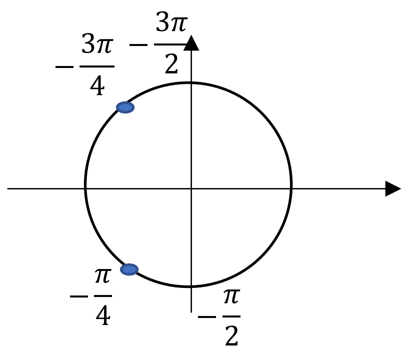
$$3t^2 - 4t + 1 = 0,$$

$$D = 16 - 4 * 3 = 4 = 2^2,$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{3}$$

$$tgx = 1, \qquad tgx = \frac{1,}{3}$$

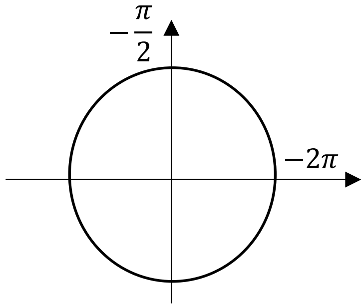
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \qquad x = arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$$



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, x =,$ *б)* $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$

Задание 2. а) решите уравнение $tg^2x + 5tg\,x + 6 = 0$. б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

$$tgx = t,$$
$$t^2 + 5t + 6 = 0,$$
$$D = 25 + 4 * 6 = 49 = 7^2,$$
$$t_1 = \frac{-5+7}{2} = 1,\ t_2 = \frac{-5-7}{2} = -6,$$
$$tgx = 1,\ tgx = -6,$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z.\ x = -arctg6 + \pi n, n \in Z.$$



Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z, x = -arctg6 + \pi n, n \in Z$

Таблица 3 - Самостоятельная работа

Вариант 1	Вариант 2
Задание 1. а) Решите уравнение $4cos^3x + 3cosx + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}sin^2x$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.	***Задание 1.*** а) Решите уравнение $tgx + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 0$. б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
Задание 2. а) Решите уравнение $4sin^2x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.	***Задание 2.*** а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + cos2x = sinx - 1$. б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.
Задание 3. Найдите число корней уравнения $2cos^2x + 5sinx + 1 = 0$. Принадлежащие промежутку $(0; 2\pi)$.	***Задание 3.*** Найдите число корней уравнения $sin^2x + 2sinxcosx = 3cos^2x$ на интревале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на то, что тригонометрия является одной из важнейших составных частей школьного курса математики. Тема «Тригонометрические уравнения» занимает в школьном курсе одно из важных мест. Без умения решать такие уравнения невозможно дальнейшее изучение тригонометрии и решение задач.

В выпускной квалификационной работе нами была рассмотрена важная тема «Тригонометрические уравнения», так как эта тема встречается в ЕГЭ заданиях 10 и 12. В заданиях 12 необходимо решить тригонометрическое уравнение и отобрать корни на промежутке.

В ходе работы были изучены теоретические основы темы «Тригонометрические уравнения», было проанализировано содержание школьных учебников таких авторов как А. Г. Мерзляк, А. Н. Колмогоров и А. Г. Мордкович и все учебники подходят как для изучения в школе, так и для домашнего изучения. Все авторы учебников используют большой спектр формул, которые необходимы для решения тригонометрических уравнений.

Кроме того были рассмотрены методы решения тригонометрических уравнений, был проведен констатирующий эксперимент по теме исследования и были составлены методические рекомендации по предупреждению ошибок, разработаны конспекты уроков, составлены тренировочные упражнения для учащихся старших классов по подготовке к ЕГЭ в приложении А и решение тренировочных упражнений представлены в приложении Б.

В методических рекомендациях были рассмотрены типовые ошибки, приведены примеры неправильных и правильных решений с комментариями, где можно наглядно показать где и какая ошибка была допущена и как ее исправить.

Задачи и цели, поставленные в ходе выполнения выпускной квалификационной работы достигнуты. Подводя итоги, можно отметить, что созданные методические материалы можно использовать учителям и учащимся средней школы при изучении темы «Тригонометрические уравнения» и для подготовки к ЕГЭ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аджиева, А. Тригонометрические уравнения /А.Аджиева// Математика. Приложение к газете «Первое сентября» - Москва : Просвещение, 2015 г. – № 33. – с.13.
2. Александров, А. Д. Математика, алгебра и начала математического анализа, геометрия, 10-11 классы, учебник для общеобразовательных организаций, базовый и углубленный уровни / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, Рыжик В. И. – Москва : 2014. – 308 с.
3. Алимов, Ш. А., Алгебра и начала анализа 10-11 / Ш. А. Алимов, Юю М. Колягин. Учебник – Москва : Просвещение, 2016. – 216с.
4. Алимов, Ш.А.. Алгебра. 9 класс: учебн. для общеобразоват. учреждений – Москва.: Просвещение, 2014. – 336 с.
5. Алимов, Ш. А.. Алгебра. 10-11 классов: учебн. для общеобразоват. учреждений – Москва : Просвещение, 2013. – 646 с.
6. Алимов, Ш. А., «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов, / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин, – Москва : Просвещение, 18-е издание, 2012. – 128 с.
7. Арлазаров, В. В. Лекции по математике для физико-математических школ. Часть 2. Иррациональные уравнения, системы и неравенства, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, тригонометрия, обратные тригонометрические функции / В. В. Арлазаров и др. – Москва : ЛКИ, 2017. - 264 с.
8. Виленкин, Н. Я., учебное издание, Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия 10 класс, / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Швацбурд, – Москва : Просвещение, 2014. – 421 с.
9. Высоцкий, И., ЕГЭ – 2022. Математика. Типовые экзаменационные работы. 30 вариантов / И. Высоцкий, И. Ященко – Национальное образование, 2021. – 192 с.

10. Гельфанд, И. М., Тригонометрия / И. М. Гельфанд, С.М. Львовский, А. Л. Тоом // МЦНМО АО «Московские учебники» Москва : 2002. – 367с.
11. Гешелин, А.М. Избранные вопросы тригонометрии / А.М. Гешелин. – Москва: ОБЛОНО, 2019. - 194 с.
12. Далингер, В. А. Математика: тригонометрические уравнения и неравенства: учеб. Пособие для СПО/ В. А. Далингер. – 2-е изд. Испр. И доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2019.-136 с.
13. Дземяшевич, Е. В., Подготовка к единому государственному экзамену по математике / Дземяшевич, Е.В., Иванова Т.И. – Тульский государственный университет, 2013. – 95 с.
14. Дорофеев, Г. В. Алгбра и начала анализа. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений: В 2 ч. Ч 1 / Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнейова, Е.А. Седова. – Москва : Дрофа, 2009. – 320 с.
15. Евсеевичева, А. Геометрия, тригонометрия. Математика - это легко / А. Евсеевичева. – Москва : Аванта +, 2019. - 681 с.
16. ЕГЭ – 2022. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – Москва : Национальное образование, 2021. - 192 с. (ЕГЭ – 2022. ФИПИ – школе).
17. Звавич В. И., Пигарев Б.П. Тригонометрические уравнения / В. И. Звавич, Б. П. Пигарев // Математика в школе, 2015. – № 2. –С.23-33.
18. Зарецкий В. И. Изучение тригонометрических функций в средней школе / В. И. Зарецкий — Минск : Народная асвета, 1970 – 194 с.
19. Карасев, В. А. 12 уроков по тригонометрии / В. А. Карасев. – Москва : Илекса, 2018. - 867 с.
20. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных. учреждений: базовый / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын – Москва : Просвещение, 2010;
21. Литвинович, Е. А. Геометрия, тригонометрия / Е. А. Литвинович. – Москва : ИЗД-ВО "МИР ЭНЦИКЛОПЕДИЙ", 2019. - 345 с.

22. Локоть В. В. Задачи с параметрами и их решение. Тригонометрия: уравнения, неравенства, системы. 10 класс / В. В. Локоть 3-е изд., испр. и доп. – Москва : АРКТИ, 2018. – 64 с.
23. Макарычев Ю. Н. Учебник тригонометрия 10 класс / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова – Под ред. С. А. Теляковского. – 3-е изд. – Москва: Просвещение, 2017. – 61 с.
24. Математика. ЕГЭ-2015. Тренажер по тригонометрии. Задание С1 / С.О. Иванов и др. – Москва : Легион, 2017**.** **-** 782 с.
25. Мерзляк А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник. Углубленное изучение / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков, Д. А. Номировский – Москва : издательский центр «Вентана- Граф» 2019г. -477 с.
26. Мирошин, В . Отбор корней в тригонометрических уравнениях // Математика. Приложение к газете «Первое сентября» Москва : 2015– № 17
27. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях. Учебник (профильный уровень) - А. Г. Мордкович, П. В. Семенов – Москва : Просвещение, 2020г.
28. Мордкович, А. Г. Беседы с учителем. Москва : ООО «Издательский дом “ОНИКС 21 век» : ООО “Издательство «Мир и Образование», 2015г.
29. Муравин, Г. К. Муравина, О.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень – Г. К. Муравин, О. В. Муравина – Москва : Просвещение, 2019г.
30. Никольский, М. К., Алгебра и начала анализа : учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений : базовый и профил. Уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – Москва. : Просвещение, 2013. – 432 с.
31. Окунев, А. К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач / А. К. Окунев. – Москва : ЁЁ Медиа, 2018**.** **-** 558 с.

32. Орлова Т. Решение однородных тригонометрических уравнений: Конкурс “Я иду на урок” //Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 48, 2019г.;
33. Пичурин, Л. Ф . О тригонометрии и не только о ней / Л.Ф. Пичурин. – Москва : Просвещение, 2015. – 247 с.
34. Потапов, М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции / М.К. Потапов. – Москва : Высшая школа, 2018. - 849 с.
35. Потапов, М. К. Алгебра. Тригонометрия и элементарные функции / М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко. – Москва : - 2017. – 954с.
36. Раббот, Ж. Тригонометрические уравнения Квант / Раббот, 1972 –№5 – с. 36-38.
37. Репьев, В.В. Методика тригонометрии / В. В. Репьев. – Москва : ЁЁ Медиа, 2018. - 557 с.
38. Севрюков, П. Ф. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. – Илекса; Народное образование; Ставраполь: Сервисшкола, 2008. – 352 с.
39. Смоляков, А. Н., Приемы решения тригонометрических уравнений //Математика в школе / А. Н. Смоляков, П. Ф. Севрюков 2004 –№ 1 –с. 24.
40. Стромова З. С. Математика. Способы решения экзаменационных задач. / Под редакцией З. С. Стромова. - Волгоград: Братья Гринины, 2009. - 64с.
41. Таблица формул по тригонометрии. Без выходных данных. – 2019. -2с.

Шарыгин, И. Ф. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие / И. Ф. Шарыгин. – 6-е издание, – Москва : 2006. – 215 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Тренировочные упражнения для учащихся старших классов по подготовке к ЕГЭ

Таблица 1 – Тренировочные упражнения

Алгебраический метод.
1. Решите уравнение: $2sin^2x + cos4x = 0$. 2. Решите уравнение: $3cos^2x + sin^2x - sin2x = 0$. 3. Решите уравнение: $\sin(3arccosx) = \frac{1}{2}$. 4. Решите уравнение $sin\frac{\pi(x+2)}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. в ответе запишите наименьший положительный корень. 5. Решите уравнение: $\sin(4arctgx) = 1$. 6. Решите уравнение $ctg\frac{\pi x}{8} = 1$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения. 7. Решить уравнение $(1 + 2cosx)\sqrt{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$=0. 8. Решить уравнение $4\|sinx\| + 2cos2x = 3$.
Метод разложения на множители
9. Решите уравнение: $cos4x + 5sin^2x = 1 + 2sin^2 2x$. 10. Решите уравнение: $sinx + sin2x + (1 + 2cosx)cosx = 0$. 11. Решите уравнение: $2sin^2x\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -cosx$. Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. 12. Решите уравнение: $cos15x = sin5x$. 13. Решите уравнение: $5sin^2x + \sqrt{3}sinxcosx + 6cos^2x = 5$.
Приведение к однородному уравнению

14. Решите уравнение: $3tg^2x + 4tgx + 4ctgx + 3ctg^2x + 2 = 0$.

15. Найдите число корней уравнения $4sin^2x - 4cosx - 1 = 0$ принадлежащих промежутку $(-\pi; 2\pi)$.

16. Найдите число корней уравнения $sin^2x + 2sinxcosx = 3cos^2x$ на интервале $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$.

17. Решить уравнение: $4|cosx| + 3 = 4sin^2x$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица 1 – Решение тренировочных упражнений

1. Решите уравнение: $2sin^2x + cos4x = 0$
Решение: Заменим $2sin^2x$ на $1 - cos2x$, а $cos4x$ разложим по формуле двойного угла $cos2x = 2cos^2x - 1, cos4x = 2cos^2 2x - 1$, $1 - cos2x + 2cos^2 2x - 1 = 0,$ $2cos^2 2x - cos2x = 0,$ $cos2x(2cos2x - 1) = 0,$ Приравняем к нулю каждый из множителей: $cos2x = 0,$ и $2cos2x - 1 = 0,$ $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$ $2cos2x - 1 = 0,$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$ $2cos2x = 1,$ $cos2x = \frac{1}{2},$ $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z,$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z.$ *Ответ:* $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z, x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$
2. Решите уравнение: $cos4x + 5sin^2x = 1 + 2sin^2 2x$
Решение: Используя формулу двойного угла и основного тригонометрического тождества, получим: $2 - 2sin^2 2x - 1 + 5sin^2x = 1 - 2sin^2 2x,$ $1 + 5sin^2x = 1 + 2(sinxcosx)^2,$ $4sin^2x = 4sin^2xcos^2x,$ $4sin^2x - 4sin^2xcos^2x = 0,$ $4sin^2x - (1 - cos^2x) = 0,$ $4sin^2xsin^2x = 0,$ $4sin^4x = 0,$ $sin^4x = 0,$

$$sinx = 0,$$

$$x = \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = \pi k, k \in Z$

3. Решите уравнение: $sinx + sin2x + (1 + 2cosx)cosx = 0$

Решение: Представим $sin2x = 2sinxcosx,$ тогда

$$sin\, x + 2\, sin\, x\, cos\, x + 2cos^2 x = 0,$$

Вынесем $\sin x$ за скобку, а во второй сумме внесем $cosx$ и получим:

$$sin\, x(1 + 2\, cos\, x) + cos\, x(1 + 2\, cos\, x) = 0,$$

$$(1 + 2\, cos\, x) * (sin\, x + cos\, x) = 0,$$

$$1 + 2\, cos\, x = 0, \quad sin\, x + cos\, x = 0,$$

$$2\, cos\, x = -1, \quad sin\, x = -\, cos\, x,$$

$$cos\, x = -\frac{1}{2}, \qquad tg\ x = -1,$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \qquad x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in Z.$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z;\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in Z$

4. Решите уравнение: $3tg^2 x + 4tgx + 4ctgx + 3ctg^2 x + 2 = 0$

Решение: ОДЗ: $sinx \neq 0, x \neq \pi k, k \in Z$

$cosx \neq 0, x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$$3(tg^2 x + ctg^2 x) + 4(tgx + ctgx) + 2 = 0,$$

$$3(tgx + ctgx)^2 + 4(tgx + ctgx) + 2 = 0,$$

Заменим $(tgx + ctgx) = a,$

$$3(a^2 - 2) + 4a + 2 = 0,$$

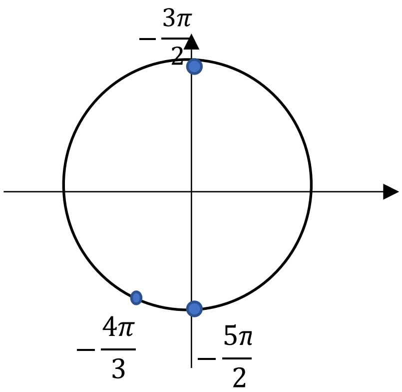
$$3a^2 + 4a - 4 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 * 3 * (-4) = 16 + 48 = 64 = 8^2$$

$$a_1 = \frac{-4+8}{6} = \frac{2}{3}, \qquad a_2 = \frac{-4-8}{6} = -2,$$

$tgx + ctgx = \frac{2}{3}, \qquad tgx + ctgx = -2,$ $tgx + ctgx - \frac{2}{3} = 0$ заменим $ctgx = \frac{1}{tgx}, \qquad tgx + ctgx + 2 = 0,$ $tgx + \frac{1}{tgx} - \frac{2}{3} = 0, \qquad tgx + \frac{1}{tgx} + 2 = 0,$ $\frac{3tg^2x+3-2tgx}{3tgx} = 0, \qquad \frac{tg^2x++2tgx}{tgx} = 0,$ $3tg^2x - 2tgx + 3 = 0, \qquad tg^2x + 2tgx + 1 = 0,$ Заменим tgx на $t \rightarrow 3t^2 - 2t + 3 = 0,$ Заменим tgx на $t \rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0,$ $D = -24 \Longrightarrow$ нет корней, нет решения $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 * 1 * 1 = 0,$ $tgx = 0,$ $x = \pi k, k \in Z.$ *Ответ:* нет решения
5. Решите уравнение: $3cos^2x + sin^2x - sin2x = 0$
Решение: $3cos^2x + sin^2x - 2sinxcosx = 0$ /:$cos^2x,$ $3 + tg^2x - 2tgx = 0,$ $-tg^2x + 2tgx + 3 = 0,/* (-1)$ Заменим tgx на t, $t^2 - 2t - 3 = 0,$ $D = b^2 - 4ac = 4 + 4 * 3 = 16 = 4^2,$ $t_1 = \frac{2+4}{-2} = -3, \quad t_2 = \frac{2-4}{-2} = 1,$ $tgx = -3, \qquad tgx = 1,$ $x = arctg(-3) + \pi k, k \in Z, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z.$ $x = -arctg3 + \pi k, k \in Z.$ *Ответ:* $x = -arctg3 + \pi k, k \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z.$
6. Решите уравнение: $\sin(3arccosx) = \frac{1}{2}$
Решение: Используя единичную окружность, найдем углы, для которых $sinx = \frac{1}{2}$ $3\,arccosx = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z,$

$$x = cos\frac{1}{6},$$ *Ответ:* $x = cos\frac{1}{6}$
7. Решите уравнение $sin\frac{\pi(x+2)}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. в ответе запишите наименьший положительный корень.
Решение: $\frac{\pi(x+2)}{3} = \frac{4\pi}{3},\quad \frac{\pi(x+2)}{3} = \frac{5\pi}{3},$ $$\pi(x+2) = 4\pi,\quad \pi(x+2) = 5\pi,$$ $$x = 2 + 6k, k \in Z,\quad x = 3 + 6m, m \in Z,$$ *Ответ: 2*
8. Решите уравнение: $\sin(4arctgx) = 1$
Решение: Используя единичную окружность, найдем углы, для которых $sinx = 1,$ $$4arctgx = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$ $$x = tg\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z,$$ *Ответ:* $x = tg\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$
9. Решите уравнение $2sin^2x\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -cosx$. Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.
Решение: По формуле приведения получаем: $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos\,x$; $2cos^2x = -cosx,$ $$2cos^2x + cosx = 0,$$ $$cosx(2cosx + 1) = 0,$$ $$cosx = 0,\quad 2cosx + 1 = 0,$$ $$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\quad cosx = -\frac{1}{2},$$ *а)* $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$



б)$-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$

Ответ: *а)* $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$, *б)*$-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$

10. Найдите число корней уравнения $4sin^2x - 4cosx - 1 = 0$ принадлежащих промежутку $(-\pi; 2\pi)$.

Решение: Представим sin^2x по основному тригонометрическому тождеству как $(1 - cos^2x)$

$$4(1 - cos^2x) - 4cosx - 1 = 0,$$

$$4 - 4cos^2x - 4cosx - 1 = 0,$$

$$-4cos^2x - 4cosx + 3 = 0 \text{ /*(-1)},$$

$$4cos^2x + 4cosx - 3 = 0,$$

Заменим $cosx = t$,

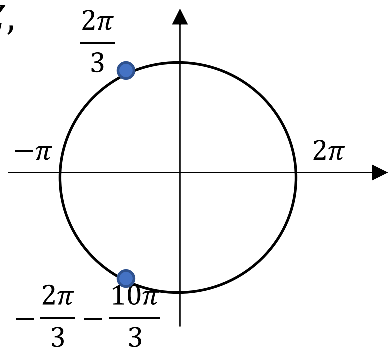
$$4t^2 + 4t - 3 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 + 4 * 4 * 3 = 64 = 8^2,$$

$$t_1 = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{4-8}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2},$$

$cosx = \frac{3}{2} > 1$ нет корней $\quad cosx = -\frac{1}{2}$,

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z,$$



Ответ: 3

11. Найдите число корней уравнения $sin^2x + 2sinxcosx = 3cos^2x$ на интервале $(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2})$.

Решение: $sin^2x + 2sinxcosx - 3cos^2x = 0$,

Разделим уравнение на cos^2x: $tg^2x + 2tgx - 3 = 0$,

Заменим $tgx = t$, тогда

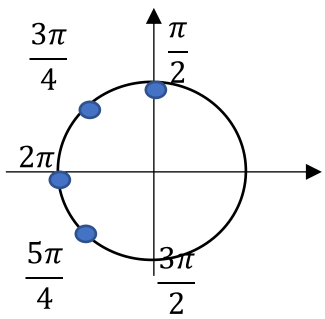
$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

$$D = 4 + 4 * 3 = 16 = 4^2,$$

$$t_1 = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{-2-4}{2} = -3,$$

$$tgx = 1, \quad tgx = -3,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \quad x = -arctg3 + \pi n, n \in Z$$



Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; 2\pi$

12. Решите уравнение $ctg\frac{\pi x}{8} = 1$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.

Решение: $x \neq 8k, k \in Z$.

$$\frac{\pi x}{8} = \frac{\pi}{4},$$

$$x = 2 + 8k, k \in Z.$$

Ответ: $x = 2 + 8k, k \in Z$.

13. Решить уравнение $4|cosx| + 3 = 4sin^2x$.

Решение: $4|cosx| + 3 = 4(1 - cos^2x)$,

$$4|cosx| + 3 = 4 - 4cos^2x,$$

$$4|cosx| + 3 - 4 + 4cos^2x = 0,$$

$$4|cosx| - 1 + 4cos^2 x = 0,$$
$$4cos^2x + 4|cosx| - 1 = 0,$$
$$cosx = t,$$
$$4t^2 + 4t - 1 = 0,$$
$$D = 16 + 4 * 4 * 1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$
$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$

14. Решить уравнение $(1 + 2cosx)\sqrt{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$=0

Решение: $(1 + 2cosx) = 0$ и $\sqrt{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 0,$

$2cosx = -1,$

$$cosx = -\frac{1}{2}, \quad x + \frac{\pi}{4} = 0,$$
$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

15. Решить уравнение $4|sinx| + 2cos2x = 3$

Решение: $4|sinx| + 2\ (2cos^2x - 1) = 3,$

$$4|sinx| + 2\ (2(1 - sin^2x) - 1) = 3,$$
$$4|sinx| + 2 - 4sin^2x = 3,$$
$$4sinx - 1 - 4sin^2x = 0,$$
$$-4sin^2x + 4sinx - 1 = 0,$$
$$sinx = t,$$
$$-4t^2 + 4t - 1 = 0,$$
$$D = 16 - 16 = 0,$$
$$t_1 = \frac{1}{2}, \qquad t_2 = -\frac{1}{2},$$
$$sinx = \frac{1}{2}, \qquad sinx = -\frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z,$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z$