Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: 44.03.05 – «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», 44.03.01 – «Педагогическое образование» (Протокол № 826 от 22 июня 2020 г.)

Красноярск-Лесосибирск, 2020

УДК 372.851

ББК 22.141я73+22.191я73

Э 456

Рецензенты:

Т.Ю. Войтенко, канд. физ.-мат. наук, доцент (Лесосибирский филиал Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева);

С.С. Ахтамова, канд. пед. наук, доцент (Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета)

Э 456 Элементарная математика. Уравнения и неравенства с модулем: учеб. пособие / А.В. Фирер, Е.Н. Яковлева, А.П. Елисова, Т.В. Захарова; отв. ред. Н.К. Игнатьева. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2020. – 113 с.

ISBN 978-5-7638-4371-2

В учебном пособии систематизирована информация о способах и приемах решения рациональных уравнений, неравенств и их систем, содержащих переменную под знаком модуля. Представлены задания для самостоятельной работы, в том числе интерактивные задания, созданные в LearningApps.org, а также примерный тест для проверки знаний и умений.

Приведенные материалы способствуют формированию у студентов компетенций, определяемых ФГОС ВО.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования, где предусмотрено изучение курса «Математика», а также для обучающихся по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование и 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

ISBN 978-5-7638-4371-2

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Задачи с модулем часто вызывают трудности у студентов при изучении соответствующих разделов элементарной математики. Данное учебное пособие содержит материал, направленный на формирование профессиональных компетенций при подготовке бакалавров педагогического образования в соответствии с ФГОС ВО.

Целью данного учебного пособия является применение системного подхода к организации самостоятельной познавательной деятельности студентов в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта и современной парадигмой образования.

Задачи:

– раскрыть основные теоретические разделы курса «Элементарная математика. Уравнения и неравенства с модулем»;

– сформировать у студентов навыки самостоятельной познавательной деятельности, необходимые для их дальнейшего самообразования;

– развить мотивацию самостоятельности познавательной деятельности как потребности в получении новых знаний;

– раскрыть творческие способности студентов.

Структура пособия определяется его содержанием и дидактическими задачами. Каждый раздел посвящен определенным темам, снабжен примерами решения задач, интерактивными вопросами для самоконтроля, заданиями для самостоятельной работы, имеющими три уровня сложности. Это позволяет создать единую логику изложения каждой темы, что дает возможность формировать у студентов умение строить относительно логичные и последовательные частные суждения на основе общего подхода.

Вопросы и задания различны по уровню сложности. Часть их связана с репродуктивным усвоением и переработкой информации. Большинство из них нацелено на аналитическую работу студентов на основе активизации многих интеллектуальных функций: сравнения и сопоставления, абстрагирования и конкретизации, классифицирования и обобщения и др. Так, например, метод конкретной ситуации развивает способность анализировать и самостоятельно формулировать познавательные задачи.

Выполнение конкретного задания при знакомстве студента с новым материалом помогает глубже понять изучаемый материал, выделить познавательные задачи и цели учебной деятельности.

При работе над пособием использовалась учебная литература, список которой приведен в конце и может служить основой для последующего самостоятельного изучения данного курса.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О МОДУЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

1.1. Различные подходы к определению модуля

Модулем или абсолютной величиной действительного числа а называется само это число, если оно неотрицательно, или противоположное ему число, если оно отрицательно:

$$|\,a\,| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрически модуль числа можно интерпретировать как ***расстояние*** от начала координат до точки, соответствующей числу *a* (рис. 1.1).

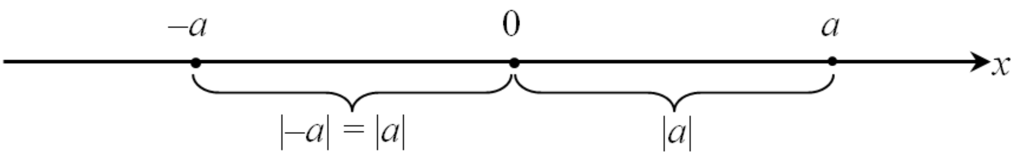


Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация модуля

Данное определение согласуется с определением модуля числа, данного выше. Действительно, расстояние от начала отсчета до точки, которой соответствует положительное число, равно этому числу. Нулю соответствует начало отсчета, поэтому расстояние от начала отсчета до точки с координатой 0 равно нулю. Расстояние от начала отсчета до точки с отрицательной координатой равно числу, противоположному координате данной точки, так как равно расстоянию от начала координат до точки, координатой которой является противоположное число. Например, $|\,7\,| = 7$ и $|-7\,| = 7,$ так как расстояние от точек с координатами 7 и –7 до начала отсчета равно 7.

***Пример* 1.1.** Раскрыть модуль:

а) $\left|1-\sqrt{5}\right|$;

б) $\left|x^2 - x + 1\right|$;

в) $\dfrac{||x|-1|\cdot|x|}{x^2-1}$.

Решение.

а) $|1-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-1,$ так как $1-\sqrt{5}<0$ (согласно определению модуля).

б) $|x^2-x+1|=x^2-x+1,$ так как $x^2-x+1>0$ для любого действительного числа *x*.

в) Определим область допустимых значений переменной (ОДЗ) в выражении $\dfrac{||x|-1|\cdot|x|}{x^2-1}$, исходя из условия $x^2-1\neq 0,\ x\neq\pm1.$

Для преобразования выражения, в котором под знаком модуля находятся выражения, также содержащие модуль, следует сначала освободиться от внутренних модулей, а затем раскрыть оставшиеся модули.

Раскрывая внутренний модуль по определению, получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ \dfrac{|x-1|\cdot x}{x^2-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0, \\ \dfrac{|-x-1|\cdot(-x)}{x^2-1}. \end{cases}$$

Первая система совокупности равносильна совокупности двух следующих систем:

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ x\geq 1, \\ \dfrac{(x-1)\cdot x}{x^2-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq 0, \\ x<1, \\ \dfrac{(-x+1)\cdot x}{x^2-1}; \end{cases}$$

то есть совокупности

$$\begin{cases} x\geq 1, \\ \dfrac{x}{x+1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\leq x<1, \\ -\dfrac{x}{x+1}. \end{cases}$$

Вторая система совокупности равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x<0, \\ -x-1\ge 0, \\ \dfrac{(-x-1)\cdot(-x)}{x^2-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0, \\ -x-1<0, \\ \dfrac{(x+1)\cdot(-x)}{x^2-1}; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x\le -1, \\ \dfrac{x}{x-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<x<0, \\ -\dfrac{x}{x-1}. \end{cases}$$

С учетом ОДЗ запишем ответ.

Ответ: $\dfrac{x}{x+1}$ при $x\in(1;+\infty)$; $-\dfrac{x}{x+1}$ при $x\in[0;1)$;

$\dfrac{x}{1-x}$ при $x\in(-1;0)$; $\dfrac{x}{x-1}$ при $x\in(-\infty;-1)$.

1.2. Свойства модуля

Приведем ***свойства модуля*** (табл. 1), наиболее часто используемые при решении задач. Выражение, которое стоит под знаком модуля, будем для краткости называть «подмодульным», опуская в дальнейшем кавычки.

Таблица 1. Свойства модуля

1	Модуль числа есть неотрицательное число	$\lvert a\rvert\ge 0$
2	Модули противоположных чисел равны	$\lvert -a\rvert=\lvert a\rvert$
3	Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа (справедливо для любой четной степени)	$\lvert a\rvert^2=a^2$ $\lvert a\rvert^{2n}=a^{2n}$
4	Абсолютная величина любого действительного числа a равна арифметическому квадратному корню из a^2 (справедливо для корня любой четной степени)	$\lvert a\rvert=\sqrt{a^2}$ $\lvert a\rvert=\sqrt[2n]{a^{2n}}$
5	Модуль произведения чисел равен произведению модулей этих чисел	$\lvert a\cdot b\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$

6	Модуль частного чисел равен отношению модулей этих чисел	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$, $b \neq 0$
7	Постоянный положительный множитель можно вынести за знак модуля	$\lvert m \cdot a \rvert = m \cdot \lvert a \rvert$, $m > 0$
8	Модуль суммы (разности) двух чисел не превосходит сумму модулей этих чисел	$\lvert a \pm b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$
9	Модуль суммы (разности) чисел больше или равен разности их модулей	$\lvert a \pm b \rvert \geq \lvert a \rvert - \lvert b \rvert$
10	Модуль суммы (разности) чисел больше или равен модулю разности их модулей	$\lvert a \pm b \rvert \geq \lvert\lvert a \rvert - \lvert b \rvert\rvert$
11	Разность модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений, когда эта сумма равна нулю или когда уменьшаемое имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму, а вычитаемое имеет противоположный знак	$\lvert a \rvert - \lvert b \rvert = a - b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b, \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$ $\lvert a \rvert - \lvert b \rvert = b - a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b, \\ \begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$ $\lvert a \rvert - \lvert b \rvert = a + b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0, \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$ $\lvert a \rvert - \lvert b \rvert = -a - b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0, \\ \begin{cases} a \leq 0, \\ b \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
12	Сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений тогда и только тогда, когда каждое выражение имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму	$\lvert a \rvert + \lvert b \rvert = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$ $\lvert a \rvert + \lvert b \rvert = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $\lvert a \rvert + \lvert b \rvert = -a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $\lvert a \rvert + \lvert b \rvert = -a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$
13	Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда одновременно все выражения имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо	$\lvert a \rvert + \lvert b \rvert = \lvert a + b \rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow ab \geq 0$

	одновременно все выражения имеют противоположный знак	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert=\lvert a-b\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge 0,\\ b\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}a\le 0,\\ b\ge 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow ab\le 0$

Свойства 12 и 13 можно распространить и на большее число слагаемых, например, одна из схем 13 для трех слагаемых:

$$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert+\lvert c\rvert=\lvert a+b-c\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge 0,\\ b\ge 0,\\ c\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}a\le 0,\\ b\le 0,\\ c\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

***Пример* 1.2.** Доказать, что $\lvert a+b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$, только если $ab\ge 0$.

Доказательство. В начале докажем свойство 3 (табл. 1): $\lvert a\rvert^2=a^2$. Действительно, при $a\ge 0$ получим $a^2=a^2$, а при $a<0$ $(-a)^2=a^2$. В обоих случаях равенства очевидны. Возведем обе части равенства $\lvert a+b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ в квадрат, получим $a^2+2ab+b^2=a^2+2\lvert ab\rvert+b^2$, откуда $ab=\lvert ab\rvert$, которое является верным только при $ab\ge 0$.

***Пример* 1.3.** Доказать равенство

$$\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\ldots+\lvert a_n\rvert=k_1\cdot a_1+k_2\cdot a_2+\ldots+k_n\cdot a_n \Leftrightarrow \begin{cases}k_1\cdot a_1\ge 0,\\ k_2\cdot a_2\ge 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ k_n\cdot a_n\ge 0,\end{cases} \qquad (1.1)$$

где $k_i=1$ для $a_i\ge 0$ и $k_i=-1$ для $a_i\le 0$, $1\le i\le n$.

Доказательство. Равенство (1.1) является естественным обобщением свойства 12 (см. табл. 1) для *n* слагаемых.

Докажем вначале, что для любого действительного числа

$$\lvert a\rvert-a\ge 0 \text{ и } \lvert a\rvert+a\ge 0. \qquad (1.2)$$

Согласно определению модуля необходимо рассмотреть два случая. Пусть вначале $a \geq 0$, тогда, раскрывая модули выражений $|a| - a$ и $|a| + a$, запишем: $a - a = 0 \geq 0$ и $a + a = 2a \geq 0$. В случае, когда $a < 0$, имеем $-a - a = (-2) \cdot a \geq 0$ и $-a + a = 0 \geq 0$. Равенства (1.2) доказаны.

Докажем исходное утверждение. По определению модуля действительного числа $|a_i| = a_i$, если $a_i \geq 0$, и $|a_i| = -a_i$, если $a_i < 0$ для любого i с условием $1 \leq i \leq n$. Можем обобщенно записать $|a_i| = \pm a_i$, где выбран один из знаков перед a_i, совпадающий со знаком соответствующей подмодульной величины. Тогда сумма модулей в левой части равенства 1.1 примет вид

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = (\pm a_1) + (\pm a_2) + \ldots + (\pm a_n).$$

Перенесем все в левую часть равенства и сгруппируем слагаемые с одинаковыми индексами. Получим

$$\left(|a_1| - (\pm a_1)\right) + \left(|a_2| - (\pm a_2)\right) + \ldots + \left(|a_n| - (\pm a_n)\right) = 0.$$

В силу неравенств (1.2) каждое из выражений $|a_1| - (\pm a_1)$, $|a_2| - (\pm a_2), \ldots,$ $|a_n| - (\pm a_n)$ неотрицательно, поэтому последнее равенство верно тогда и только тогда, когда одновременно $|a_1| - (\pm a_1) = 0$, $|a_2| - (\pm a_2) = 0, \ldots,$ $|a_n| - (\pm a_n) = 0$. Пусть $k_i = \pm 1$. Так как модуль – величина положительная, то это означает, что $k_i \cdot a_i \geq 0$ для всех $1 \leq i \leq n$, а, вместе с тем, знак величины a_i должен совпадать с тем знаком k_i, с которым она входит в алгебраическую сумму правой части равенства (1.1).

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pi3zietc320

1.3. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислить:

1.1.

а) $|-2{,}3|-|-7{,}6|$; **б)** $\left|\frac{1}{4}-\frac{5}{12}\right|-\left|-\frac{5}{6}\right|$; **в)** $\left|2\frac{3}{5}-3\right|+\left|2-1\frac{2}{5}\right|$; **г)** $\left|\frac{1}{7}-7\right|-\left|7-\frac{1}{7}\right|$.

1.2.

а) $|\sqrt{3}-1|+|5-\sqrt{3}|$; **б)** $|\sqrt{8}-3|-|8-2\sqrt{2}|$;

в) $\left|\boldsymbol{\pi}-\frac{18}{5}\right|+|\boldsymbol{\pi}-\sqrt{3}|$; **г)** $\left|-\frac{|\sqrt{18}-\sqrt{27}|}{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}-\sqrt{3}\right|-|1-\sqrt{3}|$.

Задание 2. Раскрыть модуль:

2.1.

а) $|\sqrt{5}-6|$; **б)** $|x^2+7|$; **в)** $\left|\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}\right|$; **г)** $|x-x^2-6|$.

Задание 3. Упростить выражение:

3.1.

а) $|x-4|-5$ при $x>15$;

б) $|x-4|+|x|$ при $x<-5$;

в) $|2x+4|+|5+x|$ при $-4<x<0$.

Задание 4. Упростить выражение:

4.1.

а) $|7x-1|+2$; **б)** $|-x+1|+||x|+1|$; **в)** $\sqrt{x^2-4x+4}$; **г)** $|x^2-1|+x\cdot|x-1|$.

4.2*.

а) $\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}-\frac{|x-1|}{x-1}$; **б)** $\frac{|x-2|+|x|-x}{-3x^2+8x-4}$;

в) $\frac{2x+x\cdot|x|-x\cdot|x-1|+3}{x^2+|x|}$; **г)** $\frac{|x|\cdot|x-2|}{x^2-3x+4-|x|}$.

4.3*.

а) $\dfrac{\left|-x^3+1\right|+\left|x+1\right|}{x^3+x}$; **б)** $\dfrac{|x|\cdot|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$;

в) $\dfrac{\left|x^2-4\right|\cdot|x-1|}{x^3-6x^2+5x+6\cdot|x-1|}$; **г)** $\left(\dfrac{x^2\cdot|x-2|}{x-2}-2x\cdot\dfrac{|x+2|}{x+2}+2x-6\right):|x-3|$.

Задание 5. Вывести из определения модуля следующие соотношения:

5.1.

а) $\dfrac{|a|}{a}+1=0 \Leftrightarrow a<0$; **б)** $\dfrac{|a|}{a}-1=0 \Leftrightarrow a>0$; **в)** $|a|+a=0 \Leftrightarrow a\le 0$;

г) $|a|-a=0 \Leftrightarrow a\ge 0$; **д)** $\dfrac{|a|}{a}+1\ge 0$ при $a\ne 0$; **е)** $\dfrac{|a|}{a}-1\le 0$ при $a\ne 0$.

5.2.

а) $-|a|\le a\le |a|$; **б)** $|a-b|=|b-a|$;

в) $\left|\dfrac{1}{a}\right|=\dfrac{1}{|a|}$ при $a\ne 0$; **г)** $|a|\le b$ при $b\ge 0 \Leftrightarrow -b\le a\le b$.

5.3.

а) $|a|-|b|\le |a+b|\le |a|+|b|$;

б) $|a|-|b|\le |a-b|\le |a|+|b|$;

в) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;

г) $\left||a|-|b|\right|\le |a-b|$;

д) $\left||a|-|b|\right|=|a|+|b| \Leftrightarrow a\cdot b=0$;

е) $\left||a|-|b|\right|=|a+b| \Leftrightarrow a\cdot b\le 0$.

5.4.

а) $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}=\begin{cases} b, \text{ если } a\le b, \\ a, \text{ если } a\ge b; \end{cases}$

б) $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{|a-b|}{2}=\begin{cases} a, \text{ если } a\le b, \\ b, \text{ если } a\ge b; \end{cases}$

в) $\max(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$; г) $\min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

Задание 6*. Доказать:

6.1.

а) $|a|-|b|\geq 0 \Leftrightarrow a^2-b^2\geq 0$;

б) $a+b=\max(a,b)+\min(a,b)$;

в) $|a-b|=\max(a,b)-\min(a,b)$.

Задание 7*. Доказать:

7.1.

а) $|x-a|+|x-b|=b-a$ при $b\geq a \Leftrightarrow a\leq x\leq b$;

б) $|x-a|+|x-b|<b-a$ при $b\geq a \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

2. УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

2.1. Методы решения уравнений с модулем

Уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, называется ***уравнением с модулем.***

Согласно данному определению из двух уравнений $x-2=|-5|$ и $|x+3|=4$ уравнением с модулем является только второе.

При решении уравнений с модулем применяются следующие методы: метод последовательного раскрытия модулей; метод промежутков; метод равносильных переходов; переход к следствию; использование геометрической интерпретации модуля; графический метод; метод введения новой переменной.

Наиболее часто используемый способ решения уравнений с модулем состоит в том, что модули раскрываются на основании определения. Для этого находят значения переменной, при которых подмодульные выражения обращаются в ноль. Тем самым ОДЗ уравнения разбивается на множества, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве уравнение следует записать без знака модуля и решить его на этом множестве. Объединение решений, найденных на всех частях ОДЗ, составляют множество всех решений уравнения. Например, используя определение модуля при решении уравнения $|x-5|=2$, следует рассмотреть два случая: $x-5<0$ или $x-5\geq 0$. При $x<5$ подмодульное выражение $x-5$ отрицательно, следовательно, $-(x-5)=2$, $x=3$. При $x\geq 5$ получаем $x-5=2$, $x=7$. Этот метод решения уравнений с модулем является универсальным, так как с его помощью можно решить любое уравнение с модулем.

***Пример* 2.1.** Решить уравнение $|3x-8|-|3x-2|=6$.

Решение. Раскрывая модуль по определению, необходимо рассмотреть четыре случая.

Случай 1. $\begin{cases} 3x-8\geq 0, \\ 3x-2\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x\geq \frac{8}{3}$. Таким образом, на указанном промежутке уравнение $|3x-8|-|3x-2|=6$ примет вид: $3x-8-(3x-2)=6$ или $-6=6$. Последнее равенство не имеет смысла, следовательно, исходное уравнение при $x\in\left[\frac{8}{3};+\infty\right)$ решений не имеет.

Случай 2. $\begin{cases} 3x-8\geq 0, \\ 3x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{8}{3}, \\ x<\frac{2}{3}. \end{cases}$ Данная система не совместна.

Случай 3. $\begin{cases} 3x-8<0, \\ 3x-2\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\leq x<\frac{8}{3}$. В этом случае уравнение $8-3x-(3x-2)=6$ имеет решение $x=\frac{2}{3}$. Корень уравнения принадлежит промежутку $\left[\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Случай 4. $\begin{cases} 3x-8<0, \\ 3x-2<0, \end{cases} \Leftrightarrow x<\dfrac{2}{3}.$ Раскрыв модули исходного уравнения, имеем $8-3x-(2-3x)=6$ или $6=6$. Последнее равенство справедливо при любых значениях переменной x, значит, наше уравнение имеет решение $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$.

Объединяя все случаи, находим искомое решение исходного уравнения.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right]$.

Отметим, что, раскрывая последовательно все модули в примере 2.1, мы рассмотрели два негодных случая из четырех. При решении уравнения с тремя модулями нам бы пришлось исследовать уже восемь случаев, четыре из которых не имеют решения. Решая уравнение с двумя и более модулями *методом промежутков*, можно сократить число рассматриваемых случаев.

Суть *метода промежутков* состоит в следующем: находят значения неизвестной, при которых подмодульные выражения обращаются в ноль или теряют смысл. Эти точки делят ОДЗ уравнения на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. Затем, используя определение абсолютной величины, переходят от уравнения к совокупности систем, не содержащих знаков модуля.

***Пример* 2.2.** Решить уравнение $|3x-8|-|3x-2|=6$ методом промежутков.

Решение.

1. Найдем значение переменных x, при которых каждое из подмодульных выражений равно нулю: $x_1=\dfrac{2}{3}$, $x_2=\dfrac{8}{3}$.

2. Отметим эти точки на числовой прямой и выделим интервалы знакопостоянства выражений $3x$–8 и $3x-2$: $x\le\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}<x\le\dfrac{8}{3}$, $x>\dfrac{8}{3}$.

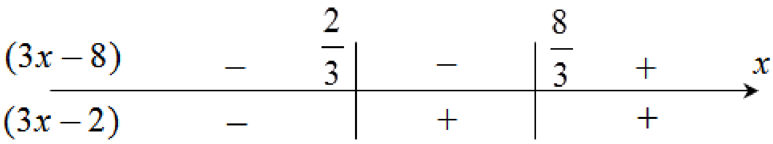


Рис. 2.1. Интервалы знакопостоянства

3. Определим, с каким знаком раскрывается каждый из модулей на каждом из интервалов (рис. 2.1), и запишем равносильную совокупность трех систем:

$$\begin{cases} x \le \dfrac{2}{3}, \\ -(3x-8)+(3x-2)=6; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3} < x \le \dfrac{8}{3}, \\ -(3x-8)-(3x-2)=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x > \dfrac{8}{3}, \\ (3x-8)-(3x-2)=6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le \dfrac{2}{3}, \\ 6=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{3} < x \le \dfrac{8}{3}, \\ x=\dfrac{2}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \dfrac{8}{3}, \\ -6=6. \end{cases}$$

Решением первой системы являются все числа из промежутка $\left(-\infty;\ \dfrac{2}{3}\right]$. Вторая и третья системы решений не имеют.

Заметим, что каждая точка числовой прямой (в том числе и каждая из нулевых точек подмодульных выражений) обязательно должна быть включена хотя бы в один из рассматриваемых промежутков, иначе возможна потеря корней. В рассматриваемой выше задаче можно было включить границы $\dfrac{2}{3}$ *и* $\dfrac{8}{3}$, *например, во второй промежуток, или в первый и третий промежутки, или во второй и третий промежутки.*

Также все уравнения с модулями могут быть решены следующим образом: раскрывают модули со знаками «плюс» и «минус», не выписывая соответствующие промежутки. Решая каждое из полученных уравнений, приходят к *следствиям* исходного уравнения. Останется только проверить, не являются ли найденные корни посторонними прямой их подстановкой в исходное уравнение.

***Пример* 2.3.** Решить уравнение $\left\| x^3+x+1 \right| - \sqrt{x} \Big| = x^3 - x - \sqrt{x} - 1.$

Решение. Последовательно переходя к *следствиям*, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \left|x^3+x+1\right| - \sqrt{x} = x^3 - x - \sqrt{x} - 1, \\ -\left(\left|x^3+x+1\right| - \sqrt{x}\right) = x^3 - x - \sqrt{x} - 1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+x+1\right| = x^3 - x - 1, \\ -\left|x^3+x+1\right| = x^3 - x - 2\sqrt{x} - 1, \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^3+x+1 = x^3-x-1, \\ -\left(x^3+x+1\right) = x^3-x-1, \\ -\left(x^3+x+1\right) = x^3-x-2\sqrt{x}-1, \\ x^3+x+1 = x^3-x-2\sqrt{x}-1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=0, \\ x^3=\sqrt{x}, \\ x+\sqrt{x}+1=0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=0, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Проверка показывает, что найденные числа не являются корнями исходного уравнения.

Ответ: корней нет.

Однако в некоторых случаях более рационально использовать свойства модуля, графики, геометрическую интерпретацию понятия абсолютной величины или заменить уравнение равносильной совокупностью систем.

2.2. Основные виды уравнений с модулем и стандартные схемы их решения

Рассмотрим основные **виды уравнений с модулем** и стандартные схемы их решения.

1. Уравнение вида

$$|f(x)| = b, \quad b \in R \tag{2.1}$$

при $b<0$ решений не имеет;

при $b=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;

при $b>0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=b, \\ f(x)=-b. \end{array}\right.$

Таким образом, $|f(x)| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=b, \\ f(x)=-b. \end{array}\right. \end{cases}$

2. Уравнение вида

$$|f(x)| = g(x), \tag{2.2}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции можно решить несколькими способами.

Первый способ. Если раскрывать модуль по определению, то уравнение (2.2) равносильно совокупности систем:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ \quad f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{2.2$'$}$$

При этом неравенства можно не решать, достаточно подставить в них полученные корни соответствующих уравнений.

Второй способ. Заметим, что уравнение (2.2) не имеет решения, если $g(x) < 0$. Если же $g(x) \ge 0$, то в случае $f(x) \ge 0$ уравнение имеет вид $f(x) = g(x)$; если $f(x) < 0$, уравнение имеет вид $f(x) = -g(x)$. Отсюда следует, что

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases} \tag{2.2$''$}$$

Если в уравнении (2.2) функция $f(x)$ имеет более простой вид, чем $g(x)$, то целесообразно уравнение (2.2) заменять совокупностью систем ($2.2'$), а если более простой вид имеет функция $g(x)$, то уравнение (2.2) целесообразно заменять совокупностью систем ($2.2''$).

Третий способ. При решении уравнения (2.2) можно поступить и следующим образом: решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \tag{2.2$'''$}$$

затем проверить справедливость неравенства $g(x) \geq 0$ для найденных значений неизвестных или осуществить проверку непосредственной подстановкой найденных значений в уравнение (2.2).

К уравнениям этого вида можно отнести и уравнения $|f(x)| = \pm f(x)$. Уравнение $|f(x)| = -f(x)$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = -f(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = f(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Первая система этой совокупности равносильна уравнению $f(x) = 0,$ а вторая система – неравенству $f(x) < 0;$ поэтому совокупность этих систем равносильна неравенству $f(x) \leq 0.$

Аналогично можно доказать, что

$$|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

3. Уравнение вида

$$f(|x|) = g(x), \tag{2.3}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

Для того чтобы решить уравнение (2.3), нужно найти сначала все решения уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащие множеству $x \geq 0$, затем решить уравнение $f(-x) = g(x)$ на множестве $x < 0$. Объединение множеств найденных решений составляет множество всех решений уравнения (2.3). Таким образом, уравнение (2.3) равносильно совокупности систем

$$f(|x|) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

4. Уравнение вида

$$h(|f(x)|) = g(x), \tag{2.4}$$

где $h,\ f,\ g$ – некоторые функции, равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} h(f(x)) = g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} h(-f(x)) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Заметим, что наиболее распространенной ошибкой является замена уравнения (2.4) совокупностью систем

$$\begin{cases} h(f(x)) = g(x), \\ x \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} h(-f(x)) = g(x), \\ x < 0. \end{cases}$$

которая, разумеется, ***неверна***.

5. Уравнение вида

$$|f(x)| = |g(x)| \,, \tag{2.5}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции. Так как обе части уравнения неотрицательны, то

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \tag{2.5'}$$

6. Уравнение вида

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| = g(x), \tag{2.6}$$

где $f_1(x), \ldots, f_n(x), g(x)$ – некоторые функции. В данном случае основной метод очень громоздкий. Целесообразнее решать *методом промежутков* (п.2.1).

Особого внимания заслуживает случай, когда $g(x)$ представляет собой алгебраическую сумму подмодульных выражений, тогда уравнение можно решить, пользуясь равносильным переходом (свойство 12). Например, если

$$g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \ge 0, \\ f_2(x) \ge 0, \\ \quad \ldots \\ f_n(x) \ge 0. \end{cases}$$

Так как этот способ решения чаще всего является более рациональным, то решение уравнений вида (2.6) *целесообразно начинать с ответа на вопрос:*

«*Можно ли выражение* $g(x)$ *представить в виде алгебраической суммы* $f_i(x)$?».

Заметим, что в случае $g(x)=0$ уравнение (2.6) имеет вид

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|=0. \qquad (2.6')$$

Тогда в силу неотрицательности левой части оно равносильно системе

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \quad \ldots \\ f_n(x)=0. \end{cases}$$

7. Решение уравнений вида

$$|x-a|=c, \qquad (2.7)$$

$$|x-a|+|x-b|=c, \qquad (2.8)$$

$$|x-a|-|x-b|=c \qquad (2.9)$$

(при заданных числах a, b, c) допускают простую геометрическую интерпретацию. Геометрически модуль разности представляет собой расстояние между точками. Например, геометрический смысл выражения $|x-a|$ – длина отрезка координатной оси, соединяющего точки с абсциссами x и a.

Очевидно, что уравнения (2.7) и (2.8) при $c<0$ решений не имеют.

Решить уравнение (2.7) – значит найти все точки на числовой оси Ox, которые отстоят от точки с координатой a на расстоянии c. Если $c = 0$, то это точка с координатой a. При $c>0$ таких точек две: точка с координатой $(c+a)$ и точка с координатой $(c-a)$.

Идею решения уравнения (2.8) рассмотрим на примере. Решить уравнение

$$|x-1|+|x-3|=6$$

– значит найти все такие точки на числовой оси Ox, для каждой из которых сумма расстояний от нее до точек с координатами 1 и 3 равна 6 (рис.

2.2). Ясно, что ни одна из точек отрезка [1; 3] не удовлетворяет этому условию, так как сумма указанных расстояний для любой из них равна 2 (то есть не равна 6).

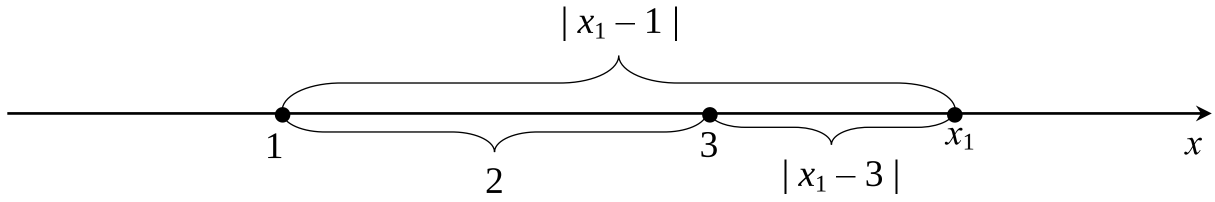


Рис. 2.2. Геометрический смысл уравнения типа 2.8

Вне этого отрезка существует только две искомые точки: точка с координатой 5 и точка с координатой (–1).

Аналогично интерпретируются решения уравнения вида (2.9). Так, например, для того чтобы решить уравнение

$$|x-1|-|x-3|=2,$$

нужно на числовой прямой *Ox* найти все точки, для каждой из которых разность расстояния от нее до точки с координатой 1 и расстояния от нее до точки с координатой 3 равна 2 (рис. 2.3).

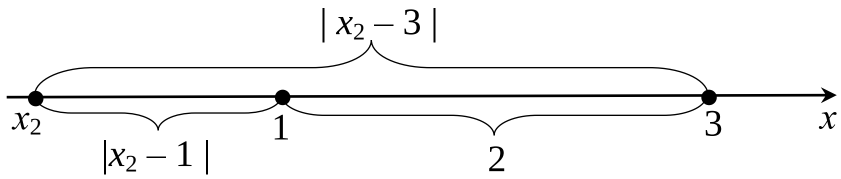


Рис. 2.3. Геометрический смысл уравнения типа 2.9

Так как длина отрезка $[1;3]$ равна 2, то любая точка с координатой $x \geq 3$ удовлетворяет, а любая точка с координатой $x < 3$ не удовлетворяет уравнению. Таким образом, решением исходного уравнения является множество всех чисел из промежутка $[3;+\infty)$.

Заметим, что уравнение (2.9) может иметь решение и при $c < 0$. Для использования геометрической интерпретации достаточно умножить правую и левую части уравнения на -1 (рис. 2.4).

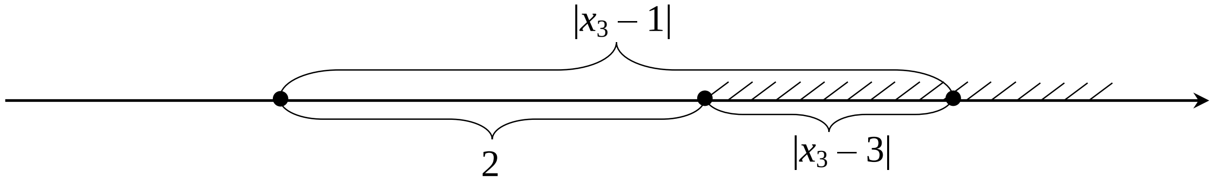


Рис. 2.4. Геометрический смысл уравнения типа 2.9 при $c < 0$

2.3. Примеры решения уравнений

Рассмотрим примеры решения уравнений с модулем

***Пример* 2.4.** Решить уравнение $|2x-3|=5.$

Решение. *Первый способ.* Перейдем к равносильной совокупности

$$|2x-3|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=5, \\ 2x-3=-5, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Второй способ. Так как обе части уравнения неотрицательны, то возведем в квадрат и с учетом равенства $|f(x)|^2=(f(x))^2$ получим равносильное уравнение

$$(2x-3)^2=25,$$

которое имеет корни $x_1=-1,\ x_2=4.$

Третий способ. Раскроем модуль по определению

$$|2x-3|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3\geq 0, \\ 2x-3=5; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3<0, \\ 2x-3=-5; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq \dfrac{3}{2}, \\ x=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x<\dfrac{3}{2}, \\ x=-1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Ответ: -1; 4.

***Пример* 2.5.** Решить уравнение $x^2-8|x|+15=0.$

Решение. *Первый способ.* Исходное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 8x + 15 = 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 - 8x + 15 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 5,\ x_2 = 3$ каждый из которых неотрицателен; поэтому числа 3 и 5 являются решением первой системы совокупности. Уравнение $x^2 + 8x + 15 = 0$ имеет корни $x_3 = -5,\ x_4 = -3$, которые являются решениями второй системы совокупности, так как $x_3 < 0$ и $x_4 < 0$. Следовательно, множество всех корней данного уравнения состоит из четырех чисел: $-3, 3, -5, 5.$

Второй способ. Данное уравнение можно решить, используя метод замены неизвестного. Положим $t = |x|$, тогда уравнение можно записать следующим образом: $t^2 - 8t + 15 = 0$ (поскольку $x^2 = |x|^2$ по свойству 3). Корнями этого уравнения являются два положительных числа 5 и 3, поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} |x| = 5, \\ |x| = 3, \end{array}\right.$$

решая которую, получим корни исходного уравнения.

Ответ: –3, 3, –5, 5.

Пример **2.6.** Решите уравнение $\left|x^2 + x - 1\right| = 2x - 1.$

Решение. Уравнение имеет вид $|f(x)| = g(x),$ где более простой является функция $g(x)$, следовательно, уравнение целесообразно заменить совокупностью систем $(2'')$:

$$\begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=2x-1, \\ x^2+x-1=-2x+1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-x=0, \\ x^2+3x-2=0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}, \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: 1, $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

***Пример* 2.7.** Решить уравнение $\left|\dfrac{x^2-6\sqrt{x}+7}{x^2+6\sqrt{x}+7}\right|=1.$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-6\sqrt{x}+7}{x^2+6\sqrt{x}+7}=1, \\ \dfrac{x^2-6\sqrt{x}+7}{x^2+6\sqrt{x}+7}=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-12\sqrt{x}}{x^2+6\sqrt{x}+7}=0, \\ \dfrac{2x^2+14}{x^2+6\sqrt{x}+7}=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Итак, единственным корнем исходного уравнения является число 0.

Ответ: 0.

***Пример* 2.8.** Решить уравнение $|x|=x^2+x-2$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x=x^2+x-2, \\ x\ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x=x^2+x-2, \\ x<0. \end{cases}$$

Уравнение $x=x^2+x-2$ имеет корни $x_1=-\sqrt{2}$ и $x_2=\sqrt{2}$, из которых решением первой системы является только число $\sqrt{2}$.

Уравнение $-x=x^2+x-2$ имеет два корня $x_3=-1-\sqrt{3}$ и $x_4=-1+\sqrt{3}.$ Так как $-1-\sqrt{3}<0$ и $-1+\sqrt{3}>0,$ то решением второй системы совокупности является число $(-1-\sqrt{3})$.

Таким образом, данное уравнение имеет два корня: $\sqrt{2},\ -1-\sqrt{3}.$

Ответ: $\sqrt{2},\ -1-\sqrt{3}.$

***Пример* 2.9.** Решите уравнение $\left|x^2-4\right|+\left|x^2-x-2\right|=0.$

Решение.

$$\left|x^2-4\right|+\left|x^2-x-2\right|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0, \\ x^2+x-2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: $x = 2$.

***Пример* 2.10.** Решить уравнение

$$\left|\frac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}\right|=-\frac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}$$

Решение. Данное уравнение имеет вид $\left|f(x)\right|=-f(x),$ где

$$f(x)=\frac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно неравенству

$$\frac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}\le 0,$$

то есть неравенству

$$\frac{(x-3)(x-7)}{(x-4)(x-8)}\le 0.$$

Решая его, например, методом интервалов (рис. 2.5), находим решение исходного уравнения – объединение промежутков [3; 4) и [7; 8).

Ответ: $x\in[3;\,4)\cup[7;\,8).$

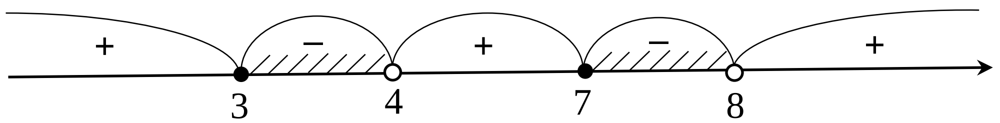


Рис. 2.5. Решение неравенства примера 2.10

***Пример* 2.11.** Решить уравнение $\dfrac{1-2x}{3-|x-1|}=1.$

Решение. *ОДЗ* найдем из условия $3-|x-1|\neq 0,\ x\neq 4,\ x\neq -2.$ Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ \dfrac{1-2x}{3-(x-1)}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1<0, \\ \dfrac{1-2x}{3+(x-1)}=1. \end{cases}$$

Решая уравнение

$$\frac{1-2x}{4-x}=1,$$

находим $x_1=-3$ – его единственный корень. Но он не удовлетворяет условию $x-1\geq 0,$ поэтому первая система совокупности решений не имеет.

Решая уравнение

$$\frac{1-2x}{2+x}=1,$$

находим его корень $x_2=-\dfrac{1}{3},$ который удовлетворяет условию $x-1<0$ и поэтому является единственным решением второй системы совокупности.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}.$

***Пример* 2.12.** Решить уравнение $|x^3+x^2+4x-5|=|x^3-x^2+2x-3|.$

Решение. Воспользуемся условием равносильности $(2.5')$

$$|x^3+x^2+4x-5|=|x^3-x^2+2x-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+x^2+4x-5=x^3-x^2+2x-3, \\ x^3+x^2+4x-5=-x^3+x^2-2x+3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=0, \\ x^3+3x-4=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, \\ x=1. \end{array}\right.$$

***Пример* 2.13.** Решить уравнение $|3x-8|-|3x-2|=6$.

Решение. Преобразуем уравнение

$$3\cdot\left|x-\frac{8}{3}\right|-3\cdot\left|x-\frac{2}{3}\right|=6,$$

$$\left|x-\frac{8}{3}\right|-\left|x-\frac{2}{3}\right|=2$$

и используем геометрическую интерпретацию модуля. Нужно на числовой прямой Ox найти все точки, для каждой из которых разность расстояния от нее до точки с координатой $\frac{8}{3}$ и расстояния от нее до точки с координатой $\frac{2}{3}$ равна 2. Так как длина отрезка $\left[\frac{2}{3};\ \frac{8}{3}\right]$ равна 2, то любая точка с координатой $x\le\frac{2}{3}$ удовлетворяет, а любая точка с координатой $x>\frac{2}{3}$ не удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]$.

***Пример* 2.14.** Решить уравнение $|x|+|7-x|+2|x-2|=4.$

Решение. *Первый способ.* Находим интервалы знакопостоянства выражений x, $7-x$ и $x-2$: $x\le 0$; $0<x\le 2$; $2<x\le 7$; $x>7$ (рис. 2.6).

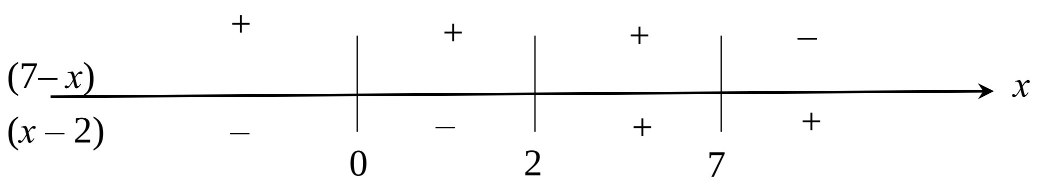


Рис. 2.6. Интервалы знакопостоянства для примера 2.14

Таким образом,

$$|x|+|7-x|+2|x-2|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0, \\ -x+(7-x)-2(x-2)=4; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x \le 2, \\ x+(7-x)-2(x-2)=4; \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x \le 7, \\ x+(7-x)+2(x-2)=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 7, \\ x-(7-x)+2(x-2)=4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0, \\ x=\dfrac{7}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x \le 2, \\ x=\dfrac{7}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x \le 7, \\ x=\dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 7, \\ x=\dfrac{15}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ни одна из систем совокупности не является совместной, следовательно, совокупность, а значит, и исходное уравнение решений не имеют.

Ответ: корней нет.

***Пример* 2.15.** Решить уравнение $\left|x^2-4\right|-\left|9-x^2\right|=5$.

Решение. Решим *методом промежутков*:

1. Найдем значения переменной x, при которых подмодульные выражения равны нулю: $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_4=3$.
2. Отметим эти точки на числовой прямой и определим, с каким знаком раскрывается каждый из модулей на получившихся интервалах (рис. 2.7).

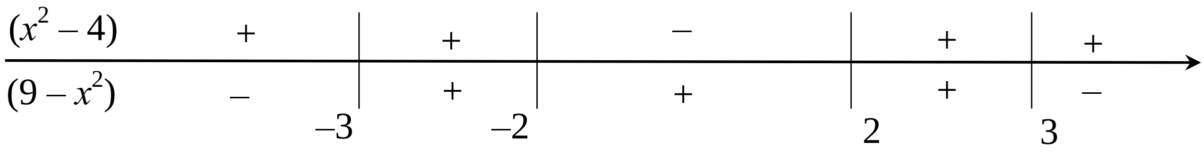


Рис. 2.7. Интервалы знакопостоянства для примера 2.15

3. Заметим, что есть области, в которых модули раскрываются одинаково, что позволит сократить количество рассматриваемых случаев. Запишем равносильную совокупность трех систем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ x \ge 3, \end{array}\right. \\ (x^2-4)+(9-x^2)=5; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -3 < x < -2, \\ 2 < x < 3; \end{array}\right. \\ (x^2-4)-(9-x^2)=5; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ -(x^2-4)-(9-x^2)=5. \end{cases}$$

Решением первой системы являются все числа из промежутков $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$. Вторая и третья системы решений не имеют.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

***Пример* 2.16.** Решить уравнение

$$|x-2|+|x-1|=x-3.$$

Решение. Так как сумма модулей – величина неотрицательная, то и правая часть уравнения должна быть неотрицательной: $x-3 \ge 0$, откуда $x \ge 3$. На этом промежутке и $x-2>0$, и $x-1>0$, следовательно,

$$|x-2|+|x-1|=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x-2+x-1=x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x=0. \end{cases}$$

Система, а следовательно, и уравнение решений не имеют.

Ответ: корней нет.

***Пример* 2.17.** Решить уравнение

$$\big|x-|4-x|\big|-2x=4.$$

Решение. Освобождаясь от внутреннего модуля, получим равносильную совокупность двух систем:

$$\begin{cases} 4-x \ge 0, \\ |x-(4-x)|-2x=4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4-x < 0, \\ |x+(4-x)|-2x=4, \end{cases}$$

то есть совокупность систем

$$\begin{cases} x \le 4, \\ |2x-4|-2x=4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 4, \\ -2x=0. \end{cases}$$

Вторая система совокупности решений не имеет, а первая равносильна совокупности двух следующих систем:

$$\begin{cases} x \le 4, \\ 2x - 4 \ge 0, \\ (2x-4) - 2x = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 4, \\ 2x - 4 < 0, \\ -(2x-4) - 2x = 4, \end{cases}$$

то есть совокупности

$$\begin{cases} x \le 4, \\ x \ge 2, \\ -4 = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 4, \\ x < 2, \\ -4x = 0. \end{cases}$$

Единственным решением этой совокупности, а следовательно, и исходного уравнения является число 0.

Ответ: $x = 0.$

***Пример* 2.18.** Найти корни уравнения $\left|\left|\left|x+7\right|+8\right|-5\right|+3\right| = 13.$

Решение. Введем новую переменную: $|x+7| = y$, причем $y \ge 0$ (по определению модуля), тогда уравнение примет вид $\left|\left|\left|y+8\right|-5\right|+3\right| = 13.$

Далее введем переменную $|y+8| = z,\ z \ge 0,$ получим уравнение $\left|\left|z-5\right|+3\right| = 13.$

Вновь введем переменную $|z-5| = t,\ t \ge 0,$ получим уравнение $|t+3| = 13.$

Решая полученное уравнение, получаем два значения t: $\left[\begin{array}{l} t = 10, \\ t = -16, \end{array}\right.$ второе из которых не удовлетворяет условию $t \ge 0.$

Проводим последовательно обратные замены: $|z-5| = 10 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 15, \\ z = -5. \end{array}\right.$

Второй из корней не удовлетворяет условию $z \ge 0.$

Далее имеем уравнение $|y+8| = 15,$ решая которое, получаем

$$\left[\begin{array}{l} y = 7, \\ y = -23. \end{array}\right.$$

Условию $y \ge 0$ удовлетворяет только первый из корней.

Возвращаясь к первоначальной переменной, получаем уравнение $|x+7|=7$, которое имеет два корня $x_1 = 0$, $x_2 = -14$.

Однако внимательный взгляд на подмодульные выражения позволяет упростить решение уравнения. Заметим, что второй внутренний и внешний модули можно «снять» в силу положительности подмодульных выражений, тогда

$$\left|\left|\left|x+7\right|+8\right|-5\right|+3\right|=13 \Leftrightarrow \left|\left|x+7\right|+8-5\right|+3=13 \Leftrightarrow \left|\left|x+7\right|+3\right|=10.$$

Полученное подмодульное выражение также положительно, следовательно,

$$\left|\left|x+7\right|+3\right|=10 \Leftrightarrow \left|x+7\right|+3=10 \Leftrightarrow \left|x+7\right|=7.$$

Заметим, что третий внутренний модуль можно было снять, заметив, что при любых значениях x справедливо $|x+7|+8\geq 8$, следовательно, $\left|\left|x+7\right|+8\right|-5>0$, и

$$\left|\left|\left|x+7\right|+8\right|-5\right|+3\right|=13 \Leftrightarrow \left|x+7\right|+8-5+3=13,$$

что также приводит к уравнению $|x+7|=7$.

Ответ: 0, –14.

***Пример* 2.19.** Решить уравнение

$$\left|2x^2+4x-6\right|-\left|x^2-5x\right|=-x^2-9x+6.$$

Решение. Заметим, что правая часть уравнения является алгебраической суммой подмодульных выражений левой части, то есть уравнение имеет вид $|a|-|b|=b-a$, следовательно, равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} a=b, \\ \begin{cases} a\leq 0, \\ b\leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

В рассматриваемом примере $\left[\begin{array}{l} 2x^2+4x-6=x^2-5x, \\ \begin{cases} 2x^2+4x-6\le 0, \\ x^2-5x\le 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}, \\ \begin{cases} -3\le x\le 1, \\ 0\le x\le 5; \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}, \\ 0\le x\le 1. \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{\dfrac{-9-\sqrt{105}}{2}\right\}\cup[0;1]$.

Пример **2.20.** Решить уравнение

$$2\cdot|x-4|+|3-x|-|1+2x|+5\cdot|x-2|=0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$|2x-8|+|3-x|+|5x-10|=|1+2x|$$

и попытаемся установить, можно ли выражение $1+2x$ представить в виде алгебраической суммы подмодульных выражений (в данном примере это проще сделать по константам –(–8) + 3 + (–10) = 1). Так как

$$-(2x-8)+(3-x)+(5x-10)=1+2x,$$

то есть уравнение имеет вид $|a|+|b|+|c|=|-a+b+c|$, следовательно, в силу свойства 13:

$$|2x-8|+|3-x|+|5x-10|=|1+2x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-8\le 0, \\ 3-x\ge 0, \\ 5x-10\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-8\ge 0, \\ 3-x\le 0, \\ 5x-10\le 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 4, \\ x\le 3, \\ x\ge 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4, \\ x\ge 3, \\ x\le 2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

Ответ: $x\in[2;\,3]$.

Пример **2.21.** Решить уравнение

$$\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x|=\frac{x^2}{|x-1|}.$$

Решение. ОДЗ: $x\ne 1$.

Первый способ. По свойству 6 запишем $\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{|x|}{|x-1|}$, тогда уравнение примет вид $\frac{|x|}{|x-1|} + |x| = \frac{x^2}{|x-1|}$, которое можно решить методом промежутков.

Находим интервалы знакопостоянства выражений x и $(x-1)$: $x<0$, $0 \le x < 1$, $x \ge 1$ (рис. 2.8).

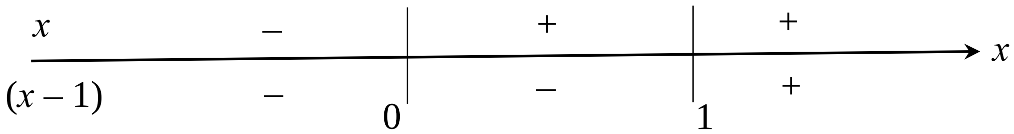


Рис. 2.8. Интервалы знакопостоянства для примера 2.21

Таким образом,

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| + |x| = \frac{x^2}{|x-1|} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x-1|} + |x| = \frac{x^2}{|x-1|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ \dfrac{-x}{1-x} - x = \dfrac{x^2}{1-x}, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ \dfrac{x}{1-x} + x = \dfrac{x^2}{1-x}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ \dfrac{x}{x-1} + x = \dfrac{x^2}{x-1}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ x=0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x=x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x>1. \end{array}\right.$$

Второй способ. Поскольку

$$\frac{x}{x-1} + x = \frac{x + x(x-1)}{x-1} = \frac{x + x^2 - x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1},$$

$$\frac{x^2}{|x-1|} = \frac{|x^2|}{|x-1|} = \left|\frac{x^2}{x-1}\right| = \left|\frac{x}{x-1} + x\right|,$$

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| + |x| = \left|\frac{x}{x-1} + x\right|,$$

то, используя свойство 13 $|a| + |b| = |a+b| \Leftrightarrow ab \ge 0$, получаем равносильное неравенство

$$\frac{x}{x-1}\cdot x \geq 0,$$

$$\frac{x^2}{x-1} \geq 0.$$

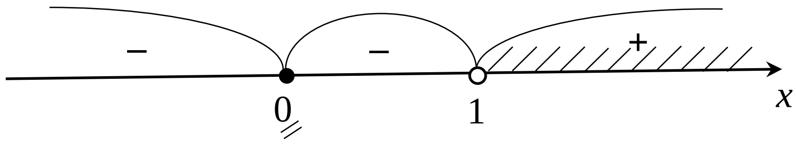


Рис. 2.9. Решение неравенства

Решениями этого неравенства, а значит, и исходного уравнения являются число 0 и все числа из промежутка $(1;+\infty)$ (рис. 2.9).

Ответ: $x \in \{0\} \cup (1;+\infty)$.

***Пример* 2.22.** Решить уравнение

$$|x-1|+|x-3| = 2-(x-2)^2.$$

Решение. Обозначим $a = x - 1$, $b = x - 3$, тогда число 2 можно представить в виде разности a и b, и уравнение примет вид

$$|a|+|b| = a-b-(x-2)^2.$$

В последней скобке можно не делать замену, так как это не принципиально для дальнейшего решения. Перенесем все слагаемые в левую часть и сгруппируем:

$$(|a|-a)+(|b|+b)+(x-2)^2 = 0.$$

Каждое слагаемое в этом равенстве является неотрицательным выражением при любом значении переменной x, следовательно, их сумма равна нулю только при одновременном равенству нулю каждого из слагаемых, а это выполнимо только при $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/display?v=p0geayxet20

2.4. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решить уравнение:

1.1.

а) $|3x-2|=4$; **б)** $2\cdot|x+3|=6$.

1.2.

а) $|x^2-3|=-2$; **б)** $|x^2-5x+1|=5$.

1.3.

а) $|x|-2x^3=0$; **б)** $x^2-5|x|+6=0$;

в) $x^2+2\cdot|x|-15=0$; **г)** $2x^2-3\cdot|x|-1=0$.

1.4.

а) $x^2-4|x-3|-2x-7=0$; **б)** $\dfrac{7x+4}{5}-x=\dfrac{|3x-5|}{2}$.

1.5.

а) $|x-2|+|2x-3|=5$; **б)** $|2x+1|-|3-x|=|x-4;|$

в) $|x+1|+|x+2|=2$; **г)** $|3-x|-|x+2|=5$;

д) $|x+3|+|x-5|=3$; **е)** $|x-2|-|x+1|=5$;

ж) $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$; **з)** $|x|-|x^2-1|=|x^2+x-1|$.

1.6.

а) $|5x+3|+|2-x|=4x+5$; **б)** $|x^2+3x-4|=7x+1$;

в) $|x|+|x-2|+|2x-1|=4x-3$.

1.7.

а) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; **б)** $\dfrac{|x^2-x|+1}{|x+1|-x^2}=1$; **в)** $\dfrac{|x^2+4\sqrt{x}-1|}{|x^2-4\sqrt{x}-1|}=1$.

1.8.

а) $|x-7|=|x+9|$; **б)** $|x^3+x^2+4x-5|=|x^3-x^2+2x-3|$;

в) $|x+3|=|2x-1|$; **г)** $|x-x^2-1|=|2x-3-x^2|$.

1.9.

а) $|6-2x|=3x+1$; **б)** $|x^2-2x-1|=2x+2$;

в) $|x^2-x-2|=x^2-x-2$; **г)** $|x^2-9|=9-x^2$;

д) $|x|=3x^2-3x-4$.

1.10.

а) $||3-2x|-1|=2|x|$; **б)** $|-2x-|3x+4|+5|=1-5x$;

в) $||x+4|-2x|=3x-1$; **г)** $|||x|-1|-1|=1$.

1.11.

а) $(x+1)^2-2|x+1|+1=0$; **б)** $|x^2-9|+|x^2-3x-10|=0$;

в) $|x^2-1|+|2x^2+x-1|=0$; **г)** $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+4|=0$.

1.12.* $\sqrt{x^2-4x+4}=|2x-3|$.

1.13.* $\left|\dfrac{x^2+5x-24}{x^2-x-2}\right|=-3\cdot\dfrac{x^2+5x-24}{x^2-x-2}$.

1.14.* $|x|^3+|x-1|^3=9$.

1.15.* $|x-2|\cdot|x+3|=6$.

1.16.** При каких значениях m уравнение $|x^2+1{,}5x+1|=m$ имеет единственное решение?

1.18. $2\cdot|x-4|+|3-x|-|1+2x|+5\cdot|x-2|=0$.

1.19. $|x^2-1|+|x^2-5x+6|-5x+7=0$.

3. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

3.1. Методы решения неравенств с модулем

При решении неравенств, содержащих знак модуля, используются те же методы и приемы, что и при решении соответствующих уравнений: раскрытие модулей по определению, возведение обеих частей неравенства в квадрат, метод промежутков, метод замены равносильной совокупностью или системой, использование геометрической интерпретации модуля, графический метод, замена переменной, использование свойств абсолютной величины; а также метод интервалов, умножение обеих частей неравенства на положительную величину, применение свойств функций, метод знакотождественных множителей.

Решение значительной части неравенств с модулем основано на равносильных переходах

$$|a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b, \\ a > -b; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$|a| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > b, \\ a < -b. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Переходы (3.1), (3.2) можно доказать, воспользовавшись, например, геометрическим смыслом модуля. Предположим сначала, что $b > 0$. Решить неравенство $|a| < b$ – значит найти все точки числовой прямой, расстояние от каждой из которых до точки 0 меньше b. Отложив на числовой оси в обе стороны от точки 0 отрезки, равные b, получим точки $-b$ и b, расстояние от каждой из которых до точки 0 равно b (рис. 3.1).

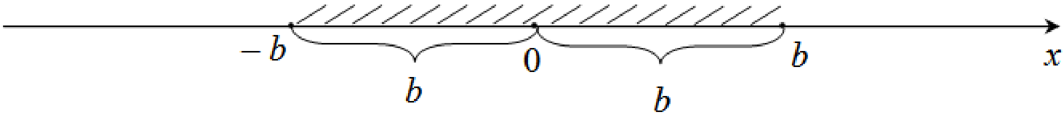


Рис. 3.1. Геометрический смысл неравенства $|a| < b$

Ясно, что все точки a, расстояние от каждой из которых до точки 0 меньше b, принадлежат интервалу $(-b;\ b)$, то есть для них имеет место система неравенств $\begin{cases} a < b, \\ a > -b. \end{cases}$ Остается заметить, что в случае, когда $b \le 0$, ни эта система, ни неравенство $|a| < b$ не имеют решений. Таким образом, при любом значении b неравенство $|a| < b$ и система неравенств $\begin{cases} a < b, \\ a > -b \end{cases}$ имеют одно и то же множество решений, то есть являются равносильными.

Равносильность (3.2) доказывается аналогично: при $b > 0$ искомые точки a, то есть точки, расстояние от каждой из которых до точки 0 больше b, принадлежат лучу $(-\infty;\ b)$ или лучу $(b;\ +\infty)$ (рис. 3.2).

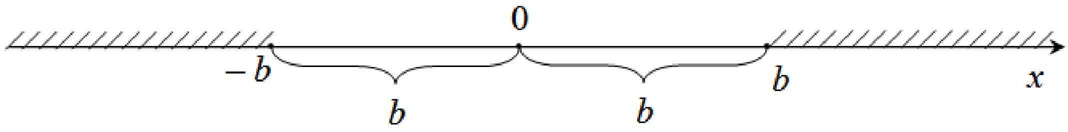


Рис. 3.2. Геометрический смысл неравенства $|a| > b$

Таким образом, для этих точек имеет место совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} a > b, \\ a < -b. \end{array}\right.$ Если же $b \le 0$, то и этой совокупности, и неравенству $|a| > b$ удовлетворяют все точки a числовой оси. Тем самым, при любом значении b неравенство $|a| > b$ и совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} a > b, \\ a < -b. \end{array}\right.$ имеют одно и то же множество решений, а значит, являются равносильными.

Равносильные переходы (3.1), (3.2) сохраняют свой вид при замене строгого равенства на нестрогое.

Рассмотрим основные **виды неравенств с модулем** и приведем некоторые стандартные схемы для их решения, которые опираются на определение модуля, его геометрический смысл и свойства.

1. К простейшим неравенствам относятся неравенства вида $|x| \vee a$, где символом $\vee$ обозначен один из знаков неравенств: $\leq,\ \geq,\ <,\ >$.

$$|x| < a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ -a < x < a, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 0, \\ x \in \varnothing. \end{cases} \end{array}\right. \qquad |x| \leq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0, \\ -a \leq x \leq a, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ x \in \varnothing. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > a, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ x \in R. \end{cases} \end{array}\right. \qquad |x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -a, \\ x \geq a, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ x \in R. \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Неравенства вида

$$f(|x|) \vee g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, равносильны совокупности двух систем

$$\begin{cases} f(x) \vee g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(-x) \vee g(x), \\ x < 0. \end{cases}$$

3. Неравенства вида

$$|f(x)| \vee |g(x)|, \tag{3.3}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, целесообразно решать, перейдя к одному из равносильных неравенств:

$$f^2(x) \vee g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \vee 0 \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \vee 0.$$

4. Неравенства вида

$$|f(x)| \leq g(x), \tag{3.4}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, имеют несколько способов решения.

Первый способ. Раскрывая модуль по определению, получим равносильную совокупность двух систем

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \le g(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3.4')$$

Второй способ. Неравенство (3.4) имеет решение только при $g(x) \ge 0$, поэтому

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) \le g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (3.4'')$$

Третий способ. Неравенство (3.4) можно решить, заметив, что при $g(x) \ge 0$ оно равносильно двойному неравенству $-g(x) \le f(x) \le g(x)$. То же самое можно записать так:

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases} \qquad (3.4''')$$

Заметим, что если $g(x) < 0,$ то система $(3.4''')$, как и неравенство (3.4) решений не имеет, так как выражение $f(x)$ не может быть одновременно меньше неположительной величины $g(x)$ и больше неотрицательной величины $-g(x)$.

Покажем равносильность $(3.4')$ и $(3.4''')$:

$$(3.4') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) \ge -g(x); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le f(x) \le g(x), \\ -g(x) \le f(x) \le 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}$$

Переходы сохраняют свой вид при замене нестрогого неравенства на строгое.

Интересен случай, когда $g(x) \equiv f(x)$. Тогда, если неравенство нестрогое, то

$$|f(x)| \le f(x) \Leftrightarrow f(x) \ge 0,$$

а если строгое $|f(x)| < f(x)$, то неравенство решений не имеет.

5. Неравенства вида

$$|f(x)| \ge g(x), \tag{3.5}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, можно решать, как исходя из определения модуля

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \ge g(x), \end{cases} \end{array}\right. \tag{3.5'}$$

так и переходя к совокупности неравенств

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array}\right. \tag{3.5''}$$

Обоснование равносильности $(3.5')$ и $(3.5'')$ разобьем на два этапа:

1) при $g(x) \ge 0$ имеем

$$(3.5') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) \le -g(x); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array}\right.$$

2) при $g(x) < 0$ неравенство (3.5) выполнено при всех допустимых значениях x; но и решением совокупности $(3.5'')$ служат все те же допустимые x, поскольку одно из неравенств совокупности заведомо выполнено (при $f(x) \ge 0$ выполнено $f(x) \ge g(x)$, а при $f(x) < 0$ выполнено $f(x) \le -g(x)$). Следовательно, и при $g(x) < 0$ имеет место эквивалентность $(3.5') \Leftrightarrow (3.5'')$.

Переходы сохраняют свой вид при замене нестрогого неравенства на строгое.

Если $g(x) \equiv f(x)$, то в случае нестрогого неравенства $|f(x)| \ge f(x)$ решением являются все x из ОДЗ, а в случае строгого – $|f(x)| > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

6. Неравенства вида

$$\left| f(|x|) \right| \le g(x) \tag{3.6}$$

можно решить двумя способами: раскрывая вначале внутренний модуль, и тогда оно равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} |f(x)| \le g(x), \\ x \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} |f(-x)| \le g(x), \\ x < 0, \end{cases} \tag{3.6$'$}$$

или, начав решение с раскрытия внешнего модуля, получить равносильную систему неравенств

$$\begin{cases} f(|x|) \le g(x), \\ f(|x|) \ge -g(x). \end{cases} \tag{3.6$''$}$$

Выбор способа решения зависит от конкретного неравенства и от сложности функций $f(x)$ и $g(x)$.

7. Неравенства вида

$$\left| f(|x|) \right| \ge g(x) \tag{3.7}$$

также можно решить двумя способами; оно равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(|x|) \ge g(x), \\ f(|x|) \le -g(x), \end{array} \right. \tag{3.7$'$}$$

а также равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} |f(x)| \ge g(x), \\ x \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} |f(-x)| \ge g(x), \\ x < 0. \end{cases} \tag{3.7$''$}$$

В случае строгих неравенств (3.6) и (3.7) *нужно в соответствующей системе или совокупности заменить неравенства на строгие.*

8. Неравенства вида

$$|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \ldots \pm |f_n(x)| \vee g(x), \tag{3.8}$$

где $f_1(x), \ldots, f_n(x), g(x) -$ некоторые функции, решают при помощи разбиения области его допустимых значений на промежутки, каждый из которых является промежутком знакопостоянства как функции $f(x)$, так и функции $g(x)$. Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака абсолютной величины. Объединяя найденные решения на всех частях ОДЗ исходного неравенства, получаем множество всех его частей. Этот универсальный прием называется *методом промежутков*.

9. При решении неравенств вида

$$|x-a| \vee c, \tag{3.9}$$

$$|x-a|+|x-b| \vee c, \tag{3.10}$$

$$|x-a|-|x-b| \vee c \tag{3.11}$$

рационально использовать геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим решение неравенства (3.10). Решить неравенство $|x-a|+|x-b| \vee c$ – значит найти все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек a и b больше (больше или равна) или меньше (меньше или равна) c. Для определенности будем считать, что $a < b$.

Если расстояние между точками a и b больше c, то множеством решений неравенств $|x-a|+|x-b|>c$ и $|x-a|+|x-b| \geq c$ является все множество действительных чисел, а неравенства $|x-a|+|x-b|<c$ и $|x-a|+|x-b| \leq c$ решений не имеют. В самом деле, если предположить, что искомая точка принадлежит отрезку $[a; b]$, то сумма расстояний от такой точки до концов отрезка окажется больше c (поскольку эта сумма равна длине отрезка, а длина отрезка больше c). Ясно, что для любой точки, лежащей вне рассматриваемого отрезка, сумма расстояний от нее до концов отрезка будет еще больше.

Если расстояние между точками a и b равно c, то множеством решений неравенства $|x-a|+|x-b| \leq c$ будет отрезок $[a; b]$, неравенство $|x-a|+|x-b|<c$ решений не имеет, неравенство $|x-a|+|x-b| \geq c$ выполняется при любом значении переменной, а множеством решений неравенства $|x-a|+|x-b|>c$ является вся числовая прямая за исключением чисел отрезка $[a; b]$, то есть множество $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$.

Если же расстояние между точками a и b меньше c, то для решения любого из рассматриваемых неравенств нужно вначале найти все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек a и b равна c. Ясно, что каждая из искомых точек лежит вне отрезка $[a;\ b]$, а сумма расстояний от нее до точек a и b будет равна сумме длины отрезка $[a;\ b]$ (то есть $b - a$) и удвоенного расстояния от этой точки до ближайшего к ней конца отрезка. Это удвоенное расстояние, очевидно, равно $c - (b - a) = c - b + a$, а искомых точек всего две: первая (обозначим ее x_1) лежит на числовой оси левее точки a на расстоянии $\dfrac{c-b+a}{2}$ от нее, а вторая (обозначим ее x_2) – правее точки b на том же расстоянии от неё. Поэтому $x_1 = a - \dfrac{c-b+a}{2} = \dfrac{a+b-c}{2}$, $x_2 = b + \dfrac{c-b+a}{2} = \dfrac{a+b+c}{2}$:

На чертеже (рис. 3.3) видно, что множеством решений неравенства $|x-a|+|x-b|<c$ будет интервал $(x_1;\ x_2)$, множеством решений неравенства $|x-a|+|x-b|\le c$ будет отрезок $[x_1;\ x_2]$, а множества решений неравенств $|x-a|+|x-b|>c$ и $|x-a|+|x-b|\ge c$ будут соответственно иметь вид $(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$ и $(-\infty; x_1]\cup[x_2; +\infty)$.

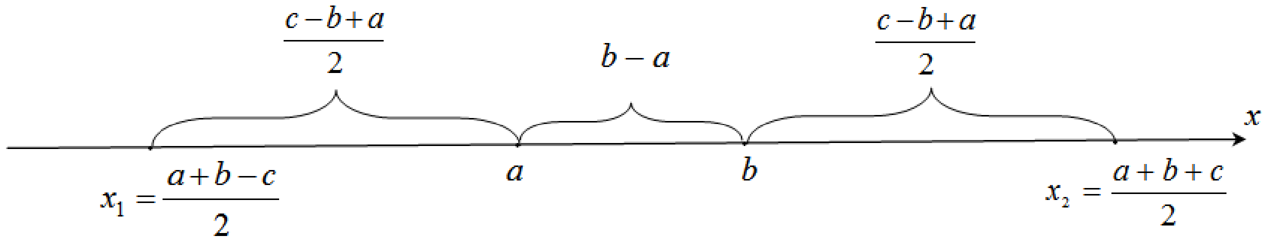


Рис. 3.3. Множество решений неравенств $|x-a|+|x-b|\vee c$

Если метод освоен, решение подобных неравенств осуществляется достаточно быстро. Для этого нужно изобразить числовую ось и отметить на ней «ключевые» точки a и b и расстояние между ними, после чего, найдя точки x_1 и x_2, выписать ответ. Рассуждения, аналогичные приведенным, используются и для решения неравенств вида (3.11).

3.2. Примеры решения неравенств с модулем

***Пример* 3.1.** Доказать, что сумма модулей двух чисел больше или равна модуля суммы (разности) этих чисел:

$$|a|+|b| \geq |a \pm b|.$$

Это свойство часто называют неравенством треугольника.

Доказательство. Если числа a и b либо оба отрицательны, либо оба положительны, либо хотя бы одно из них равно нулю (эти условия определяются неравенством $ab \geq 0$), то $|a+b|=|a|+|b|$. Если числа a и b разных знаков (то есть $ab<0$), то $|a|+|b|>|a+b|$. Обратно, пусть $|a|+|b| \geq |a+b|$. Так как обе части неотрицательны, то неравенство равносильно

$$\left(|a|+|b|\right)^2 \geq |a+b|^2 \Leftrightarrow a^2+2|ab|+b^2 \geq a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow |ab| \geq ab \Leftrightarrow ab \geq 0.$$

Таким образом,

$$|a|+|b| \geq |a+b|,$$

причем $\quad |a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow ab \geq 0; \qquad |a|+|b|>|a+b| \Leftrightarrow ab<0.$

Заменив b на $-b$ и учитывая, что $|-b|=|b|$ (свойство 2), получим другой вид неравенства треугольника:

$$|a|+|b| \geq |a-b|,$$

причем

$$|a|+|b|=|a-b| \Leftrightarrow ab \leq 0; \qquad |a|+|b|>|a-b| \Leftrightarrow ab>0.$$

***Пример* 3.2.** Решить неравенство

$$x^2-2|x|<3. \tag{3.12}$$

Решение. Раскрывая модуль по определению, получим равносильную совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x^2-2x-3<0, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2x-3<0, \\ x<0. \end{cases}$$

Поскольку $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$, то множеством всех решений неравенства $x^2-2x-3<0$ является интервал $-1<x<3$; следовательно, решением первой системы совокупности является промежуток $0 \le x < 3$.

Из равенства $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ следует, что неравенство $x^2+2x-3<0$ выполняется только при $-3<x<1$. Отсюда заключаем, что решением второй системы совокупности является интервал $-3<x<0$.

Объединяя полученные множества решений двух систем, получаем множество решений неравенства (3.12) – интервал $-3<x<3$.

Неравенство (3.12) можно решать при помощи замены переменной $t=|x|$: сначала найти решение системы

$$\begin{cases} t^2-2t<3, \\ t \ge 0, \end{cases}$$

то есть промежуток $0 \le t < 3$, а затем решить неравенство $0 \le |x| < 3$.

В результате получим решение неравенства (3.12): $-3<x<3$.

Ответ: $x \in (-3;3)$.

***Пример* 3.3.** Решить неравенство

$$|x-6|<x^2-5x+9. \tag{3.13}$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x-6<x^2-5x+9, \\ x-6>-(x^2-5x+9), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+15>0, \\ x^2-4x+3>0. \end{cases}$$

Неравенство $x^2-6x+15>0$ выполняется при любом *x*. Поскольку $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, то неравенство $x^2-4x+3>0$ выполняется при $x<1$ и $x>3$.

Таким образом, множество решений исходного неравенства (3.13) состоит из объединения двух промежутков: $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Пример **3.4.** Решить неравенство

$$3|x-1|+x^2>7.$$

Решение. Данное неравенство можно переписать в виде

$$3|x-1|>7-x^2,$$

и, следовательно, оно равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 3(x-1)>7-x^2, \\ 3(x-1)<x^2-7, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-10>0, \\ x^2-3x-4>0. \end{array}\right. \qquad (3.14)$$

Поскольку $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$, а $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$, то множество решений совокупности (3.14), а следовательно, и исходного неравенства состоит из объединения двух промежутков: $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Пример **3.5.** Решить неравенство

$$\big||x|-1\big|<1-x. \qquad (3.15)$$

Решение. Решим данное неравенство двумя способами.

Первый способ. Неравенство (3.15) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} |x-1|<1-x, \\ x\ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} |-x-1|<1-x, \\ x<0. \end{cases}$$

Неравенство $|x-1|<1-x$ первой системы равносильно системе

$$\begin{cases} x-1<1-x, \\ x-1>-(1-x), \end{cases}$$

которая решений не имеет. Следовательно, не имеет решений и первая система совокупности.

Неравенство $|-x-1|<1-x$ равносильно неравенству $|x+1|<1-x$, которое в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} x+1<1-x, \\ x+1>-(1-x). \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что множество $(-\infty;0)$ является множеством решений второй системы совокупности и тем самым неравенства (3.15).

Второй способ. Неравенство (3.15) равносильно системе

$$\begin{cases} |x| + x - 2 < 0, \\ |x| - x > 0. \end{cases} \qquad (3.15')$$

Неравенство $|x| - x > 0$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x - x > 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x - x > 0, \\ x < 0, \end{cases}$$

решением которой является интервал $-\infty < x < 0$.

Таким образом, неравенство $|x| + x - 2 < 0$ системы $(3.15')$ нужно решать только при $x < 0$. При таких x оно принимает вид $-2 < 0$, следовательно, множеством решений неравенства (3.15) являются все числа промежутка $(-\infty; 0)$.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

***Пример* 3.6.** Решить неравенство $|x+4| - |x-3| \leq 1.$

Решение. В задаче требуется найти все точки на числовой оси, разность расстояний от каждой из которых до точек – 4 и 3 не превосходит 1. Изобразим эти точки на числовой оси.

Если точка x лежит правее точки 3, то рассматриваемая разность равна длине отрезка [–4; 3], то есть семи, что больше единицы (рис. 3.4).

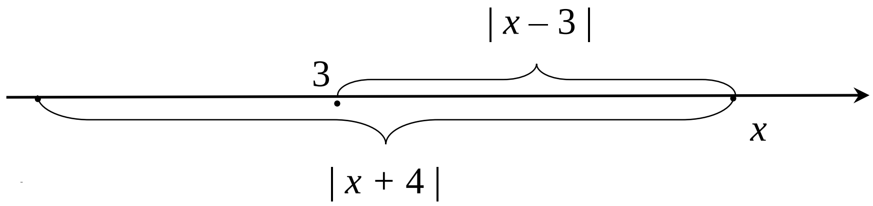


Рис. 3.4. Геометрическая интерпретация примера 3.6, когда точка *x* лежит правее точки 3

Если точка x лежит левее точки – 4, то рассматриваемая разность равна – 7 и, следовательно, все такие точки удовлетворяют неравенству (рис. 3.5).

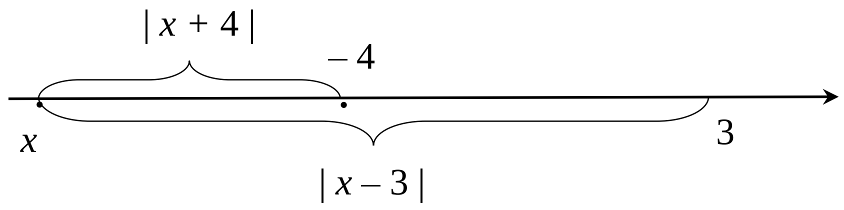


Рис. 3.5. Геометрическая интерпретация примера 3.6, когда точка x лежит левее точки –4

Если точка x лежит на отрезке [–4;3], то при движении точки x по этому отрезку от – 4 до 3 рассматриваемая разность расстояний возрастает от –7 до 7.

Определим, когда разность равна 1:

$$\begin{cases} |x+4|-|x-3|=1, \\ |x+4|+|x-3|=7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+4|-|x-3|=1, \\ 2|x+4|=8, \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Таким образом, получаем, что все решения исходного неравенства заполняют луч $x \le 0$ (рис. 3.6).

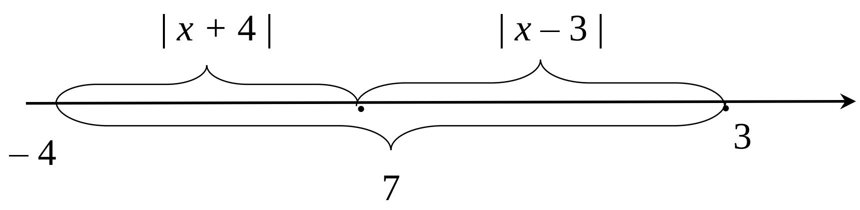


Рис. 3.6. Геометрическая интерпретация примера 3.6, когда точка x лежит на отрезке [–4;3]

Ответ: $x \in [0; +\infty)$.

***Пример* 3.7.** Решить неравенство

$$|3x^2+4x-4|+|4x^2-8x-5|>|x^2-12x-1|.$$

Решение. Первый способ. Заметим, что данное неравенство имеет вид $|a|+|b|>|a-b|$, где $a=4x^2-8x-5,$ $b=3x^2+4x-4$. В соответствии с неравенством треугольника

$$|a|+|b|>|a-b| \Leftrightarrow ab>0.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно неравенству

$$(4x^2 - 8x - 5)(3x^2 + 4x - 4) > 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $4x^2 - 8x - 5$ являются числа $-\dfrac{1}{2}$ и $2\dfrac{1}{2}$. Корнями квадратного трехчлена $3x^2 + 4x - 4$ являются числа -2 и $\dfrac{2}{3}$.

Следовательно, полученное неравенство можно переписать в виде

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-2\frac{1}{2}\right)\cdot 3(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0,$$

откуда

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-2\frac{1}{2}\right)(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0.$$

Множеством решений данного неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -2)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(2\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Второй способ. Решим данное неравенство *методом промежутков*. Определим промежутки знакопостоянства каждого из выражений под знаком модуля, для наглядности и удобства изобразив их на одной схеме:

$3x^2 + 4x - 4$	–	–	–	+	+	+
$4x^2 - 8x - 5$	+	–	–	–	+	+
$x^2 - 12x - 1$	+	+	–	–	–	+
-2	$-\dfrac{1}{2}$	$6-\sqrt{37}$	$\dfrac{2}{3}$	$2\dfrac{1}{2}$	$6+\sqrt{37}$	x

Рассмотрим шесть случаев, «раскрывая» модули на каждом из семи полученных промежутков согласно знакам в каждом из столбцов (в таблице видно, что на двух промежутках модули «раскрываются» одинаково, следовательно, можно объединить их в один случай).

Случай 1.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>6+\sqrt{37}, \end{array}\right. \\ 3x^2+4x-4+4x^2-8x-5>x^2-12x-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>6+\sqrt{37}, \end{array}\right. \\ 3x^2+4x-4>0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>6+\sqrt{37}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>6+\sqrt{37}. \end{array}\right.$$

Случай 2.

$$\begin{cases} -2\le x\le -\dfrac{1}{2}, \\ -3x^2-4x+4+4x^2-8x-5>x^2-12x-1. \end{cases}$$

Второе неравенство, следовательно, и система решений не имеет.

Случай 3.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}<x<6-\sqrt{37}, \\ -3x^2-4x+4-4x^2+8x+5>x^2-12x-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}<x<6-\sqrt{37}, \\ 4x^2-8x-5<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}<x<6-\sqrt{37}, \\ -\dfrac{1}{2}<x<2\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

и, значит, $x\in\left(-\dfrac{1}{2};6-\sqrt{37}\right)$.

Случай 4.

$$\begin{cases} 6-\sqrt{37}\le x\le\dfrac{2}{3}, \\ -3x^2-4x+4-4x^2+8x+5>-x^2+12x+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-\sqrt{37}\le x\le\dfrac{2}{3}, \\ 3x^2+4x-4<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-\sqrt{37}\le x\le\dfrac{2}{3}, \\ -2<x<\dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

и, значит, $x\in\left[6-\sqrt{37};\dfrac{2}{3}\right)$.

Случай 5.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} < x < 2\dfrac{1}{2}, \\ 3x^2 + 4x - 4 - 4x^2 + 8x + 5 > -x^2 + 12x + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} < x < 2\dfrac{1}{2}, \\ 0 > 0, \end{cases}$$

решений нет.

Случай 6.

$$\begin{cases} 2\dfrac{1}{2} \le x \le 6 + \sqrt{37}, \\ 3x^2 + 4x - 4 + 4x^2 - 8x - 5 > -x^2 + 12x + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\dfrac{1}{2} \le x \le 6 + \sqrt{37}, \\ 4x^2 - 8x - 5 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\dfrac{1}{2} \le x \le 6 + \sqrt{37}, \\ \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > \dfrac{2}{3}, \end{array} \right. \end{cases}$$

и, значит, $x \in \left[2\dfrac{1}{2}; 6 + \sqrt{37} \right]$.

Осталось объединить полученные множества: $(-\infty; -2)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; 6 - \sqrt{37} \right)$, $\left[6 - \sqrt{37}; \dfrac{2}{3} \right)$, $\left[6 - \sqrt{37}; \dfrac{2}{3} \right]$, $\left[2\dfrac{1}{2}; 6 + \sqrt{37} \right]$ и $(6 + \sqrt{37}; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3} \right) \cup \left(2\dfrac{1}{2}; +\infty \right)$.

***Пример* 3.8.** Решить неравенство

$$|2x^2 + x - 7| + |2x^2 + x - 9| \ge 4.$$

Решение. Обозначим $2x^2 + x - 7$ через t. Неравенство примет вид $|t| + |t - 2| \ge 4$. Согласно геометрическому смыслу модуля левая часть полученного неравенства равна сумме расстояний от точки t числовой оси до точек 0 и 2. Для того чтобы решить неравенство, найдем сначала точки t числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 2 равна 4. Понятно, что на отрезке [0; 2] искомых точек быть не может, поскольку сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине отрезка и в данном случае равна 2. Значит, искомые точки лежат вне отрезка. Рассмотрим точку, лежащую правее точки 2 на числовой оси. Сумма расстояний от этой точки до концов отрезка складывается из длины отрезка и удвоенного расстояния от этой точки до точки 2. Таким образом, это удвоенное расстояние равно $4-2=2$, и искомая точка находится правее точки 2 на расстоянии $2:2=1$ от нее. Следовательно, первая из искомых точек – это $t = 3$. Аналогично получаем, что вторая искомая точка находится на числовой оси левее точки 0 на расстоянии 1 от нее (рис. 3.7).

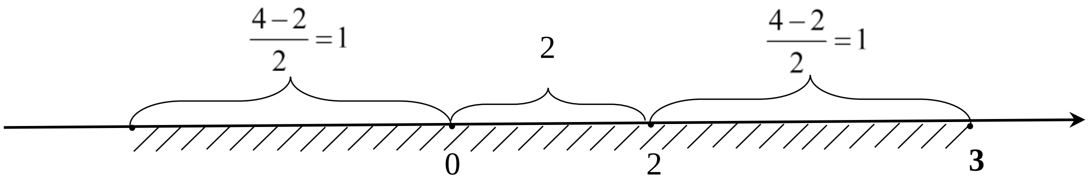


Рис. 3.7. Геометрическая интерпретация примера 3.8

Следовательно, вторая из искомых точек – это $t = -1$. Поэтому все точки t числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 2 меньше или равна 4, лежат на отрезке [−1; 3], который и является множеством решений неравенства $|t|+|t-2|\geq 4$:

Таким образом, $\begin{cases} t\geq -1, \\ t\leq 3. \end{cases}$ Сделав обратную замену, получим

$$\begin{cases} 2x^2+x-7\geq -1, \\ 2x^2+x-7\leq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-6\geq 0, \\ 2x^2+x-10\leq 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $2x^2+x-6$ являются числа −2 и 1,5; старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений первого неравенства системы: $(-\infty;-2]\cup[1{,}5;+\infty)$. Корнями квадратного трехчлена $2x^2+x-10$ являются числа −2,5 и 2; старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений второго неравенства системы: [−2,5; 2]. Пересечением множеств $(-\infty;-2]\cup[1{,}5;+\infty)$ и [−2,5; 2], а значит, и множеством решений данного неравенства является множество $[-2{,}5;-2]\cup[1{,}5;2]$.

Ответ: $x \in [-2{,}5; -2] \cup [1{,}5; 2]$.

***Пример* 3.9.** Решить неравенство $\dfrac{|x^3+x-1|-|x^3-x+1|}{|x-1|-|x+1|} \geq 0.$

Решение. При решении неравенств, содержащих произведение или частное разности модулей, удобно использовать следующую теорему: *Знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности квадратов этих выражений.*

$$\frac{|x^3+x-1|-|x^3-x+1|}{|x-1|-|x+1|} \geq 0 \Leftarrow \frac{(x^3+x-1)^2-(x^3-x+1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2} \geq 0.$$

Используя формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель на множители и решим полученное рациональное неравенство

$$\frac{(2x-2)(2x^3)}{-2(2x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-1) \leq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ 0 < x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

***Пример* 3.10.** Решить неравенство

$$\frac{|x^2-3x+2|-x^2+2x-1}{|x|-|x-1|} \leq 0.$$

Решение. «Ловушка» заключается в том, что в задаче имеется несколько модулей, раскрывать которые – значит получить громоздкое решение. Умножим дробь на некоторое выражение, принимающее лишь положительные значения и такое, чтобы упростить исходное неравенство:

$$\frac{|x^2-3x+2|-x^2+2x-1}{|x|-|x-1|} \cdot \frac{|x^2-3x+2|+(x-1)^2}{|x|+|x-1|} \leq 0;$$

$$\frac{((x-1)(x-2))^2-(x-1)^4}{(x)^2-(x-1)^2} \leq 0;$$

$$\frac{(x-1)^2((x-2)^2-(x-1)^2)}{2x-1} \leq 0;$$

$$\frac{(x-1)^2(2x-3)}{2x-1} \geq 0.$$

Решая данное неравенство методом интервалов (рис. 3.8), получим решение неравенства

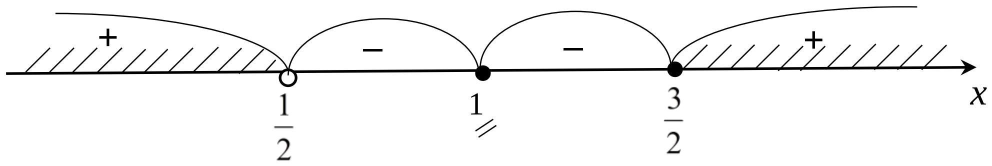


Рис. 3.8. Геометрическая интерпретация примера 3.10

Ответ: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

***Пример* 3.11.** Решить неравенство $21x + 3|2x+1| + 7 > 4|3x-2| + 2|x-1|$.

Решение. *Первый способ.* Перепишем неравенство в виде

$$21x + 3|2x+1| - 4|3x-2| - 2|x-1| + 7 > 0$$

и рассмотрим функцию

$$f(x) = 21x + 3|2x+1| - 4|3x-2| - 2|x-1| + 7,$$

определенную и непрерывную на всей числовой прямой. График функции представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. Каждое звено этой ломаной является частью прямой вида *y* = *kx* + *l*, где *k* > 0 (поскольку $k = 21 \pm 3 \cdot 2 \pm 4 \cdot 3 \pm 2$, то есть $k = 21 \pm 6 \pm 12 \pm 2k$ = 21 ± 6 ± 12 ± 2 и вне зависимости от «раскрытия» модулей коэффициент при *x* будет положителен). Следовательно, функция *f*(*x*) возрастает на (−∞; +∞). Поскольку *f*(0) = 0, неравенство *f*(*x*) > 0 будет выполнено в том и только том случае, когда *x* ∈ [0; +∞).

Ответ: $x \in [0; +\infty)$.

***Пример* 3.12**. Решите неравенство

$$3 \cdot (x^2 + 4x + 2) + |x-1| \geq 3x + |x^2 + 4x + 1|.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$3x - |x-1| \leq 3 \cdot (x^2 + 4x + 2) - |x^2 + 4x + 1|$$

и рассмотрим функцию $f(x)=3t-|t-1|$. Если $t\geq 1$, то $f(x)=2t+1$; если $t<1$, то $f(x)=4t-1$. Следовательно, функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $(-\infty;+\infty)$. Значит, неравенство $f(\alpha)\leq f(\beta)$ будет выполняться тогда и только тогда, когда $\alpha\leq\beta$. В данном случае $\alpha=x$, $\beta=x^2+4x+2$. Поэтому

$$x\leq x^2+4x+2,$$
$$x^2+3x+2\geq 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2+3x+2 являются числа -2 и -1, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множеством решений неравенства является объединение $(-\infty;-2]\cup[-1;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[-1;+\infty)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/display?v=pccxu6ven20

3.3. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решить неравенства, применяя алгоритмы $|x|\geq a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq a,\\ x\leq -a,\end{array}\right.$ $|x|\leq a\Leftrightarrow -a\leq x\leq a$:

а) $|x-1|<3$; **б)** $|x-0{,}5|\leq -2$; **в)** $|2+x|\leq 3$; **г)** $|3x-1|\geq 5$; **д)** $|2x+4|>-4$.

Задание 2. Решить неравенства, раскрыв модуль по определению:

2.1.

а) $x^2-x-2<|5x-3|$; **б)** $x^2+|6x-24|\leq 16$; **в)** $x^2-|5x+6|>0$;

г) $x\cdot|3x-5|<-2$; **д)** $|x^2-3x|+2x-6\geq 0$; **е)** $|x^2-4x|\leq 3-2x$.

2.2.

а) $\dfrac{|3-x|}{x^2-2x-3}\geq 2$; **б)** $\dfrac{2x+5}{|x+1|}>1$; **в)** $\dfrac{|6x^2-2x+1|}{x+1}\leq 1$.

Задание 3. Решить неравенства устно:

а) $|x| > 0$; **б)** $|x| \le 0$; **в)** $|x| > -5$; **г)** $|x| \ge x^2$; **д)** $\left|\dfrac{1}{x}\right| \ge -3$; **е)** $|x| > -x^2$.

Задание 4. Решить неравенства:

4.1.

а) $\left|\dfrac{x+1}{2x-2}\right| > 1$; **б)** $\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right| < 1$; **в)** $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right| - 1 \ge 0$;

4.2.

а) $\left|\dfrac{3x-x^2+2}{2-3x-x^2}\right| < 1$; **б)** $\left|\dfrac{2x^2-7x+6}{2x^2+7x+6}\right| \le 2$; **в)** $\left|\dfrac{2x^2+2x+3}{3x-x^2+3}\right| > -1$.

Задание 5. Решить неравенства с помощью логических рассуждений:

а) $|2x| \cdot (x+2) > 0$; **б)** $|x-3| \cdot (x-1) \ge 0$; **в)** $(x-1) \cdot |x+1| > 0$;

г) $|x-4| \cdot (2x-6) \le 0$; **д)** $|x^3-1| \cdot |x-9| \le 0$; **е)** $|x^2-9| \cdot (4-x) > 0$.

Задание 6. Решить неравенства методом промежутков:

6.1.

а) $|x-3| + |x+4| < 5$; **б)** $|2x-1| + |6x-2| \le 6$; **в)** $|3x+1| + |2x+1| > 3$;

г) $|4x-2| - |x-4| \ge 2$; **д)** $|x+1| - |8x-5| > -1$.

6.2.

а) $\dfrac{x^2-|2x-3|}{x^2-|2-x|} \le 1$; **б)** $\dfrac{|x+1|}{|x-2|-2} < 1$; **в)** $\dfrac{|x^2-9x+14|}{|x-8|} \le 3$;

6.3.

а) $|x+2| - 2|x-1| + |2x+1| \le 6$;

б) $|3x-1| + |2x-3| - |x+5| < 2$;

в) $|3x^2+2x| - |2-3x| < |x^2-3x|$.

Задание 7. Решить неравенства методом введения новой переменной:

7.1.

а) $x^2+2|x|-3<0;$ **б)** $x^2-4|x|+3\geq 0;$ **в)** $x^2+5|x|-24\geq 0;$ **г)** $x^3+4|x|>10.$

7.2.

а) $\dfrac{2}{|x-2|+1}>|x-2|-1;$ **б)** $\dfrac{-3}{|x|+2}\geq |x|-1;$ **в)** $\dfrac{6-|x+1|}{x^2+|x+1|-3}\geq \dfrac{|x+1|-6}{x^2-1};$

г) $\dfrac{x^2+|x|-2}{x^2+|x|-6}<0;$ **д)** $\left|\dfrac{1}{x}+x-2\right|+\left|x+\dfrac{1}{x}+2\right|\leq 4.$

Задание 8. Решить неравенства, определив знак подмодульного выражения:

а) $|2x^2-9x+14|\leq 11;$

б) $|2x^2-2x+1|\geq 1;$

в) $|x^2+x+9|\leq 3x^2+7x+2;$

г) $|-2+x-x^2|<|-4+3x-x^2|;$

д) $|x^2-5x+8|\leq |x-5|;$

е) $|4x^2-9x+6|\geq -x^2+x+2.$

Задание 9. Решить неравенства методом возведения обеих частей неравенства в квадрат:

а) $|2x-1|\leq |3x+1|;$ **б)** $|x-6|>|x^2-5x+9|;$ **в)** $\left|\dfrac{3}{2x-7}\right|<\left|-\dfrac{6}{x+4}\right|;$

г) $|x+2|\leq |x^2+x-2|;$ **д)** $|x^2-5x+4|>|-x^2+x+4|.$

Задание 10. Решить неравенства, используя геометрический смысл модуля:

10.1.

а) $|x-3|>5;$ **б)** $|x+8|<2.$

10.2.

а) $|x-5|+|x-9|\leq 3;$ **б)** $|x+1|+|x-15|>10;$

в) $|x+2|+|x-4|\geq 3;$ **г)** $|x-7|+|x-13|<12.$

Задание 11. Найти количество целых решений неравенства $|0{,}25-x|<2.$

Задание 12. Найти наименьшее целое решение неравенства $|3x-1|\geq 10x^2+4x.$

Задание 13. Решить неравенство $|2x-3|\leq|6-x|$ и указать в ответе середину отрезка, на котором оно выполняется.

Задание 14. Найти количество целых решений неравенства $x^7\cdot|x^2+6x+8|<0$ на промежутке [–6; 2].

Задание 15. Решить неравенства:

15.1.

а) $|2x^2-9x+15|\geq 2;$ **б)** $x^2+10x-\dfrac{5}{|x+5|}+4>0;$ **в)** $|2-x|\cdot|2+x|\geq x^2-4;$

г) $(|-2-x|+2)\cdot(2-|x+2|)\leq 0;$ **д)** $\dfrac{|x-1|-|7-x|}{|x+5|-2}\leq 0;$ **е)** $||2x+1|-5|>2.$

15.2.

а) $|2x^2+x+11|\geq x^2-5x+6;$ **б)** $|x^2-3x+2|\geq 3x-x^2-2;$ **в)** $|x-1|+|2-x|>3+x.$

15.3.

а) $|x-|x^2+4x-5|+1|\leq 0;$ **б)** $|2x-|3-x|-2|\leq 4-x.$

в) $(|x|-17)(|x|+6)\geq 0;$ **г)** $|x^3-1|\cdot(x-9)<0;$ **д)** $|x-3|\cdot(x-3)-|x-1|>0.$

Задание 16. Решить неравенства:

а) $10x-2\cdot|1+2x|+5\geq 3\cdot|2+3x|+4\cdot|x-1|;$

б) $|2x^2+4x+2|-|x^2+5x+4|+|-x^2+x+2|\leq 0;$

в) $|x^2+4x-5|+|x^3-2x^2-3x|-|x^3-x^2+x-5|\leq 0;$

г) $|x^7+4x^5+x^2+2x-3|<x^7+4x^5-x^2-2x+3.$

4. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ

4.1. Примеры решения систем уравнений с модулем

Отметим, что при решении систем, содержащих рациональные уравнения (неравенства) с модулем, используются те же определения, методы и приемы, что и в общем случае, когда уравнения (неравенства), образующие систему, являются рациональными.

Решая систему уравнений, содержащих знак абсолютной величины, с двумя переменными, важно понимать три вещи:

1) определение модуля;

2) словосочетание «система уравнений» соответствует союзу «и», а слово «совокупность» идентично союзу «или», иными словами, необходимо понимать, что *решение системы* подразумевает совокупность значений неизвестных системы, принадлежащих ее множеству допустимых значений и удовлетворяющих всем уравнениям системы одновременно, а совокупность уравнений (или систем уравнений) означает объединение их решений;

3) методы решения систем рациональных уравнений.

Напомним, что к основным методам решения систем рациональных уравнений с двумя и более переменными относятся метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных. Эти и другие специальные способы и приемы решения рассматриваются авторами в учебном пособии [21].

Вышесказанное означает, что решение системы уравнений с модулем с двумя и более переменными сводится к совокупности систем, которые получаются при «раскрытии модуля» с разными знаками. При этом нужно отобрать лишь те решения, которые удовлетворяют соответствующему случаю. «Отбор решений» можно выполнять с помощью подстановки найденных «решений» в каждое из уравнений исходной системы и в ответ записать те из них, которые дадут верные равенства.

В частности, **алгоритм решения системы двух линейных уравнений с модулем** можно сформулировать следующим образом:

1. Найти в уравнениях все выражения, содержащиеся под знаком модуля.

2. Рассмотреть всевозможные комбинации случаев, когда каждое из этих выражений принимает неотрицательные и отрицательные значения.

3. Для каждого возможного случая «раскрыть» модули, используя определение модуля.

4. Решить все полученные системы.

5. Для каждого случая отобрать те решение системы, которые ему удовлетворяют.

Рассмотрим примеры решения систем уравнений с модулем с двумя переменными.

***Пример* 4.1**. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2|x|+y=3, \\ x-2y=-1. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим два случая: $x \geq 0$ и $x < 0$.

Случай 1.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и система принимает вид

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ x-2y=-1. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $y = 3 - 2x$. Поэтому из второго уравнения получаем, что

$$x - 2(3 - 2x) = -1; \Leftrightarrow x - 6 + 4x = -1; \Leftrightarrow 5x = 5; \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Случай 2.

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и система принимает вид

$$\begin{cases} -2x+y=3, \\ x-2y=-1. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $y = 3 + 2x$. Поэтому из второго уравнения получаем, что

$$x - 2(3 + 2x) = -1; \Leftrightarrow x - 6 - 4x = -1; \Leftrightarrow -3x = 5; \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}.$$

В ответ запишем объединение решений двух рассмотренных случаев.

Ответ: (1; 1), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

В некоторых задачах перебор случаев является нерациональным. Бывает удобнее проанализировать их и понять, что некоторые (или даже все) случаи в принципе невозможны.

***Пример* 4.2.** Решить систему уравнений $\begin{cases} 2|x| - 3y = 7, \\ 6x - 9|y| = 10. \end{cases}$

Решение. В такой задаче, раскрывая модули по определению, придется рассмотреть четыре случая:

1) $x \geq 0, y \geq 0$;

2) $x \geq 0, y < 0$;

3) $x < 0, \ y \geq 0$;

4) $x < 0, \ y < 0$.

Однако заметим, что из уравнения $6x - 9|y| = 10$ следует, что $6x = 9|y| + 10 > 0.$ Поэтому третий и четвертый случаи невозможны и достаточно разобрать только первые два.

Случай 1.

Пусть $x \geq 0, y \geq 0$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 6x - 9y = 10. \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на 3 и вычтем из второго. Система заменится на равносильную

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 6x - 9y - 3(2x - 3y) = 10 - 3 \cdot 7. \end{cases}$$

Второе уравнение преобразуется к неверному числовому равенству $0 = -11.$ Значит, в этом случае решений нет.

Случай 2.

Пусть $x \geq 0, y < 0$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 6x + 9y = 10. \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на 3 и сложим со вторым. Система заменится на равносильную:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 12x = 31. \end{cases}$$

Тогда $x = \dfrac{31}{12}$, $y = -\dfrac{11}{18}$.

Ответ: $\left(\dfrac{31}{12}; -\dfrac{11}{18}\right)$.

***Пример* 4.3**. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3|x| + 5y + 9 = 0, \\ 2x - |y-2| - 7 = 0. \end{cases}$

Решение. а) $\begin{cases} x \ge 0, \\ y - 2 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 2. \end{cases}$

Система примет вид

$$\begin{cases} 3x + 5y + 9 = 0, \\ 2x - (y-2) - 7 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = -9, \\ 2x - y = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = -9, \\ 10x - 5y = 25, \end{cases}$$

Складываем уравнения, получаем $13x = 16$, $x = \dfrac{16}{13}$.

Тогда $y = 2x - 5$, $y = -\dfrac{33}{13} < 2$.

б) $\begin{cases} x \ge 0, \\ y - 2 < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y < 2. \end{cases}$

Система примет вид

$$\begin{cases} 3x + 5y + 9 = 0, \\ 2x + (y-2) - 7 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = -9, \\ 2x + y = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = -9, \\ -10x - 5y = -45. \end{cases}$$

$-7x = -54$, $x = \dfrac{54}{7}$, $y = 9 - 2x$, $y = -\dfrac{45}{7} < 2$. Значит пара $\left(\dfrac{54}{7}; -\dfrac{45}{7}\right)$ – решение системы.

в) $\begin{cases} x < 0, \\ y - 2 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y \geq 2. \end{cases}$

Система примет вид

$$\begin{cases} 3(-x) + 5y + 9 = 0, \\ 2x - (y-2) - 7 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5y = -9, \\ 2x - y = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5y = -9, \\ 10x - 5y = 25. \end{cases}$$

$7x = 16, \quad x = \dfrac{16}{7} > 0.$

г) $\begin{cases} x < 0, \\ y - 2 < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y < 2. \end{cases}$

Система примет вид

$$\begin{cases} 3(-x) + 5y + 9 = 0, \\ 2x + (y-2) - 7 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5y = -9, \\ -10x - 5y = -45. \end{cases}$$

$-13x = -54, \quad x = \dfrac{54}{13} > 0.$

Ответ: $\left(\dfrac{54}{7}; -\dfrac{45}{7}\right)$.

***Пример* 4.4**. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y - 5 = |x-1|, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-1| + ||x-1|| = 1, \\ y - 5 = |x-1|. \end{cases}$$

Так как $||x-1|| = |x-1|$, то получим систему $\begin{cases} 2|x-1| = 1, \\ y - 5 = |x-1|, \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} |x-1| = 1/2, \\ y - 5 = 1/2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \pm 1/2, \\ y = 11/2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3/2, \\ x = 1/2, \end{array} \right. \\ y = 11/2. \end{cases}$$

Ответ: $(1{,}5; 5{,}5)$, $(0{,}5; 5{,}5)$.

***Пример* 4.5**. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x| + 2y = 1{,}5, \\ 2x - 4|y| = 3. \end{cases}$

Решение. Раскрывая модули, рассмотрим четыре случая.

Случай 1. $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Система примет вид

$$\begin{cases} x + 2y = 1{,}5, \\ 2x - 4y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 1{,}53, \\ 2x - 4y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 8y = 0, \\ x + 2y = 1{,}5, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x = 1{,}5. \end{cases}$$

Оба полученных значения удовлетворяют заданным условиям: 1,5 ≥ 0; 0 ≥ 0.

Случай 2. $\begin{cases} x \ge 0, \\ y < 0. \end{cases}$

Система примет вид

$$\begin{cases} x + 2y = 1{,}5, \\ 2x + 4y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 1{,}5, \\ x + 2y = 1{,}5, \end{cases} \quad x + 2y = 1{,}5.$$

Система имеет бесконечно много решений, где общее решение можно записать в виде (1,5 – 2y; y), где y < 0. Очевидно, при этом x = 1,5 – 2y ≥ 0.

Случай 3. $\begin{cases} x < 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Система примет вид

$$\begin{cases} -x + 2y = 1{,}5, \\ 2x - 4y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 4y = 3, \\ 2x - 4y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 4y + 2x - 4y = 6, \\ 2x - 4y = 3. \end{cases}$$

Первое уравнение не имеет решений, так как сводится к уравнению 0 = 6. Значит, система не имеет решений.

Случай 4. $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0. \end{cases}$

Система примет вид

$$\begin{cases} -x + 2y = 1{,}5, \\ 2x + 4y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 4y = 3, \\ 2x + 4y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 0, \\ -x + 2y = 1{,}5, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0{,}75. \end{cases}$$

Значение x не удовлетворяет заданному условию. Значит, система не имеет решений.

Ответ: (1,5 – 2y; y), где y < 0.

***Пример* 4.6**. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\,|\,x\,| - 3\,|\,y-1\,| = 3, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения системы выражаем *x* через *y*, получаем $x = \dfrac{2y+5}{3}$, подставляем это значение для *x* в первое уравнение системы, получаем:

$$\frac{2}{3}|2y+5| - 3|y-1| = 3; \quad \frac{4}{3}\left|y+\frac{5}{2}\right| - 3|y-1| = 3.$$

Выражение $y + \dfrac{5}{2} = 0$ при $y = \dfrac{5}{2}$.

Если $y > -\dfrac{5}{2}$, то $\left|y+\dfrac{5}{2}\right| = y + \dfrac{5}{2}$; если $y < -\dfrac{5}{2}$, то $\left|y+\dfrac{5}{2}\right| = -y - \dfrac{5}{2}$.

Выражение $y - 1 = 0$, если $y = 1$.

Если $y > 1$, то $|y-1| = y-1$, а если $y < 1$, то $|y-1| = 1-y$.

Если $y \geq 1$, то $|y-1| = y-1$ и $\left|y+\dfrac{5}{2}\right| = y + \dfrac{5}{2}$; получаем уравнение

$$\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right) - 3(y-1) = 3, \quad \frac{4}{3}y + \frac{10}{3} - 3y + 3 = 3, \quad -\frac{5}{3}y = \frac{10}{3}, \quad y = 2.$$

Тогда $x = \dfrac{1}{3}(2\cdot 2+5) = 3$. Число $2 > 1$, так что пара (3; 2) является решением системы.

Пусть теперь $-\dfrac{5}{3} \leq y < 1$, тогда $|y-1| = 1-y$, $\left|y+\dfrac{5}{2}\right| = y + \dfrac{5}{2}$.

Для нахождения *y* получаем уравнение

$$\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right) + 3(y-1) = 3, \quad \frac{4}{3}y + \frac{10}{3} + 3y = 6, \quad \frac{13}{3}y = \frac{8}{3}, \quad y = \frac{8}{13}.$$

$$x = \frac{1}{3}(2y+5) = \frac{1}{3}\left(\frac{16}{13}+5\right) = \frac{27}{13}.$$

Число $\dfrac{8}{13}$ больше $-\dfrac{5}{2}$, но меньше, чем 1, поэтому пара чисел $\left(\dfrac{27}{13}; \dfrac{8}{13}\right)$ является решением системы.

Если $y < -\frac{5}{2}$, то получаем уравнение

$$-\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)+3(y-1)=3, \quad -\frac{4}{3}y-\frac{10}{3}+3y=6, \quad \frac{5}{3}y=\frac{28}{3}, \quad y=\frac{28}{5}.$$

Это значение больше, чем $-\frac{5}{2}$, поэтому решений нет.

Ответ: (3; 2), $\left(\frac{27}{13}; \frac{8}{13}\right)$.

Если уравнения системы содержат одинаковые выражения с модулем, то можно воспользоваться методом алгебраического сложения и свести тем самым решение исходной системы к уравнению с одной переменной, сократив количество рассматриваемых случаев.

***Пример* 4.7**. Решить систему уравнений $\begin{cases} 6x+|y|=7, \\ 3|x-2|-2|y|=1. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим со вторым уравнением, получаем $12x+3|x-2|=15.$ Полагая $x \geq 2,$ раскрываем модуль со знаком плюс: $12x+3x+6=4.$ Откуда находим значение $x=\frac{21}{15}=1\frac{6}{15}<2.$ Значит, в случае $x \geq 2$ система решений не имеет. Рассматривая случай $x<2,$ находим $x=1<2.$ Решая первое уравнение с модулем исходной системы при $x=1$, найдем значения y: $|y|=7-6=1, \quad y=\pm 1.$

Ответ: $(1; -1), (1; 1).$

***Пример* 4.8**. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+xy=19, \\ |x-1|+xy+y=10. \end{cases}$

Решение. Согласно определению модуля нужно рассмотреть совокупность двух систем при $x \geq 1$ или $x<1$:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2+y^2+xy=19, \\ x-1+xy+y=10; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1, \\ x^2+y^2+xy=19, \\ 1-x+xy+y=10. \end{cases}$$

Найдем решения первой системы. Заметим, что второе и третье уравнения являются симметрическими. Введем новые переменные $u = x + y, v = x \cdot y$ и выразим через них левые части симметрических уравнений:

$$\begin{cases} u^2 - v = 19, \\ u + v = 11. \end{cases}$$

Сложив уравнения последней системы, получим уравнение $u^2 + u - 30 = 0,$ решения которого $u_1 = 5$ и $u_2 = -6.$ Так как $v = 11 - u,$ то $v_1 = 6$ и $v_2 = 17.$ Возвращаясь к переменным x и y, мы используем пары $(5; 6)$ и $(-6; 17)$ и сведем первую систему уравнений к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ x + y = 5, \\ x \cdot y = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 1, \\ x + y = -6, \\ x \cdot y = 17. \end{cases}$$

Используя метод подстановки, находим решения первой системы $(3; 2)$, $(2; 3)$. Вторая система, записанная выше, решений не имеет.

Случай $x < 1$ рассматриваем аналогично, полагая $u = x - y, v = xy$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 19, \\ 1 - x + xy + y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 + 3xy = 19, \\ xy - (x - y) = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 3v = 19, \\ v - u = 9; \end{cases} \Leftrightarrow u^2 + 3u + 8 = 0.$$

Последнее уравнение действительных корней не имеет.

Ответ: $(3; 2)$, $(2; 3)$.

В случае, когда система содержит уравнения (или неравенства) с модулем с одной переменной, решают каждое уравнение (неравенство) системы по отдельности, а затем находят пересечение полученных решений на одной координатной прямой. В рамках этого алгоритма решения, кроме определения модуля, могут потребоваться и другие методы и приемы решения уравнений и неравенств с модулем.

***Пример* 4.9**. Решить систему уравнений $\begin{cases} |4x - 3| = |x - 2|, \\ \dfrac{|x^2 - x| + 1}{|x + 1| - x^2} = 1. \end{cases}$

Решение. Решим первое уравнение системы возведением обеих его частей в квадрат, так как они положительны. Получаем

$$|4x-3|^2 = |x-2|^2, \quad 16x^2 - 24x + 9 = x^2 - 4x + 4, \quad 15x^2 - 20x + 5 = 0.$$

Разделим полученное уравнение на 5, а затем найдем его корни: $x_1 = \dfrac{1}{3};\ x_2 = 1.$ Подставляя найденные значения во второе уравнение, убеждаемся, что они являются и его корнями, а значит, и решениями исходной системы.

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{3};\ x_2 = 1.$

Далее рассмотрим примеры решения систем и совокупностей рациональных неравенств с модулем.

4.2. Примеры решения систем и совокупностей неравенств с модулем

***Пример* 4.10**. Решить систему неравенств $\begin{cases} |3x+2| + |2x-3| \le 11, \\ \dfrac{7}{x^2-5x+6} + \dfrac{9}{x-3} + 1 < 0. \end{cases}$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы.

Чтобы решить неравенство, содержащее модули, нужно раскрыть модули.

Приравняем каждое подмодульное выражение к нулю и найдем точки, в которых подмодульные выражения меняют знак.

$$3x + 2 = 0; \quad x = -\frac{2}{3}; \ 2x - 3 = 0; \quad x = \frac{3}{2};$$

Нанесем эти значения *x* на числовую прямую (рис. 4.1).

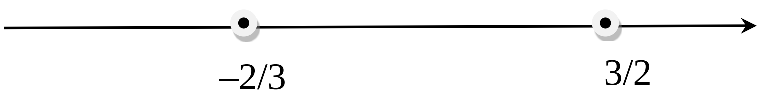


Рис. 4.1. Точки, в которых подмодульные выражения первого неравенства равны нулю

Мы получили три промежутка. Найдем знаки каждого подмодульного выражения на каждом промежутке (рис. 4.2).

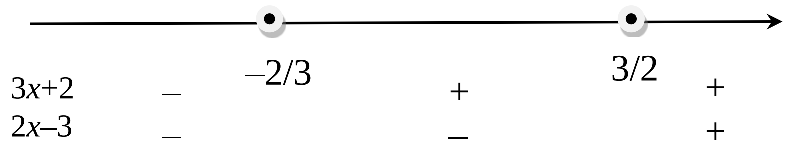


Рис. 4.2. Знаки подмодульных выражений первого неравенства

Раскроем модули на каждом промежутке (мы можем граничные точки $-\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$ включать в оба промежутка):

а) $x < -\frac{2}{3}$.

На этом промежутке оба подмодульных выражения отрицательны, поэтому мы раскрываем модули с противоположным знаком:

$$-(3x+2)-(2x-3)\le 11. \tag{4.1}$$

Так как исходное неравенство «превращается» в неравенство (4.1) только при $x < -\frac{2}{3}$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} -(3x+2)-(2x-3)\le 11, \\ x < -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство, и получим систему:

$$\begin{cases} x \ge -2, \\ x < -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решением системы неравенств является промежуток $\left[-2; -\frac{2}{3}\right)$.

б) $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{3}{2}$.

На этом промежутке первое подмодульное выражение положительно, а второе отрицательно, поэтому первый модуль мы раскрываем с тем же знаком, а второй с противоположным.

Получаем неравенство

$$(3x+2)-(2x-3)\le 11. \tag{4.2}$$

Так как исходное неравенство «превращается» в неравенство (4.2) только при $-\frac{2}{3}\le x\le\frac{3}{2}$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases}(3x+2)-(2x-3)\le 11,\\ -\frac{2}{3}\le x\le\frac{3}{2},\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}x\le 6,\\ -\frac{2}{3}\le x\le\frac{3}{2},\end{cases}$$

Решением системы неравенств является промежуток $\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$.

в) $x>\frac{3}{2}$.

На этом промежутке оба подмодульных выражения положительны, поэтому оба модуля мы раскрываем с тем же знаком.

Получаем неравенство

$$(3x+2)+(2x-3)\le 11. \tag{4.3}$$

Так как исходное неравенство «превращается» в неравенство (4.3) только при $x>\frac{3}{2}$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases}(3x+2)+(2x-3)\le 11,\\ x>\frac{3}{2},\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x \le 2{,}4, \\ x > \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток $\left(\dfrac{3}{2}; 2{,}4\right]$.

Объединим три промежутка и получим решение первого неравенства исходной системы: $[-2; 2{,}4]$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{7}{x^2-5x+6}+\frac{9}{x-3}+1<0.$$

Приведем левую часть неравенства к общему основанию. Сначала разложим на множители знаменатель первой дроби:

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)}+\frac{9}{x-3}+1<0,$$

$$\frac{7+9(x-2)+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}<0,$$

$$\frac{x^2+4x-5}{(x-2)(x-3)}<0.$$

Решим это неравенство методом интервалов. Найдем корни числителя и знаменателя и нанесем их на числовую ось.

$$x^2+4x-5=0, \quad x_1=1; \quad x_2=-5.$$

На самом правом промежутке $\dfrac{x^2+4x-5}{(x-2)(x-3)}>0$, поэтому знаки расставим как на рис. 4.3.

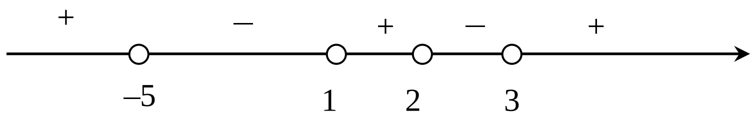


Рис. 4.3. Знаки подмодульных выражений второго неравенства

Нас интересуют промежутки со знаком «–», следовательно, решение этого неравенства: $x \in (-5; 1) \cup (2; 3)$.

Совместим решения первого и второго неравенств исходной системы на одной координатной прямой и найдем их пересечение (рис. 4.4).

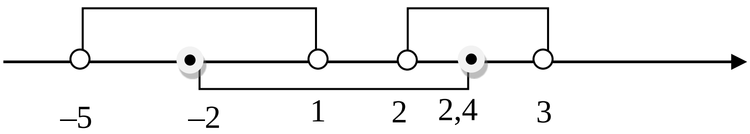


Рис. 4.4. Решение системы неравенств 4.10

Ответ: $x \in [-2; 1) \cup (2; 2{,}4]$.

***Пример* 4.11**. Решить систему неравенств $\begin{cases} |x-1| \le 2, \\ |x-4| \ge 5. \end{cases}$

Решение. Приравняем каждое подмодульное выражение к нулю и найдем точки, в которых подмодульные выражения меняют знак: $x = 1$, $x = 4$. Нанесем эти значения x на числовую прямую (рис. 4.5).

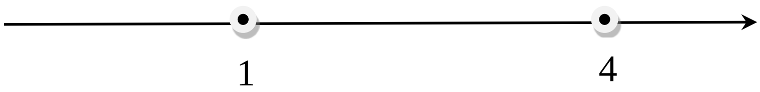


Рис. 4.5. Точки, в которых подмодульные выражения неравенств равны нулю

Мы получили три промежутка. Найдем знаки каждого подмодульного выражения на каждом промежутке (рис. 4.6).

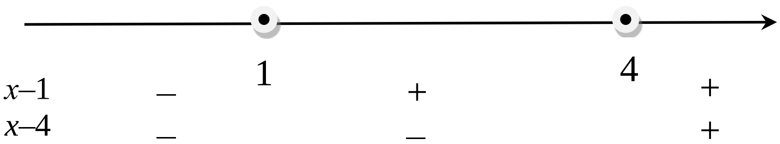


Рис. 4.6. Знаки подмодульных выражений неравенств

Раскроем модули на каждом промежутке и получим три системы:

$$1)\ \begin{cases} x \ge 4, \\ x-1 \le 2, \\ x-4 \ge 5; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 1 \le x < 4, \\ x-1 \le 2, \\ -(x-4) \ge 5; \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x < 1, \\ -(x-1) \le 2, \\ -(x-4) \ge 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq 3, \\ x \geq 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \leq x < 4, \\ x \leq 3, \\ x \leq -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1, \\ x \geq -1, \\ x \leq -1. \end{cases}$$

Первые две системы решений не имеют. Решением третьей системы является $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Напомним, что несколько неравенств образуют *совокупность*, если поставлена задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из этих неравенств. Таким образом, *решением совокупности неравенств* является объединение решений неравенств, образующих совокупность.

***Пример* 4.12**. Решить совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 + 4|x| - 5 \leq 0, \\ \dfrac{3+2x}{|5-2x|} < 0. \end{array}\right.$

Решение. Первое неравенство с модулем можно решить с использованием определения модуля. Тогда получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 4x - 5 \leq 0. \end{cases}$$

Решение квадратного неравенства первой системы можно получить с помощью метода интервалов. Имеем $x^2 + 4x - 5 = (x-1) \cdot (x+5) \leq 0$. Значения $x = 1$ и $x = -5$ нанесем на числовую прямую и определим знак левой части неравенства на каждом из трех выделенных промежутков (рис. 4.7).

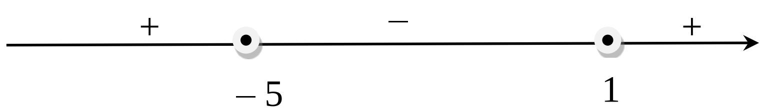


Рис. 4.7. Знаки выражения в левой части неравенства $x^2 + 4x - 5 \leq 0$

Таким образом, получаем решение $x \in [-5;1]$, которое в пересечении с множеством $[0;+\infty)$ дает отрезок $[0;1]$ – решение первой системы неравенств.

Во втором случае $x<0$ имеем $x^2-4x-5=(x-5)\cdot(x+1)\le 0$. Располагая значения $x=-1$ и $x=5$ на числовой прямой, находим знаки левой части неравенства на промежутках (рис. 4.8).

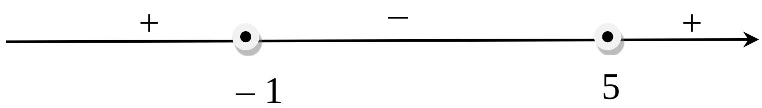


Рис. 4.8. Знаки выражения в левой части неравенства $x^2-4x-5\le 0$

В ответ квадратного неравенства второй системы запишем $x\in[-1;5]$. С учетом условия $x<0$ находим решение второй системы неравенств: $x\in[-1;0)$. Объединяя решения двух систем, получаем решение первого неравенства с модулем исходной совокупности: $x\in[-1;1]$.

Остается решить дробно-рациональное неравенство с модулем совокупности, полагая $5-2x\ne 0$ или $x\ne 2{,}5$. Так как модуль – величина положительная, то решение рассматриваемого неравенства сводится к решению неравенства $3+2x<0$, а именно $x<-1{,}5$.

Наконец, объединяя решения двух неравенств совокупности, находим ее решение $x\in(-\infty;-1{,}5)\cup[-1;1]$.

Ответ: $x\in(-\infty;-1{,}5)\cup[-1;1]$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/display?v=pq4jmc5ta20

4.3. Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Решить систему уравнений:

1.1.

а) $\begin{cases}|x-3y|=2,\\ 7x-y=-6;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}|x-y|=5,\\ 3x+2y=10.\end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 8x + 2\,|\,y\,| = 3, \\ 3x - 6\,|\,y\,| = 1. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x - y = 2, \\ |\,x\,| + |\,y\,| = -3. \end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений:

2.1. $\begin{cases} |\,2x - 8\,| = 2, \\ x^2 - 8|x| + 15 = 0. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} \left|\dfrac{x+5}{x-5}\right| = \dfrac{1}{4}, \\ |x+7| + \left|x^2 + x - 2\right| = 8. \end{cases}$

Задание 3. Решить систему неравенств:

3.1. $\begin{cases} |\,x^2 + x + 10\,| \le 3x^2 + 7x + 2, \\ |\,4 - 3x\,| \ge 2 - x. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} \left|\dfrac{3}{2x-7}\right| < \left|-\dfrac{6}{x+4}\right|, \\ \dfrac{x^2 - |\,x\,| - 12}{x-3} \ge 2x. \end{cases}$

Задание 4*. Решить совокупность неравенств:

4.1. $\left[\begin{array}{l} |\,3x - 1\,| < 2, \\ \dfrac{15(x+1)^4}{|x| \cdot (x^2+1)} \le 128. \end{array}\right.$

4.2. $\left[\begin{array}{l} (x-1)\cdot|\,x - 5\,| \ge 3, \\ \left|x^3 + 2x^2 - 4\right| < x^3 + 4. \end{array}\right.$

4.3. $\left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3, \\ |1 - x| + |x - 4| > 7. \end{array}\right.$

Задание 5.** Решить совокупность систем неравенств:

5.1. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|x^2+|x|\right|\le 6,\\ \dfrac{|x+2|-3}{|x|-1}>3,\end{cases}\\ \begin{cases}\left|\dfrac{x}{2}+1\right|>x-5,\\ \left|\dfrac{-5}{x+2}\right|>10\cdot\left|\dfrac{1}{1-x}\right|.\end{cases}\end{array}\right.$$

5. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ С МОДУЛЕМ

5.1. Построение графиков функций, содержащих знак модуля

При построении графиков функций, содержащих знак модуля, применяют, в основном, те же приемы, что при решении уравнений и неравенств с модулем. Основным действием при этом является раскрытие модуля по определению.

***Пример* 5.1.** Построить график функции $y=|x|$.

Решение. Раскроем знак модуля согласно его определению:

$$y=\begin{cases}x, & \text{если } x\ge 0,\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Следовательно, искомый график совпадает с прямой $y=x$ при $x\ge 0$ (в правой полуплоскости) и с прямой $y=-x$ при $x<0$ (в левой полуплоскости). В результате получаем прямой угол с вершиной в начале координат, лучи которого симметричны относительно оси ординат (рис. 5.1). Иногда можно встретить название этого графика: «Галочка», «Уголок».

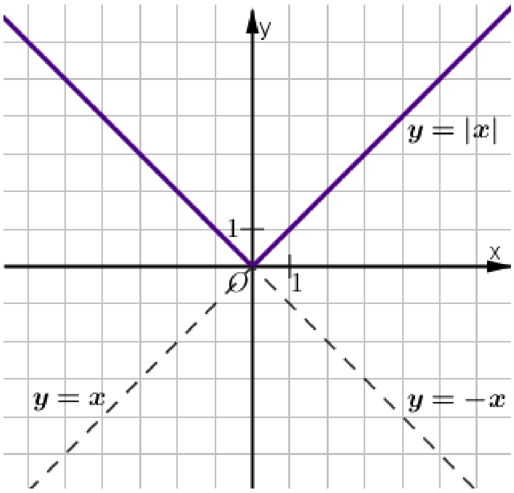


Рис. 5.1. График функции $y = |x|$

***Пример* 5.2.** Построить график функции $y = x^2 - 5 \cdot |x| - x$.

Решение. При $x < 0$ функция имеет вид $y = x^2 + 5x – x = x^2 + 4x$. Графиком этой функции является парабола с ветвями, направленными вверх (так как $a = 1 > 0$), с вершиной в точке с координатами $x = – b/(2a) = – 2$, $y\,(–2) = – 4$, пересекающая ось OX в точках 0 и – 4 (корни уравнения $x^2 + 4x = 0$).

При $x \geq 0$ функция имеет вид $y = x^2 – 5x – x = x^2 – 6x$. Графиком этой функции является парабола с ветвями, направленными вверх (так как $a = 1 > 0$), с вершиной в точке с координатами $x = – b/(2a) = 3$, $y\,(3) = – 9$, пересекающая ось ОX в точках 0 и 6 (корни уравнения $x^2 – 6x = 0$).

Строим для $x < 0$ часть первой параболы, а для $x \geq 0$ часть второй параболы (рис. 5.2).

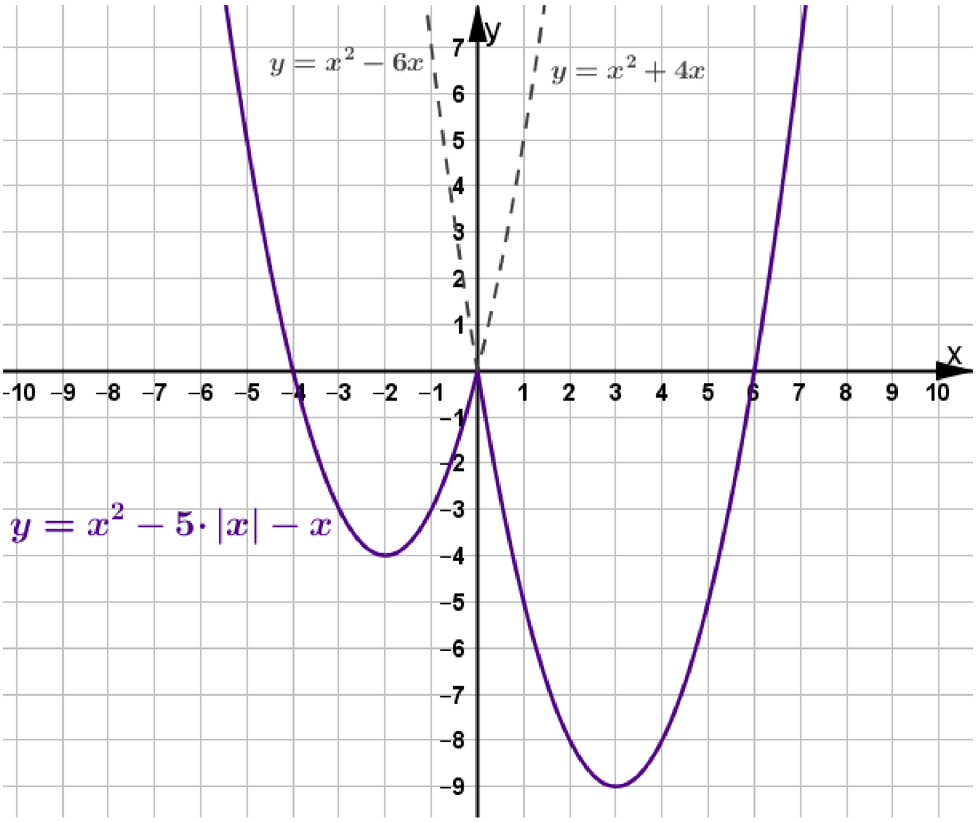


Рис. 5.2. График функции $y = x^2 - 5\cdot|x| - x$

***Пример* 5.3.** Построить график функции $y = \dfrac{(x^2 - 2x)\cdot|x|}{x-2}$.

Решение. Определим *ОДЗ* исходной функции: $x \neq 2$.

На *ОДЗ* можно упростить выражение: $y = \dfrac{(x^2 - 2x)\cdot|x|}{x-2} = \dfrac{x\cdot(x-2)\cdot|x|}{x-2} = x\cdot|x|$.

Раскроем модуль по определению и построим график функции (рис. 5.3)

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } x \neq 2, \\ -x^2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

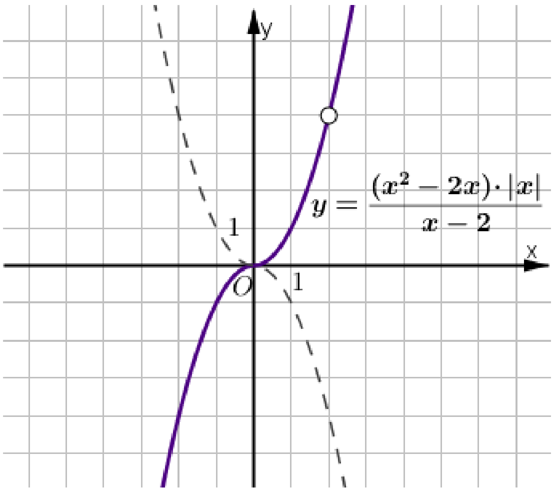


Рис. 5.3. График функции $y = \frac{(x^2-2x)\cdot|x|}{x-2}$

Для построения графиков функций используют преобразования (табл. 2).

Таблица 2. Преобразование графика функции $y = f(x)$

Переход к функции	**Действие**
$y = f(x)+a, a>0$	Сдвиг вдоль оси *OY* вверх на *a* единиц
$y = f(x)-a, a>0$	Сдвиг вдоль оси *OY* вниз на *a* единиц
$y = f(x+b), b>0$	Сдвиг вдоль оси *OX* влево на *b* единиц
$y = f(x-b), b>0$	Сдвиг вдоль оси *OX* вправо на *b* единиц
$y = k\,f(x),\ k>0$	Растяжение вдоль оси *OY* в *k* раз при $k>1$ Сжатие к оси *OY* в $\frac{1}{k}$ раза при $0<k<1$
$y = f(kx), k>0$	Растяжение вдоль оси *OX* в *k* раз при $k>1$ Сжатие к оси *OX* в $\frac{1}{k}$ раза при $0<k<1$
$y = -f(x)$	Симметрия относительно оси *OX*
$y = f(-x)$	Симметрия относительно оси *OY*

Рассмотрим преобразования графиков функции $y = f(x)$, содержащих знак модуля.

I. Построение графика функции $y = f(|x|)$

По определению модуля имеем:

$$y = f(|x|) = \left[\begin{array}{l} f(x), \text{ при } x \geq 0, \\ f(-x), \text{ при } x < 0. \end{array} \right.$$

Следовательно, график функции $y = f(|x|)$ состоит из двух графиков $y = f(x)$ в правой полуплоскости, $y = f(-x)$ – в левой полуплоскости.

Отсюда вытекает правило построения графика функции $y = f(|x|)$:

а) строим только часть графика функции $y = f(x)$, расположенной в области $x \geq 0$ (справа от оси *Oy*);

б) в области $x < 0$ (слева от оси *Oy*) отображаем полученную часть графика симметрично относительно оси *Oy* (рис. 5.4).

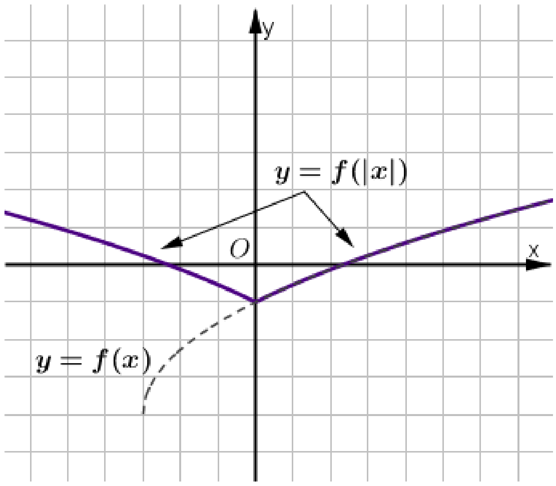


Рис. 5.4. Построение графика функции $y = f(|x|)$

***Пример* 5.4.** Построить график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

Решение. Так как по свойству модулей $x^2 = |x|^2$, то уравнение можно записать в виде $y = |x|^2 - 4|x| + 3$. Начнем построение с графика функции $y = x^2 - 4x + 3$ (рис. 5.5).

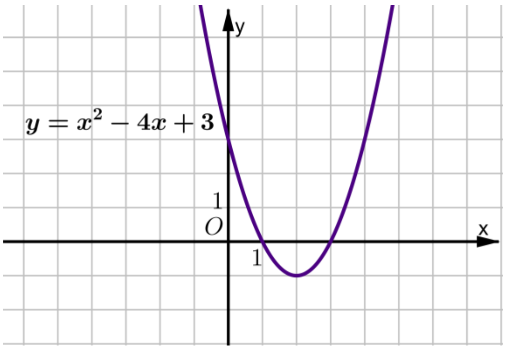


Рис. 5.5. График функции $y = x^2 - 4x + 3$

Удалим часть графика, расположенную слева от оси *Oy*; сохраним часть графика, расположенную справа от оси *Oy*, и отобразим ее симметрично относительно оси *Oy* (рис. 5.6):

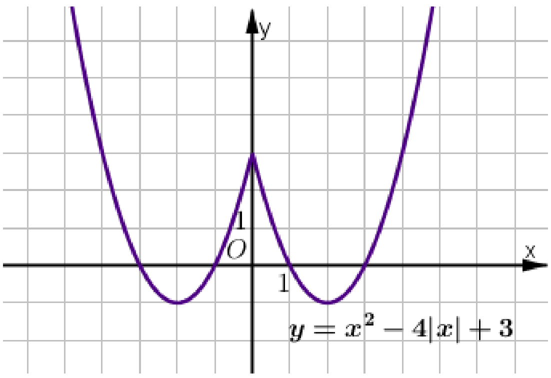


Рис. 5.6. График функции $y = x^2 - 4|x| + 3$

II. Построение графика функции $y = |f(x)|$

График можно построить, раскрыв модуль:

$$y = |f(x)| = \left[\begin{array}{l} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{array} \right.$$

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ используют следующее правило:

а) строим график функции $y = f(x)$;

б) часть графика, расположенную выше оси *Ox*, сохраняем; часть графика, расположенную ниже оси *Ox*, отображаем симметрично относительно оси *Ox* (рис. 5.7).

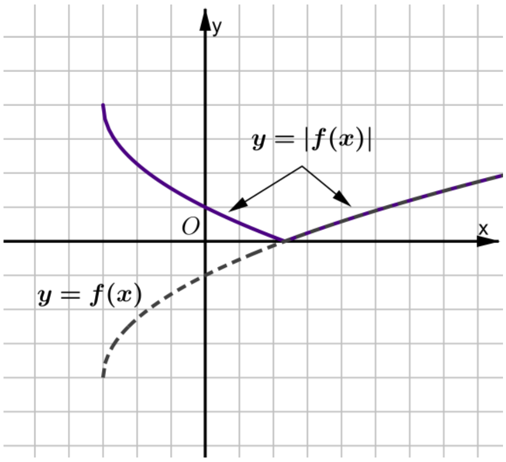


Рис. 5.7. Построение графика функции $y = |f(x)|$

***Пример* 5.5.** Построить график функции $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$.

Решение. Начнем построение с графика функции $y = x^2 - 4x + 3$ (рис. 5.5).

Отобразим часть графика, расположенную ниже оси *Ox*, симметрично относительно оси *Ox*, сохранив при этом часть графика, расположенную выше оси *Ox* (рис. 5.8).

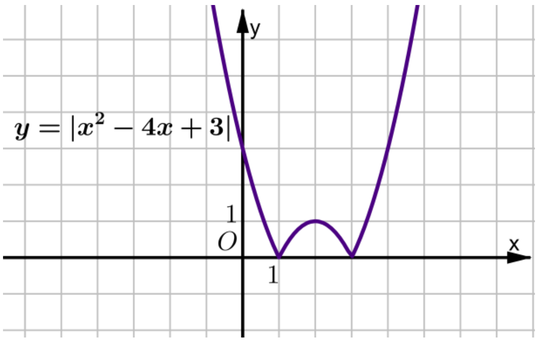


Рис. 5.8. График функции $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$

III. Построение графика функции $y = \left|f(|x|)\right|$

Общее правило построения графиков функций данного вида состоит в последовательном выполнении преобразований : $f(x) \rightarrow f(|x|) \rightarrow |f(|x|)|$.

***Пример* 5.6.** Построить график функции $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$.

Решение. Выполним последовательность преобразований:

$y = x^2 - 4x + 3 \rightarrow y = x^2 - 4|x| + 3 \rightarrow y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$ (рис. 5.9).

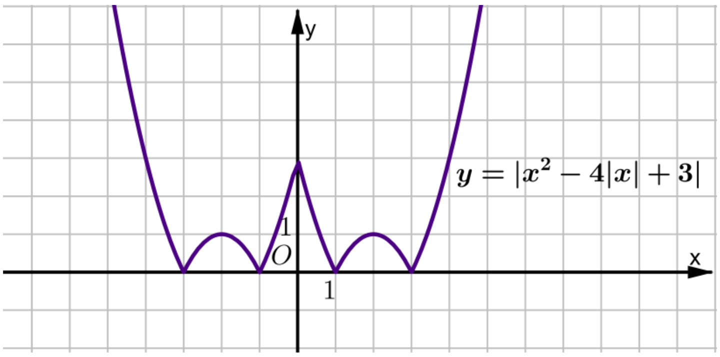


Рис. 5.9. График функции $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$

***Пример* 5.7.** Построить график функции, $y = \left||x^2 - 4x| - 3\right|$.

Решение. Выполним последовательность преобразований:

$$y = x^2 - 4x \xrightarrow{(1)} y = |x^2 - 4x| \xrightarrow{(2)} y = |x^2 - 4x| - 3 \xrightarrow{(3)} y = \left||x^2 - 4x| - 3\right| \text{ (рис. 5.10).}$$

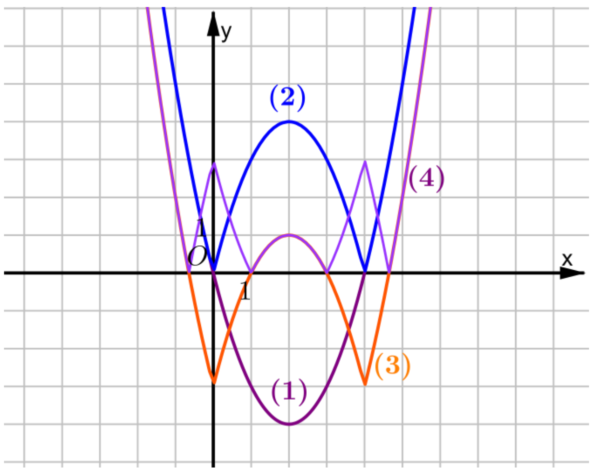


Рис. 5.10. Построение графика функции $y = \left||x^2 - 4x| - 3\right|$

***Пример* 5.8.** Построить график функции $y = |\,2 - |\,1 - |\,x\,|\,|\,|$.

Решение. Запишем цепочку последовательных преобразований:

$$y = |x| \xrightarrow{(1)} y = -|x| \xrightarrow{(2)} y = -|x| + 1 \xrightarrow{(3)} y = \left|-|x| + 1\right| \xrightarrow{(4)} y = -\left|1 - |x|\right| \xrightarrow{(5)}$$

$$\to y = -\left|1 - |x|\right| + 2 \xrightarrow{(6)} y = |\,2 - |\,1 - |\,x\,|\,|\,| \xrightarrow{(7)}$$ и выполним построение (рис. 5.11).

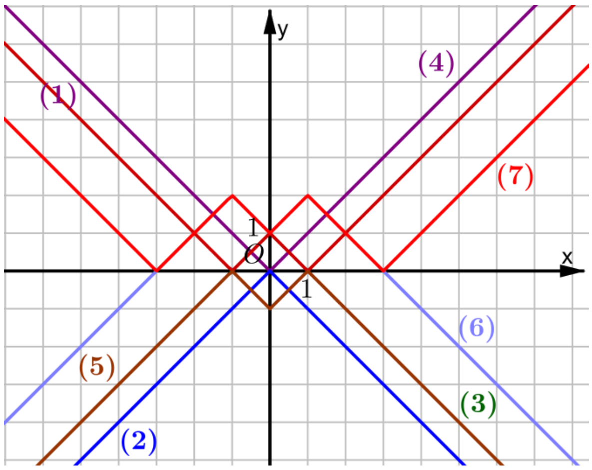


Рис. 5.11. Построение графика функции $y = \left|2 - \left|1 - |x|\right|\right|$

График функции $y = \left|\, 2 - \left|\, 1 - |\, x\,|\,\right|\,\right|$ изображен на рис. 5.12.

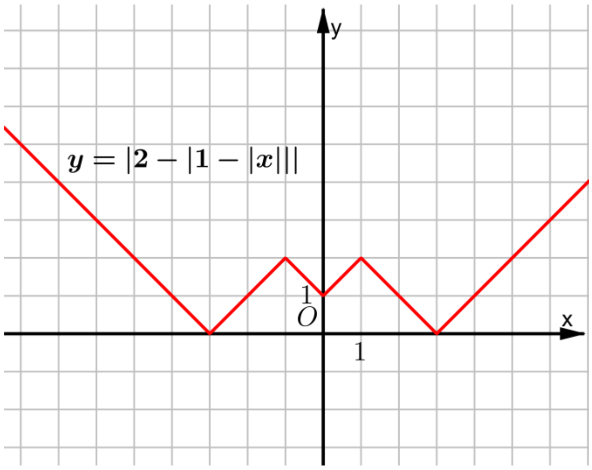


Рис. 5.12. График функции $y = \left|2 - \left|1 - |x|\right|\right|$

IV. Построение графиков вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + ... + |f_n(x)| + f_0(x)$ (5.1)

При построении графиков функций такого рода используется правило:

1) область допустимых значений данной функции разбивают на множества, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

2) на каждом таком множестве функцию записывают без знака модуля и строят график. Объединение множества решений, найденных на всех частях области допустимых значений функции, составляет множество всех точек графика заданной функции.

***Пример* 5.9.** Построить график функции $y=\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right|+\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)$.

Решение. Преобразуем подмодульное выражение: $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-4}{2x}$. Теперь приравняем к нулю числитель и знаменатель полученного выражения:

$$x^2-4=0 \qquad\qquad 2x=0$$
$$x=\pm 2 \qquad\qquad x=0$$

Нарисуем строго друг под другом числовые прямые и покажем на них динамику смены знака числителем и знаменателем, тогда можно будет определить, где и как меняет знак все подмодульное выражение (рис. 5.13).

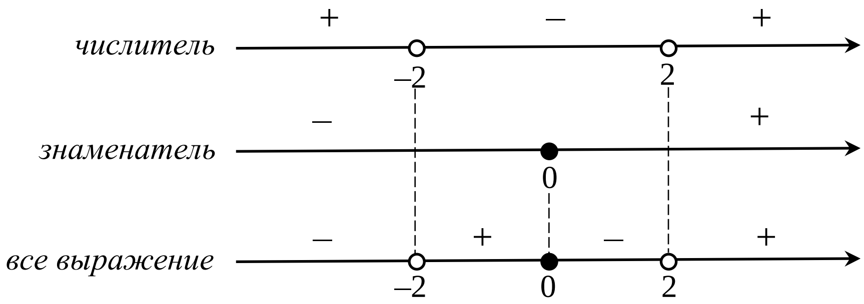


Рис. 5.13. Определение знаков подмодульного выражения

На луче $(-\infty;\,-2]$ раскроем модуль с отрицательным знаком, на интервале $(-2;\,0)$ – отрицательным, на полуинтервале $(0;\,2]$ вновь с отрицательным, наконец, на луче $(2;\,+\infty)$ – также с положительным. Тогда на первом и третьем промежутках получим функцию $y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right|+\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{x}$. На втором и четвертом промежутках – функцию $y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right|+\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=\frac{x}{2}$. График функции строим на указанных интервалах (рис. 5.14).

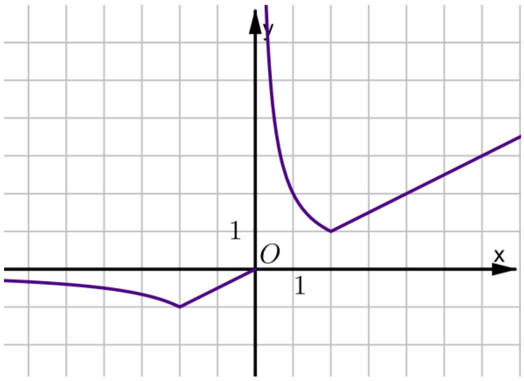


Рис. 5.14. График функции $y=\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right|+\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)$

В случае, когда каждое выражение $f_i(x)$ в (5.1) имеет вид $kx+b$, функция является кусочно-линейной и её графиком является ломаная с бесконечными крайними звеньями. Для построения графика рационально использовать *метод вершин*. Суть метода состоит в следующем:

а) найти нули каждого подмодульного выражения: $x_1, x_2 \ldots x_n$;

б) составить таблицу, в которой кроме найденных значений записывают по одному целому числу справа и слева от этих значений: *с абциссами меньшей наименьшего из этих корней и большей наибольшего из корней*;

в) найти соответствующие значения функции:

x	a	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	b
y						

в) нанести эти точки на координатную плоскость и соединить последовательно.

Рассмотрим на примерах применение этого метода.

***Пример* 5.10.** Построить график функции $f(x)=|x-1|$.

Решение. Приравнивая к нулю подмодульное выражение, получаем $x=1$. Вычисляем значение функции еще в двух точках с целыми координатами 0 и 2 (меньше и больше 1) и получаем график, состоящий из двух лучей (рис. 5.15).

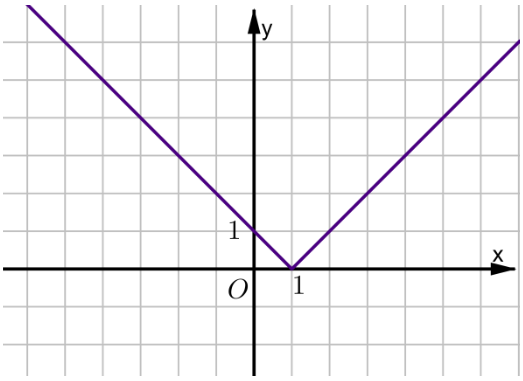


Рис. 5.15. График функции $f(x)=|x-1|$

***Пример* 5.11.** Построить график функции $f(x)=|x-1|+|x-2|$.

Решение. Приравнивая к нулю подмодульные выражения, получаем $x=1$ и $x=2$. Вычисляем значение функции еще в двух точках с целыми координатами 0 и 3 (меньше 1 и больше 2) и получаем график, состоящий из отрезка и двух лучей (рис. 5.16).

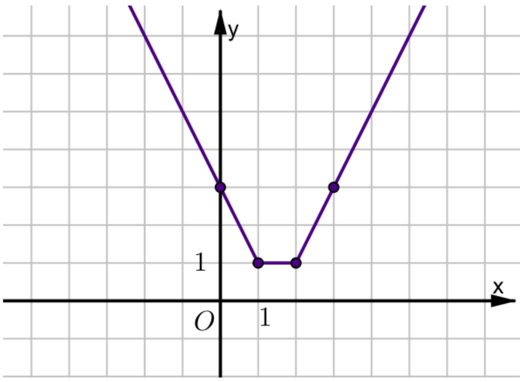


Рис. 5.16. График функции $f(x)=|x-1|+|x-2|$

***Пример* 5.12.** Построить график функции $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$.

Решение. Для построения графика вычислим значения функции в точках 1, 2, 3, 0 и 4 (меньше 1 и больше 3) (рис. 5.17).

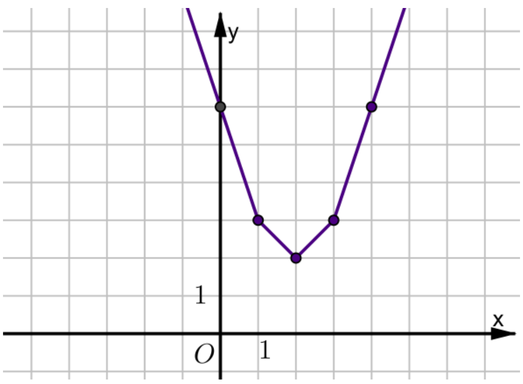


Рис. 5.17. График функции $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$

***Пример* 5.13.** Построить график функции $f(x) = |x - 1| - |x - 2|$.

Решение. График разности строится аналогично графику суммы, то есть по точкам 1, 2, 0 и 3 (рис. 5.18).

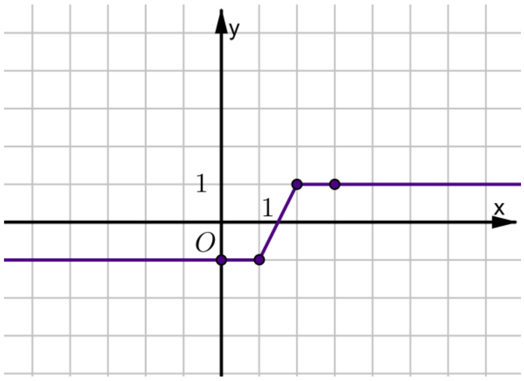


Рис. 5.18. График функции $f(x) = |x - 1| - |x - 2|$

5.2. Графическое решение уравнений, неравенств и систем, содержащих переменную под знаком модуля

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и/или $g(x)$ – выражения, содержащие переменную под знаком модуля.

Идея графического метода решения данного уравнения состоит в следующем: уравнение рассматривается как равенство двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а нахождение корней есть нахождение абсцисс точек пересечения их графиков. Этот метод позволяет определить количество корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

***Пример* 5.14.** Решить уравнение $|x+3| = |x-5|$.

Решение. Построим графики левой и правой частей уравнения и найдем точку пересечения графиков. Абсцисса точки пересечения и является корнем уравнения (рис. 5.19).

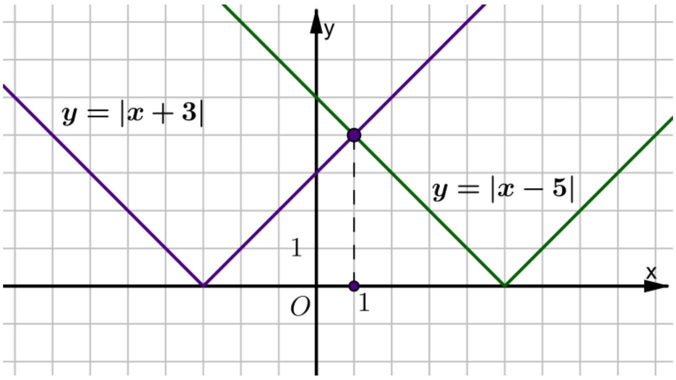


Рис. 5.19. Графическое решение уравнения $|x+3| = |x-5|$

Ответ: 1.

Пример **5.15.** Решить уравнение $|x| - 3|x-1| + 2|x-2| - |x+1| + x + 2 = 0$.

Решение. Построим график функции $y = |x| - 3|x-1| + 2|x-2| - |x+1| + x + 2$, используя *метод вершин*.

Находим нули подмодульных выражений: 0; 1; 2; – 1.

Заполним таблицу:

x	– 2	–1	0	1	2	3
y	0	2	2	4	0	0

Построим график функции и найдем абсциссы точек его пересечения с осью Ox (рис. 5.20).

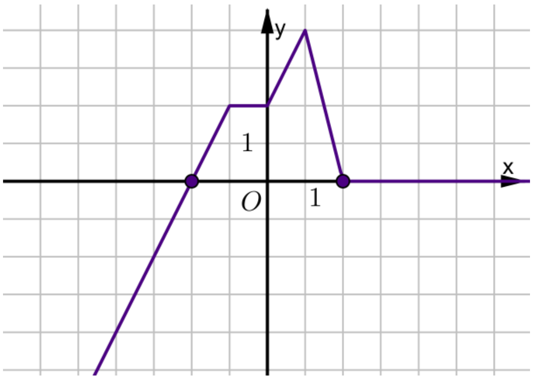


Рис. 5.20. Графическое решение уравнения $|x| - 3|x-1| + 2|x-2| - |x+1| + x + 2 = 0$

Ответ: $x = -2$, $x \geq 2$.

***Пример* 5.16.** Решить уравнение $|x|+|7-x|+2|x-2|=4$.

Решение. Построим графики функций левой и правой частей уравнения, то есть графики функций $y=|x|+|7-x|+2|x-2|$ и $y=4$ (рис. 5.21).

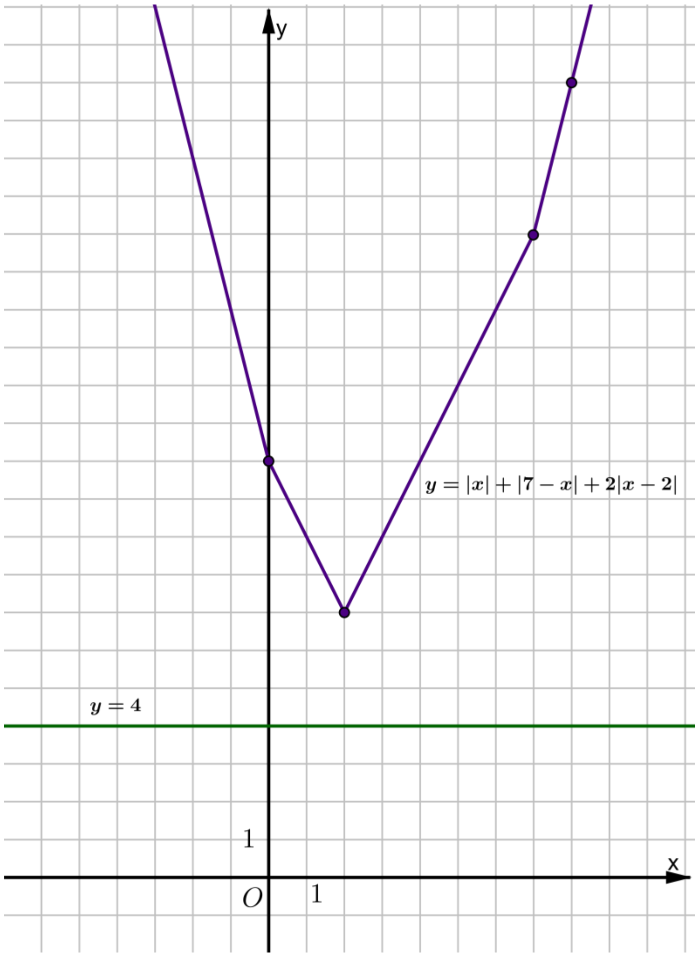


Рис. 5.21. Графическое решение уравнения $|x|+|7-x|+2|x-2|=4$

Так как графики не имеют точек пересечения, то уравнение решений не имеет.

Ответ: корней нет.

***Пример* 5.17.** Решить уравнение $|5-|x||=3$.

Решение. Строим график функции $y=5-|x|$. Затем, используя алгоритм построения графика $y=|f(x)|$, строим $y=|5-|x||$. По графику находим абсциссы точек, у которых $y = 3$ (рис. 5.22).

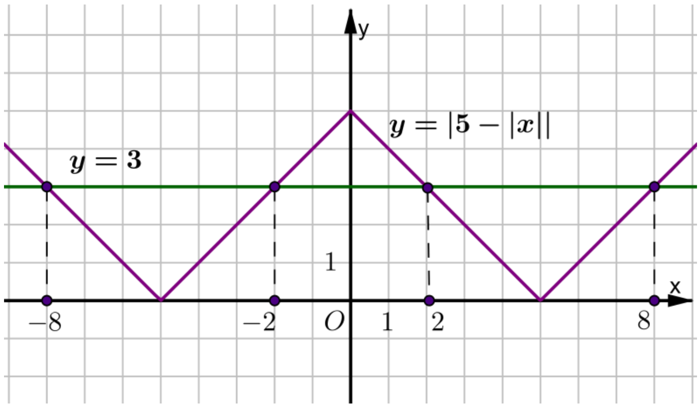


Рис. 5.22. Графическое решение уравнения $\left|5-|x|\right|=3$

Ответ: – 8, – 2, 2, 8.

Для решения неравенства $f(x) < g(x)$ графическим методом необходимо построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в одной системе координат и найти абсциссы точек, для которых график функции $y = g(x)$ находится выше графика функции $y = f(x)$. На рисунке 5.23 видно, что этим множеством является объединение промежутков $[a; x_1) \cup (x_2; x_3)$.

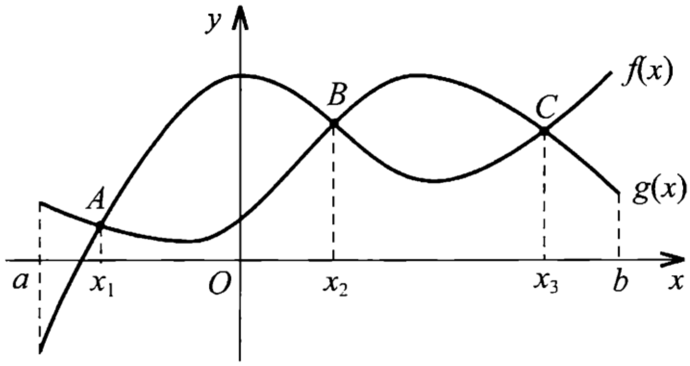


Рис. 5.23. Графическое решение неравенства $f(x) < g(x)$

***Пример* 5.18**. Решить неравенство $x-1<\left|(x-2)^2-1\right|$.

Решение. Строим графики функций, соответствующих левой и правой частям неравенств: $y = x-1$ и $y=\left|(x-2)^2-1\right|$. Находим точки пересечения графиков. В ответе указываем те значения x, при которых график первой функции расположен ниже графика второй функции (рис. 5.24).

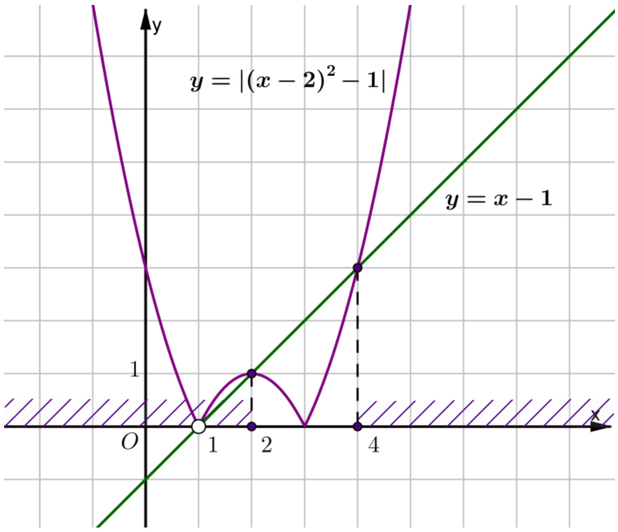


Рис. 5.24. Графическое решение неравенства $x - 1 < \left|(x-2)^2 - 1\right|$

Ответ: $(-\infty;1) \cup (1;2) \cup (4;\infty)$.

***Пример* 5.19**. Решить неравенство $\left|\dfrac{4}{|x|} - 2\right| \geq 1$.

Решение. Допустимые значения переменной: $x \neq 0$. Строим график левой части неравенства в такой последовательности:

а) $y = \dfrac{4}{x}$ при $x > 0$;

б) $y = \dfrac{4}{|x|}$ – симметрия относительно оси Oy;

в) $y = \dfrac{4}{|x|} - 2$ – смещение вдоль оси Oy на 2 единицы вниз;

г) $y = \left|\dfrac{4}{|x|} - 2\right|$ – симметрия относительно оси Ox.

Строим прямую $y = 1$ и находим точки пересечения графика левой части с прямой (рис. 5.25). Их четыре, абсциссы двух из которых находятся легко, x_1 и x_4, а две другие, x_2 и x_3, вычисляются. Так как функция $y = \left|\dfrac{4}{|x|} - 2\right|$ четная, то достаточно решить уравнение: $\frac{4}{x}-2=1$, $\frac{4}{x}=3$, $x=\frac{4}{3}$. Тогда $x_2=-\frac{4}{3}$ и $x_3=\frac{4}{3}$.

Используя построенный график, укажем значения x, которые удовлетворяют заданному неравенству.

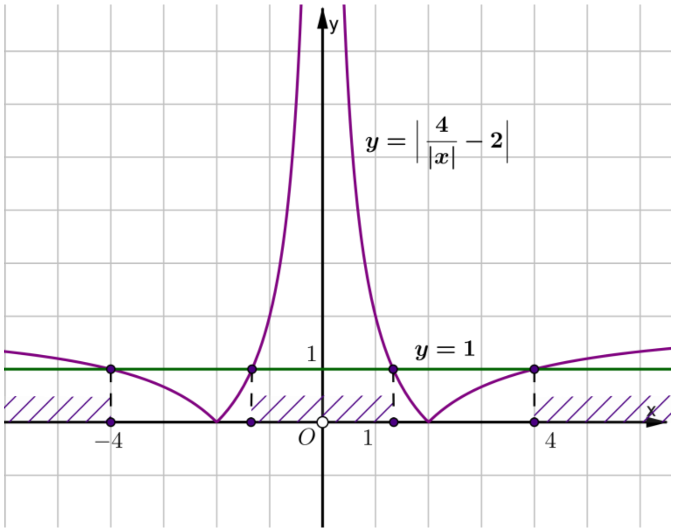


Рис. 5.25. Графическое решение неравенства $\left|\frac{4}{|x|}-2\right|\geq 1$

Ответ. $(-\infty;-4]\cup\left[-\frac{4}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{4}{3}\right]\cup[4;\infty)$.

***Пример* 5.20.** Решить неравенство $21x+3|2x+1|+7>4|3x-2|+2|x-1|$.

Решение. Преобразуем неравенство $21x+7>4|3x-2|+2|x-1|-3|2x+1|$ и построим графики функций левой и правой частей. Для построения графика правой части будем использовать метод вершин. Для этого заполним таблицу значений функции и соединим точки (рис. 5.26).

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2
y	21	17	$-6\frac{1}{3}$	-5	3

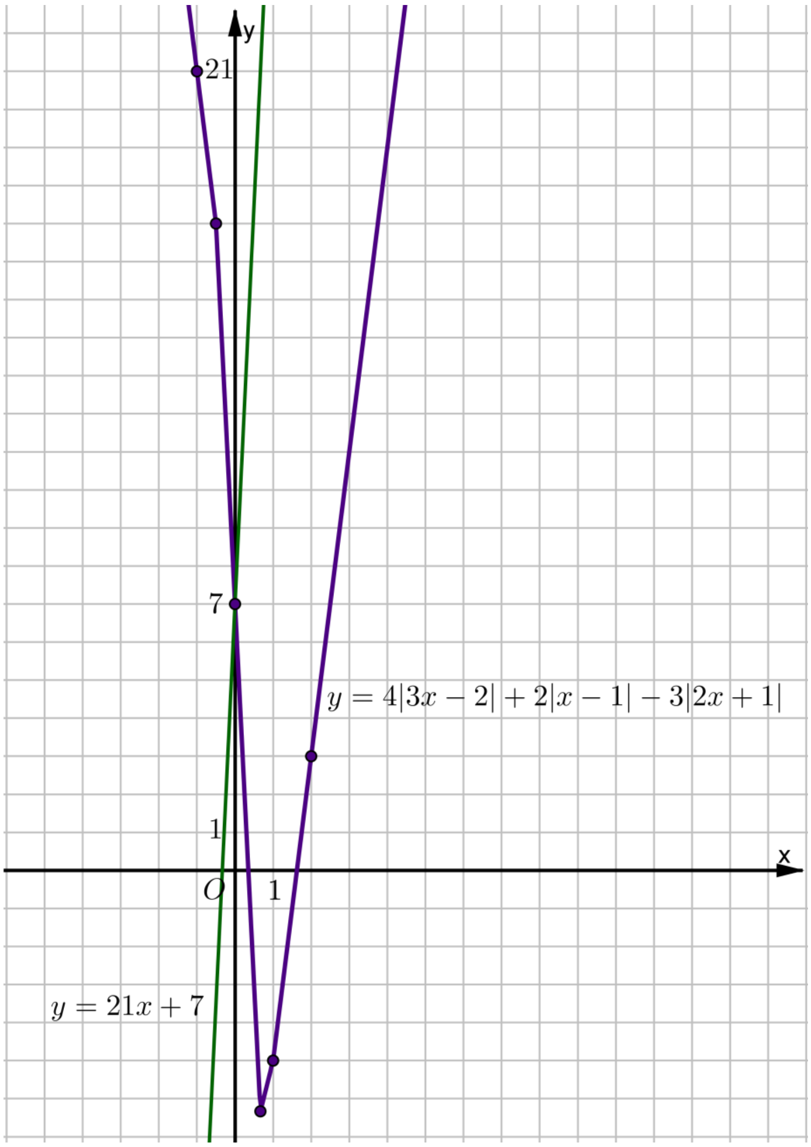


Рис. 5.26. Графическое решение неравенства $21x + 3|2x + 1| + 7 > 4|3x - 2| + 2|x - 1|$

Решением являются абсциссы точек, для которых график функции $y = 21x + 7$ находится выше графика функции $y = 4|3x - 2| + 2|x - 1| - 3|2x + 1|$.

Ответ: $[0; +\infty)$.

Аналогичным образом решаются графически системы неравенств.

***Пример* 5.21.** Решить систему неравенств: $\begin{cases} |x+1| < 2, \\ |x-1| < 3. \end{cases}$

Решение. В одной координатной плоскости построим графики функций $y = |x+1|$, $y = |x-1|$, $y = 2$, $y = 3$ (рис. 5.27). На рисунке видно, что первое неравенство системы выполняется при $-3 < x < 1$, а второе неравенство – при $-2 < x < 4$. Общая часть этих интервалов: $-2 < x < 1$.

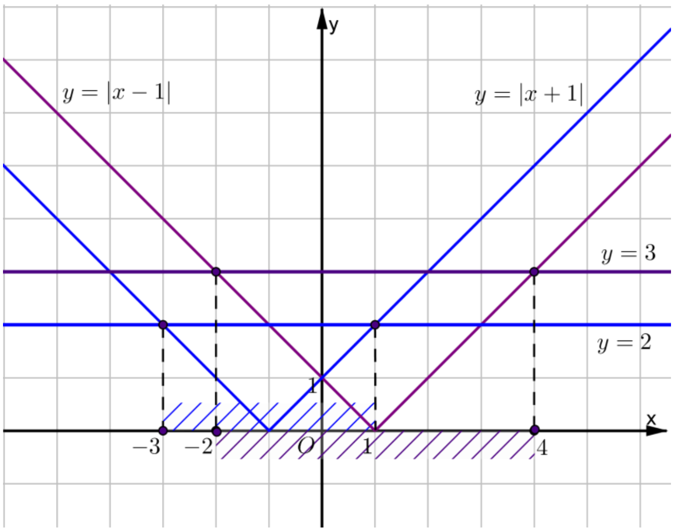


Рис. 5.27. Графическое решение системы неравенств

Ответ: $(-2;\ 1)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/display?v=p8jhskp6520

5.3. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Построить график функции

1.1.

а) $y = |x-1| + 3$; **б)** $y = |2x+4| - 1$.

1.2.

а) $y = ||x| - 5|$; **б)** $y = -||3-x| + 2| + 4$.

1.3.

а) $y = |x-1| + |x-2|$; **б)** $y = |x-1| - |x-2|$.

1.4.

а) $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$; **б)** $y = |x-1| + |x+2| - |x-3|$.

1.5.

а) $y = \left|x^2 - 6x + 5\right|;$ **б)** $y = |x|^2 - 6|x| + 5;$

в) $y = \left|x^2 - 6|x| + 5\right|;$ **г)** $y = \left|\left|x^2 - 6x\right| + 5\right|.$

1.6.* $y = \left|\,\left|\,2 - |\,x\,| + 3\right|\,\right|.$

1.7.* $y = \left|\left|\dfrac{2}{|x|} - 2\right| - 1\right|.$

Задание 2. Решить графически уравнения:

2.1.

а) $x^2 - 6x + 8 = -|x - 4|;$ **б)** $x^2 + 4x + |x + 3| + 3 = 0.$

2.2.

а) $\left|x - x^2 - 1\right| = \left|2x - 3 - x^2\right|;$ **б)** $\left|3x^2 - 6x - 1\right| = 2|3 - x|.$

2.3.

а) $x^2 + 2x + 2|x + 1| = 7;$ **б)** $4x^2 - 12x - 5|2x - 3| + 15 = 0.$

2.4.

а) $|2x - 4| - |x - 1| + |x + 2| = 3;$ **б)** $|x - 1| - 2|x + 3| + x + 7 = 0.$

2.5.*

а) $\left||x - 2| - 5\right| = 3;$ **б)** $\left||5x - 3| + 3\right| = 4.$

Задание 3. Найти графическим методом количество корней уравнения:

3.1.

а) $\left||x - 4| - 2\right| = 5;$ **б)** $\left|\left||x + 1| - 3\right| - 5\right| = 2.$

3.2.

а) $\left|3|x| - 5\right| = -2x - 2;$ **б)** $\left||5x - 3| - 3\right| = 3x - 1.$

3.3.* $\left|\left||3x - 3| - 2\right| - 7\right| = x + 5.$

Задание 4. Решить графически неравенства:

4.1.

а) $|x - 1| \le |2x + 1|;$ **б)** $|2x - 1| < |3x + 1|.$

4.2.

а) $\left|x^2+5x\right|<6;$ **б)** $\left|x^2-2x\right|\geq 8.$

4.3.

а) $\left|7-x\right|\leq x-7;$ **б)** $\left|x^2+6x+8\right|\leq -x^2-6x-8.$

4.4.* $\left|x-2\right|-\left|x-3\right|\geq\left|x-4\right|.$

Задание 5. Найдите графическим методом наибольшее целое решение неравенства:

5.1. $9x^2-\left|x-3\right|\geq 9x-2.$

5.2.* $\left|\left|x-1\right|-5\right|>3-2x.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барвенов, С. А. Математика: тренинг решения задач, используемых на централизованном тестировании / С. А. Барвенов, Т. П. Бахтина. – 2-е изд., доп. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 400 с.
2. Вавилов, В. В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: справочное пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.
3. Голубев, В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: Илекса, 2007. – 252 с.
4. Горнштейн, П. И. Экзамен по математике и его подводные рифы / П. И. Горнштейн, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. – 236 с.
5. Дорофеев, Г. В. Математика для поступающих в вузы: пособие / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – 4-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2001. – 672 с.
6. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Высший балл / сост. Т. М. Ерина. – М.: Экзамен, 2017. – 350 с. (Серия «ЕГЭ. Высший балл»)
7. Зеленский, А. С. Решение уравнений и неравенств с модулем / А. С. Зеленский, И. И. Панфилов. – М.: Научно-технический центр «Университетский»: УНИВЕР-ПРЕСС, 2009. – 112 с. (Серия «Математика: перезагрузка»)
8. Колесникова, С. И. «Поиграем» с равносильными переходами в уравнениях и неравенствах с модулями / С. И. Колесникова // Потенциал. Математика, физика, информатика. – 2010. – №08 (68). – С. 22-30.
9. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
10. Математика: Модуль №2 для 10 класса. Учебно-методическая часть / сост. Т. А. Осетрова. – Красноярск: Красноярский гос. ун-т, 2006. – 41 с.

11. Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и к другим формам выпускного и вступительного экзаменов / сост. Г. И. Ковалева, Т. И. Бузулина, О. Л. Безрукова, Ю. А. Розка. – Волгоград: Учитель, 2007. – 494 с.
12. Мерзляк, А. Г. Алгебраический тренажер: пособие для школьников и абитуриентов / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: Илекса, 2007. – 320 с.
13. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: в 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 6-е изд., стереотип. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.
14. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: в 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 4-е изд., стереотип. – М.: Мнемозина, 2010. – 287 с.
15. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А. Г. Мордкович и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. – 5-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2011. – 264 с.
16. Олехник, С. Н. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. – М.: Факториал, 1997. – 219 с.
17. Райхмист, Р. Б. Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в вузы (с решениями и ответами): учеб. пособие. – М.: Московский лицей, 2007. – 304 с.
18. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). Книга 1. Алгебра / под ред. М. И. Сканави. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Оникс, 1992. – 527 с.

19. Севрюков, П. Ф. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения: учеб.-метод. пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. – М.: Илекса, Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2005. – 112 с. (Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»).
20. Степанова, Т. С. Математика. Весь школьный курс в таблицах. – 7-е изд. – Минск: Современная школа: Кузьма, 2010. – 304 с.
21. Черкасов, О. Ю. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену / О. Ю. Черкасов, А. Г. Якушев. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 432 с.
22. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.
23. Элементарная математика. Рациональные уравнения и неравенства / А. В. Фирер, Е. Н. Яковлева, А. П. Елисова, Т. В. Захарова; отв. Ред. Н. К. Игнатьева. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2019. – 146 с.
24. Яковлев, И. В. Уравнения с модулем [Электронный ресурс] / И. В. Яковлев // Материалы по математике. MathUs.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://docplayer.ru/27596288-I-v-yakovlev-materialy-po-matematike-mathus-ru-uravneniya-s-modulem.html (дата обращения: 10.06.2020)
25. Яковлев, И. В. Уравнения и неравенства с модулем [Электронный ресурс] / И. В. Яковлев, А. Г. Малкова // Материалы по математике. MathUs.ru. – Режим доступа: https://docplayer.ru/27596962-Uravneniya-i-neravenstva-s-modulem.html (дата обращения: 10.06.2020)
26. Яковлев, И. В. Неравенства с модулем [Электронный ресурс] / И. В. Яковлев // Материалы по математике. MathUs.ru. – Режим доступа: https://mathus.ru/math/modulner.pdf (дата обращения: 10.06.2020)

ПРИЛОЖЕНИЕ

Итоговый тест

1. Корни уравнения $|3-4x|=2$ принадлежат промежутку

а) $[-2;0)$;

б) $\left[0;\frac{5}{4}\right)$;

в) $\left[\frac{5}{4};2\right)$;

г) $\left(\frac{1}{5};2\right)$.

2. Сумма корней уравнения $|x-4|=x^2-5x+2$ принадлежит промежутку

а) $[2;3)$;

б) $[3;4)$;

в) $[4;5)$;

г) $(5;6)$.

3. Уравнение $|3x-1|-|3x-6|+4x=10$ имеет ровно

а) один корень;

б) два корня;

в) три корня;

г) четыре корня.

4. Уравнение $|4x-5|=2x-5$ имеет

а) один корень;

б) два корня;

в) три корня;

г) не имеет корней.

5. Сумма корней уравнения $2x^2-5|x|-3=0$ равна

а) 0;

б) 0,5;

в) 2,5;

г) 3.

6. Корни уравнения $|x+2|+|x+5|=3$ принадлежат множеству

а) $(-5;0)$;

б) $(-5;-2)$;

в) $[-5;-2]$;

г) $\{-5\}\cup\{-2\}$.

7. Уравнение $|x-2|-|x+3|+|x-1|=4$ имеет

а) один корень;

б) два корня;

в) три корня;

г) более трех корней.

8. Сумма корней уравнения $(x-5)^2=|x-5|+6$ равна

а) 2;

б) 6;

в) 8;

г) 10.

9. Уравнение $|2|x|-8|=-2x-2$ имеет ровно

а) ноль корней;

б) один корень;

в) два корня;

г) три корня.

10. Сумма корней уравнения $|||x-1|-2|-3|=2$ равна

а) – 6;

б) – 2;

в) 2;

г) 6.

11. Найти отрицательный корень уравнения $|x^3 + x + 1| = |x^2 + 3x - 1|$.

12. Указать промежуток, которому принадлежит отрицательный корень уравнения $\dfrac{1-3x}{4-|x-2|} = 1$:

а) $(-4; -3)$;

б) $(-3; -2)$;

в) $(-2; -1)$;

г) $(-1; 0)$.

13. Указать промежуток, которому принадлежит положительный корень уравнения $|x^2 - 4|x+1| + 3| = x$:

а) $[3; 4)$;

б) $[4; 5)$;

в) $[5; 6)$;

г) $[6; 10]$.

14. Решить уравнение $|x^2 - 4| - |x^2 - 16| = 6$.

15. Решить уравнение $|x^3 - 1| + |2x^2 + x - 3| = 0$.

16. Решить неравенство $|x+2| > -3$:

а) $[-5; -2]$;

б) $(-\infty; -2)$;

в) $[-5; +\infty)$;

г) $(-\infty; +\infty)$.

17. Решить неравенство $|x+2| < -x^2 + x + 6$:

а) $[-2; 2]$;

б) $(-2; 2)$;

в) $[-2; 4)$;

г) $(-2; +\infty)$.

18. Указать количество промежутков, составляющих решение неравенства $\left|-x^2 - 2x + 8\right| > 3x$:

а) 1;

б) 2;

в) 3;

г) 4.

19. Решить неравенство $|x+2| - |x-8| < 2$:

а) $(-\infty; -2]$;

б) $(-\infty; -2] \cup [2; 4)$;

в) $[-\infty; 4)$;

г) $[-2; 4)$.

20. Решить неравенство $\dfrac{|x-1|}{3x^2 - x - 2} \geq 1$:

а) $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right]$;

б) $\left[-1; -\dfrac{2}{3}\right)$;

в) $(-\infty; -1] \cup (-\dfrac{2}{3}; 1)$;

г) $(-\infty; -1] \cup (-\dfrac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$.

21. Решить неравенство $\left|\dfrac{-3}{x+5}\right| < \left|\dfrac{5}{x-2}\right|$.

22. Решить неравенство $\dfrac{(|x+4| - |x-1|) \cdot (|x+3| - |x|)}{|x-6| - |x+1|} \leq 0$.

23. Указать количество промежутков, составляющих решение неравенства $\left||x| - 3\right| \leq 2 - x$.

24. Указать количество промежутков, составляющих решение неравенства $\left|2x^2-4x-6\right|+\left|x^2+x-12\right|>\left|x^2-5x+6\right|$.

25. Указать количество целочисленных решений неравенства $\left|\left|x^3+x-2\right|-4\right|\le x^3-x+7$.

26. Решить систему уравнений $\begin{cases}7-y=|x|,\\ x+4y=8.\end{cases}$

27. Найти сумму $x+y$ для решения (x;y) системы уравнений $\begin{cases}|x-2y|=4,\\ |x|-|y|=6.\end{cases}$

28. Указать количество решений системы уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ |x+y|+|y-x|=4.\end{cases}$

а) 8;

б) 6;

в) 4;

г) 2.

29. Указать количество целочисленных решений системы уравнений

$$\begin{cases}\left|\left|2-|x+8|\right|-3\right|=1,\\ \left|x^3+5x^2+2x-8\right|+\left|x^3+14x^2+56x+64\right|=0.\end{cases}$$

а) 4;

б) 3;

в) 2;

г) 1.

30. Решить систему уравнений $\begin{cases}|2-x|+|3+x|+|4-x|=12,\\ \dfrac{2x-1}{\left|x^2-4\right|-5}=\dfrac{9}{16}.\end{cases}$

31. Указать количество целочисленных решений системы неравенств $\begin{cases} 3|x| - 6 \le 0, \\ 3|x| - 4 \ge 0. \end{cases}$

32. Указать количество целочисленных решений системы неравенств $\begin{cases} |x - 6| + 5x \ge x^2 + 9, \\ \left|\left|\left||x - 1| + 2\right| - 1\right| + 3\right| < 6. \end{cases}$

33. Решить систему неравенств $\begin{cases} \left|x^2 - |x| + 1\right| \le 10 - |x|, \\ x^2 - 4x < 0. \end{cases}$

34. Решить систему неравенств $\begin{cases} \left|x^2 + x - 5\right| - 1 \le 2x^2 - 7x + 1, \\ |x| - |x - 7| > 2. \end{cases}$

35. Решить систему неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{1}{4x - 1}\right| \le \left|\dfrac{5}{2 - x}\right|, \\ x^2 + 6|x| - 7 \ge 0. \end{cases}$

а) $(-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$;

б) $(-\infty; -1] \cup \left(0; \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$;

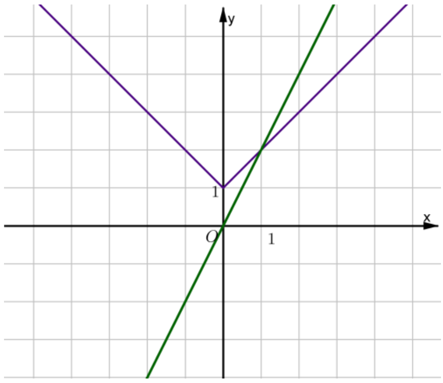
в) $\left[-1; -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{3}{5}; 2\right) \cup (2; +\infty)$;

г) $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

36. Указать количество промежутков в решении совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} \left|x^2 - 4|x| + 3\right| < 1, \\ |2x - 1| > \dfrac{x}{2} + 2. \end{array}\right.$

37. Указать количество целочисленных решений совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} \left|x^3 - x\right| \le 1 - x, \\ \left|x^2 + x + 3\right| \le 4x + 1. \end{array}\right.$

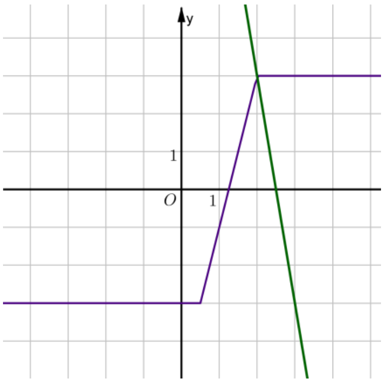
38. На рисунке изображено графическое решение уравнения:



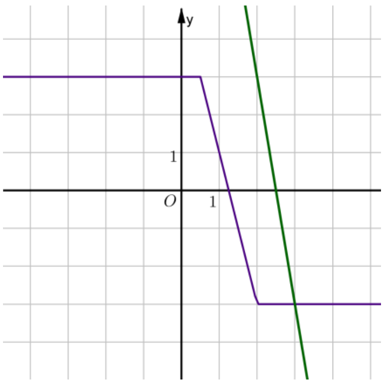
а) $|x|+1=2x$; б) $|2x|+1=x$; в) $|x+1|=2x$; г) $|x|+1=-2x$.

39. На каком рисунке представлено графическое решение уравнения $|2x-1|-|2x-4|=15-6x$?

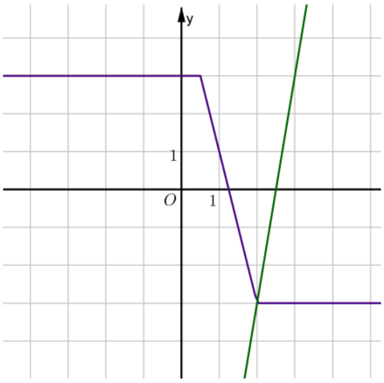
а)



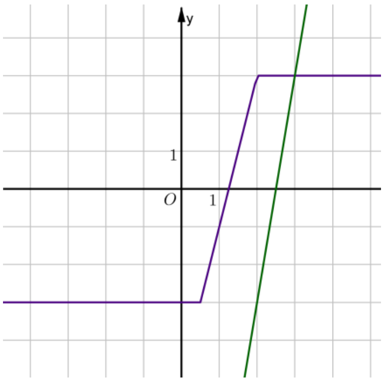
б)



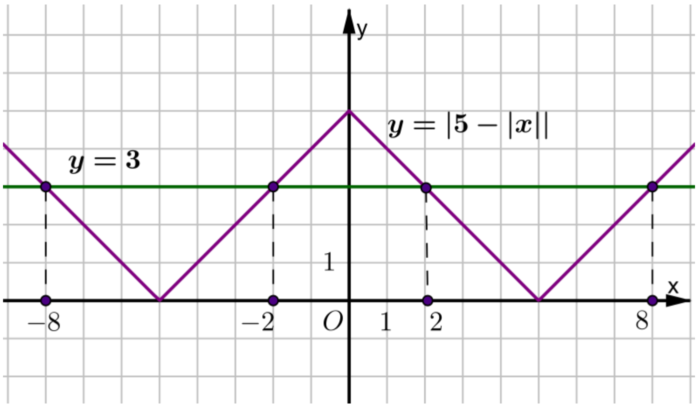
в)



г)



40. Найдите наибольшее целое решение неравенства $|5-|x||<3$, графическая модель которого изображена на рисунке ниже.



Ключ к тесту

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
г	в	а	г	а	в	б	г
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
б	г	$-\sqrt{2}$	г	а	$\pm\sqrt{13}$	1	г
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
б	в	в	б	$(-5;2)\cup(2;+\infty)$	$\left\{-\frac{3}{2}\right\}\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$	1	3

25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
3	$\left(6\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right), (-4;3)$	10	а	в	5	2	2
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
$(0;3]$	$[7;+\infty)$	а	3	4	а	а	7

Учебное издание

Фирер Анна Владимировна,

Яковлева Елена Николаевна,

Елисова Анна Петровна,

Захарова Татьяна Вячеславовна

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА.
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Редактор И.А. Вейсиг

Компьютерная верстка авторов

Подписано в печать	01.07.2020.	Печать плоская
Формат 60x84/16		Бумага офсетная
Усл. печ. л. 4,6	Тираж 100 экз.	Заказ

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а, Тел. (391) 206-26-67;
http://bik.sfu-kras.ru E-mail publishing_house@sfu-kras.ru

Отпечатано в типографии ИП Азарова Н. Н.
(«ЛИТЕРА-принт»), Красноярск, ул. Гладкова, 6,
т. 8-902-924-15-77