Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА.
РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Рекомендовано УМО РАЕ по
классическому университетскому и
техническому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по
направлениям подготовки:
44.03.01 Педагогическое образование,
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
(Протокол № 765 от 13.08.2019)

Красноярск-Лесосибирск 2019

УДК 372.851
ББК 22.141я73+22.191я73
Э456

Ответственный редактор: Н.К.Игнатьева

Рецензенты:
Т.Ю. Войтенко, канд. физ.-мат. наук, доцент (Лесосибирский филиал ФГБОУ ВО «Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева»);
С.С. Ахтамова, канд. пед. наук, доцент (Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета)

Э456 Элементарная математика. Рациональные уравнения и неравенства / А.В.Фирер, Е.Н.Яковлева, А.П.Елисова, Т.В. Захарова; отв. ред. Н.К. Игнатьева. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2019. – 146с.

ISBN 978-5-7638-4173-2

В учебном пособии систематизирована информация о способах и приемах решения рациональных уравнений, неравенств и их систем. Представлены задания для самостоятельной работы, в том числе интерактивные задания, созданные в LearningApps.org, а также примерный тест для проверки знаний и умений.
Приведенные материалы способствуют формированию у студентов компетенций, определяемых ФГОС ВО.
Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования, где предусмотрено изучение курса «Математика», а также для обучающихся по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование.

ISBN 978-5-7638-4173-2

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии представлены материалы, направленные на формирование профессиональных компетенций при подготовке бакалавров в соответствии с ФГОС ВО направления44.03.01 Педагогическое образование.

Целью данного учебного пособия является применение системного подхода к организации самостоятельной познавательной деятельности студентов в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта и современной парадигмой образования.

Задачи:

- раскрыть основные теоретические разделы курса «Элементарная математика. Рациональные уравнения и неравенства»;
- сформировать у студентов навыки самостоятельной познавательной деятельности, необходимые для их дальнейшего самообразования;
- развить мотивацию самостоятельности познавательной деятельности как потребности в получении новых знаний;
- раскрыть творческие способности студентов.

Структура пособия определяется его содержанием и дидактическими задачами. Каждый раздел посвящен определенным темам, снабжен интерактивными вопросами для самоконтроля, заданиями, упражнениями. Это позволяет создать единую логику изложения каждой темы, что дает возможность формировать у студентов умение строить относительно логичные и последовательные частные суждения на основе общего подхода.

Вопросы и задания различны по уровню сложности. Часть их связана с репродуктивным усвоением и переработкой информации. Большинство из них нацелено на аналитическую работу студентов на основе активизации многих интеллектуальных функций: сравнения и сопоставления, абстрагирования и конкретизации, классифицирования и обобщения и др. Так, например, метод конкретной ситуации развивает способность анализировать и самостоятельно формулировать познавательные задачи.

Выполнение конкретного задания при знакомстве студента с новым материалом помогает глубже понять изучаемый материал, выделить познавательные задачи и цели учебной деятельности.

Практические задания являются связующим звеном между теорией и практикой. На практических занятиях студенты углубляют и закрепляют теоретические знания, учатся применять адекватные способы действия, ведущие к достижению результата, вырабатывают аналитические умения, приобретают навыки, необходимые для выполнения контрольных и курсовых работ.

1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1.1. Краткие теоретические сведения о многочленах

Традиционно считается, что данная тема наиболее хорошо усвоена школьниками, поскольку преобразованием алгебраических выражений они занимаются с седьмого класса и постоянно упражняются в этих действиях. Каждый школьник помнит, что алгебраические выражения, будь то числа или многочлены от одной или нескольких переменных, можно складывать, вычитать, перемножать, возводить в степень, разлагать на множители. Однако опыт показывает, что не все школьники легко узнают формулы сокращенного умножения, которые необходимо бывает применять при таких преобразованиях; не видят рациональные приемы разложения на множители многочлена, данного в уравнении, от которых подчас зависит его решение.

Вместе с тем, при решении многих алгебраических задач бывает необходимо разложить данный многочлен на множители. На этом тождественном преобразовании мы остановимся подробнее в данном параграфе.

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных приемов разложения многочленов на множители, напомним некоторые важные определения, известные из школьного курса математики.

Одночлен **–** произведение чисел, переменных и их натуральных степеней.

Примером одночлена, имеющего ***стандартный вид***, является одночлен $32x^3yz^2$, где коэффициент стоит на первом месте, а переменные расположены в алфавитном порядке.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней его буквенных множителей (переменных). Например, степень одночлена $5x^4y^3z^2$ равна 4+3+2=9. Если одночлен является ненулевым числом, то его степень считается равной нулю.

Многочлен – это алгебраическая сумма одночленов.

Для того чтобы привести многочлен к стандартному виду, необходимо привести подобные слагаемые (одночлены), а затем записать все его члены в стандартном виде. Например, $4xy \cdot y + (2x)^2 - z \cdot 6 + x^2 = 4xy^2 + 5x^2 - 6z$.

Степенью многочлена называется наибольшая степень одночлена, входящего в многочлен. Например, многочлен $3x^3y + 5x^4y - xy + 10$ – многочлен пятой степени.

Особо интересны для математики и ее приложений многочлены от одной переменной.

Стандартный вид многочлена **(*полинома*)** степени n $(n \in N_0)$ относительно переменной величины x представляет собой всякое выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in R$ и $a_n \neq 0$.

Если $a_n = 1$, то многочлен называют ***приведенным***, если же $a_n \neq 1$, то – ***неприведенным***. Числа $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n – ***старший*** коэффициент, a_0 – ***свободный член***. Число n – показатель степени старшего члена $a_n x^n$ называют ***степенью многочлена***. Например, многочленом относительно переменной x является выражение $4x^8 + 3x^2 - 1$. Его степень $n = 8$; старший коэффициент равен 4; свободный член – число -1.

Два многочлена называются ***тождественно равными***, если их числовые значения совпадают при всех значениях x. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равны тогда и только тогда, когда они совпадают, т.е. коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов одинаковы.

Число x_0 называется ***корнем*** многочлена $f(x)$, если

$$f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0 = 0.$$

Например, $x = -1$ – корень многочлена $f(x) = 3x^7 + 2x^2 + 1$, так как $f(-1) = 3 \cdot (-1)^7 + 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 0$.

Квадратный трехчлен – это многочлен второй степени:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если x_1, x_2 – корни $f(x)$, то $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется ***дискриминантом*** соответствующего многочлена $f(x)$. Дискриминант принято обозначать большой буквой D.

***Пример* 1.1.** Найти корни многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Решение. Имеем

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = 1,\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3}.$$

Отметим, что если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет действительных корней. Если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет два равных корня и представляет собой полный квадрат.

***Пример* 1.2.** Найти корни многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 2{,}25$.

Решение. Имеем $x_1, x_2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2{,}25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 0}{2} = 1{,}5$. Таким образом, $f(x) = (x - 1{,}5)^2$.

В случае, когда корни квадратного трехчлена существуют, то имеет место соотношение $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, которое представляет собой разложение многочлена второй степени на множители. Например, корнями многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ являются $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $f(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot \left(x + \dfrac{1}{3}\right) = (x - 1) \cdot (3x + 1)$.

Если корни многочлена $ax^2 + bx + c$ – целые числа, то для их нахождения удобно пользоваться ***теоремой Виета***:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема Виета может быть полезна и для нахождения корней многочлена степени выше второй. В общем случае она формулируется следующим образом:

Если $x_1, x_2, ..., x_n$ – *действительные корни многочлена* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, *то*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2x_3 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

$$...$$

$$x_1x_2x_3 \cdot ... \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}.$$

***Пример* 1.3.** Найти все действительные корни многочлена $f(x) = x^3 - 7x + 6.$

Решение. Выпишем коэффициенты многочлена: $a_3 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -7, \quad a_0 = 6.$ По теореме Виета запишем: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 0,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{a_1}{a_3} = -7, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -6.$

Очевидно, произведение корней можно разложить на множители $-6 = -(1 \cdot 2 \cdot 3).$ Следовательно, можем предположить, что корнями является одна из троек чисел $-1, 2, 3$, или $1, -2, 3$, или $1, 2, -3$. Последняя тройка удовлетворяет всем уравнениям из теоремы Виета. Таким образом, корни многочлена – это числа $1, 2, -3$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/7534126

1.2. Разложение многочленов на множители

Разложить многочлен на множители – значит представить его в виде произведения одночленов и многочленов.

Многочлены, которые нельзя представить в виде произведения двух многочленов меньшей степени, отличных от констант, называются ***неприводимыми***. Другими словами, разложение многочлена на множители считается законченным, если все полученные множители неприводимы. Например, многочлены $x+1$ и x^2+2x+3 не допускают разложение на множестве действительных чисел, т.е. являются неприводимыми.

Среди многочленов от одной переменной (с действительными коэффициентами) неприводимы только:

1) многочлены первой степени, т.е. многочлены вида $ax+b,$ где x – переменная, коэффициенты $a, b \in R$;

2) многочлены второй степени, дискриминант которых меньше нуля, т. е. многочлены вида $ax^2+bx+c,$ где x – переменная, коэффициенты $a, b, c \in R,$ дискриминант $D=b^2-4ac<0.$

Таким образом, для любого многочлена

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

степени n с действительными коэффициентами справедливо разложение на множители вида

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}\cdot(x-c_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-c_m)^{k_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{r_s},$$

где c_1, c_2, c_m – действительные корни многочлена с кратностями k_1, k_2, k_m;

$$p_i^2-4q_i<0, \quad i=1,2,\ldots,s; \quad k_1+k_2+\ldots+k_m+2(r_1+r_2+\ldots+r_s)=n.$$

Это разложение называется ***каноническим разложением*** многочлена $f(x)$ на множестве действительных чисел. Например, для многочлена $f(x)=5x^2+9x-2$ каноническое разложение имеет вид

$f(x) = 5\left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot (x+2)$. Для многочлена $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ каноническое разложение имеет вид $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2+2)$.

Разложение на множители многочлена может быть осуществлено с помощью различных приемов. К ним можно отнести прием группировки слагаемых, вынесение общего множителя за скобки, замену переменной, применение формул сокращенного умножения, применение метода неопределенных коэффициентов, выделение полного квадрата, дополнение до известной формулы, использование теоремы Безу и схемы Горнера, позволяющие более быстро раскладывать многочлен на множители.

Рассмотрим каждый из перечисленных выше приемов на примерах.

Вынесение общего множителя за скобки

Это преобразование основано на распределительном законе умножения относительно сложения: $xz + yz = z \cdot (x+y)$.

Простейшим примером является случай, когда свободный член многочлена, зависящего от переменной x, равен нулю:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x.$$

Очевидно, что корнем такого многочлена является $x = 0$, то есть многочлен представим в виде $f(x) = x \cdot (a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1)$.

***Пример* 1.4.** Разложить на множители многочлены:

а) $f(x,y) = 5x^2 y - 80xy^2 - 15xy$;

б) $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - x$.

Решение. а) Вынесем общий множитель $5xy$ за скобки. Тогда получим каноническое разложение многочлена $f(x,y)$:

$$5xy \cdot (x - 16y - 3).$$

б) Очевидно, что $x_1 = 0$ является корнем многочлена $f(x)$, т.е.x можно вынести за скобки:

$$f(x)=x\cdot(4x^2+8x-1).$$

Найдем корни квадратного трехчлена $4x^2+8x-1$. Имеем

$$x_1=\frac{-8+\sqrt{D}}{2\cdot 4}=-1+\frac{\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{-8-\sqrt{D}}{2\cdot 4}=-1-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом,

$$f(x)=4x\cdot\left(x-\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)=4x\cdot\left(x+1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x+1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Способ группировки заключается в том, чтобы разбить слагаемые многочлена на группы, в каждой из которых можно вынести за скобки один и тот же множитель (если это возможно). Опорой здесь служат переместительный и сочетательный законы сложения, которые позволяют группировать члены многочлена любым способом.

***Пример* 1.5.** Разложить на множители многочлены:

а) $f(x)=x^3-3x^2+5x-15$;

б) $f(x,y,z)=xy\cdot(x+y)-yz\cdot(y+z)+xz\cdot(x-z)$.

Решение. а) Сгруппируем первое слагаемое со вторым, а третье – с четвертым, получим: $(x^3-3x^2)+(5x-15)=x^2\cdot(x-3)+5\cdot(x-3)$. Теперь двучлен $x-3$ как общий множитель можно вынести за скобки: $f(x)=(x-3)\cdot(x^2+5)$.

б) Заметим, что $x+y=y+z+x-z$. Тогда многочлен $f(x,y,z)$ перепишем в виде

$$xy\cdot((y+z)+(x-z))-yz\cdot(y+z)+xz\cdot(x-z)=$$
$$=xy\cdot(y+z)+xy\cdot(x-z)-yz\cdot(y+z)+xz\cdot(x-z).$$

Выполним далее группировку членов и вынесем общий множитель за скобки: $(y+z)\cdot(xy-yz)+(x-z)\cdot(xy+xz)=$

$$=y\cdot(y+z)\cdot(x-z)+x\cdot(x-z)\cdot(y+z)=(x+y)\cdot(x-z)\cdot(y+z).$$

Таким образом, $f(x,y,z)=(x+y)\cdot(x-z)\cdot(y+z)$.

Замечание. При всей видимой простоте группировки очень не просто выбрать слагаемые для ее проведения. Универсальных способов нет, поэтому для успешного результата иногда приходится экспериментировать.

Применение теоремы Безу и схемы Горнера

Разложение на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения, является одним из способов решения уравнений высших степеней.

Теорема* 1.1(*Безу*).Остаток от деления многочлена степени* $n>0$

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$$

на многочлен $x-\alpha \quad (\alpha \in R)$ *равен значению многочлена* $f(x)$ *при* $x=\alpha$, *т.е. равен числу*

$$f(\alpha)=a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_0.$$

Доказательство. Разделим многочлен $f(x)$ на $x-\alpha$. В частном получим многочлен степени $n-1$, который обозначим через $q(x)$, и некоторый остаток $r(x)$. Этот остаток является многочленом, степень которого меньше степени делителя $x-\alpha$, т.е. равна нулю. Поэтому $r(x) = r$ является числом. Итак,

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot q(x)+r.$$

Чтобы найти число r, положим в этом равенстве $x=\alpha$. Мы получим $f(\alpha)=r$.

Теорема Безу доказана.

Следствие из теоремы Безу. *Если число* α *– корень многочлена* $f(x)$, *то* $f(\alpha)=0$ *и, следовательно, этот многочлен без остатка делится на* $x-\alpha$, *т.е.*

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot q(x).$$

Таким образом, если известен хотя бы один корень уравнения степени n, то с помощью следствияиз теоремы Безу можно свести задачу к решению уравнения степени $n-1$, т. е., как говорят, понизить степень уравнения.

При этом понижение степени уравнения $f(x)=0$ в случае, когда известен его корень α, сводится к нахождению частного от деления $f(x)$ на $x-\alpha$.

***Пример* 1.6.** Разделить многочлен $f(x)=-4x^4-x+2x^2+1$ на многочлен $x+1$.

Решение. Заметим, что $x=-1$ является корнем многочлена $f(x)$. Тогда многочлен $f(x)$ разделится на многочлен $x+1$ нацело. Выполним деление в столбик:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,-4x^4+2x^2-x+1 & \overbrace{x+1}^{\text{делитель}} \\ \cline{2-2}
 & \underbrace{-4x^3+4x^2-2x+1}_{\text{частное}} \\
\underline{-4x^4-4x^3} & \\
-\,4x^3+2x^2 & \\
\underline{4x^3+4x^2} & \\
-\,-2x^2-x & \\
\underline{-2x^2-2x} & \\
-\,x+1 & \\
\underline{x+1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $f(x)=(-4x^3+4x^2-2x+1)\cdot(x+1)$.

Деление многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

на двучлен $x-\alpha$ удобно выполнять по ***схеме Горнера***. Обозначим неполное частное при делении $f(x)$ на $x-\alpha$ через $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0$, а остаток от деления – через r. Так как $f(x)=q(x)(x-\alpha)+r$, то имеет место тождество

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)(x-\alpha)+r.$$

Раскроем в правой части этого равенства скобки и сравним коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Получим, что

$r = a_0 + \alpha b_0$, $b_{n-1} = a_n$ и при $0 \le i \le n-2$ имеют место соотношения $b_i = a_{i+1} + \alpha b_{i+1}$.

Результаты вычисления коэффициентов b_i $(0 \le i \le n-1)$ многочлена $q(x)$ и остатка r удобно помещать в таблицу (схему Горнера):

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_{i+1}	a_i	...	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$	b_{n-3}	$\dots$	b_i	$b_{i-1} = a_i + \alpha b_i$	$\dots$	b_0	$r = f(\alpha)$

В первой строке этой таблицы записаны коэффициенты многочлена $f(x)$. Во второй строке получаются коэффициенты частного и остаток. Старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого. Если уже заполнено несколько клеток второй строки, то следующая пустая клетка заполняется так: берут стоящее над ней число первой строки и прибавляют к нему произведение α и предыдущего элемента второй строки. В последней клетке второй строки под свободным членом делимого получается остаток от деления.

Так как по теореме Безу $r = f(\alpha)$, то схема Горнера позволяет выяснить, является ли число α корнем многочлена $f(x)$. Во многих случаях вычисление по схеме Горнера удобнее, чем непосредственная подстановка числа α в многочлен $f(x)$.

На практике бывает достаточно сложно определить методом подбора, какое число необходимо проверить в качестве α, чтобы $f(x)=0$. В случае, когда среди корней многочлена есть целые или рациональные корни, то следующая Теорема и следствие из нее помогают сузить круг поиска.

***Теорема* 1.2**. *Пусть* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ *– многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число)* $\dfrac{p}{q}$ *является корнем многочлена* $f(x)$, *то:*

$$1)\ a_n \,\vdots\, q,$$
$$2)\ a_0 \,\vdots\, p.$$

Если коэффициент при старшей степени равен единице, то целые корни многочлена следует искать среди делителей свободного члена.

Следствие. *Пусть* $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ *– многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена* $f(x)$ *являются целыми делителями свободного члена* a_0.

Заметим, что Теорема 1.2 и следствие из нее *не указывают на существование целых корней – их может и не быть.*

***Пример* 1.7.** Разложить на множители многочлены:

а) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$;

б) $f(x) = 6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3$.

Решение. а) Согласно следствию из теоремы 2 множество $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ целых делителей свободного члена 6 может содержать корни данного многочлена. Непосредственная подстановка в уравнение $f(x) = 0$ показывает, что $x = 1$ является корнем многочлена $f(x)$. Разделим $f(x)$ на $x - 1$, пользуясь схемой Горнера:

	1	-2	-5	6
$\alpha = 1$	1	–1	–6	0

Следовательно, $f(x) = (x+1)\cdot(x^2 - x - 6)$.

Остается найти корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 6$. Имеем:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2, \\ x_2 = 3. \end{matrix}$$

Таким образом, $f(x) = (x+1)(x-3)(x+2)$.

б) По теореме 2 все рациональные корни многочлена находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 \vdots q$, $3 \vdots p$.

Делителями 3 являются числа $\pm 1; \pm 3$.

Делители 6: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

Тогда рациональные корни многочлена следует искать среди чисел вида $\dfrac{p}{q}$: $\pm 1; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{1}{3}; \pm\dfrac{1}{6}; \pm 3; \pm\dfrac{3}{2}$.

Заметим, что корнями могут быть лишь отрицательные числа. Поэтому по схеме Горнера проверяем числа $-1; -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{6}; -3; -\dfrac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
$\alpha=-1$	6	11	9	5	-2	не корень
$\alpha=-\dfrac{1}{2}$	6	14	13	$\dfrac{15}{2}$	$-\dfrac{3}{4}$	не корень
$\alpha=-\dfrac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Таким образом, $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\cdot(6x^3+15x^2+15x+9)$.

Аналогично найдем корни многочлена $g(x)=2x^3+5x^2+5x+3$.

Делители 3: $\pm 1; \pm 3$.

Делители 2: $\pm 1; \pm 2$.

Числа вида: $\dfrac{p}{q}$: $\pm 1; \pm\dfrac{1}{2};\ \pm 3; \pm\dfrac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причем -1 и $-\dfrac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше). Проверяем числа $-3; -\dfrac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
$\alpha=-3$	2	-1	8	-21	не корень
$\alpha=-\dfrac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

Многочлен $g(x)$ эквивалентен произведению $\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot(2x^2+2x+2)$.

Многочлен x^2+x+1 корней не имеет, так как $D=b^2-4ac=1-4=-3<0.$ Таким образом, $f(x)=(3x+1)\cdot(2x+3)\cdot(x^2+x+1).$

Применение формул сокращенного умножения и бинома Ньютона

В курсе математики средней школы учащихся знакомят с формулами сокращенного умножения второй и третьей степени.

Пусть $a,b\in R.$

1. ***Квадрат суммы*****(*****разности*****)** *двух выражений равен квадрату первого выражения* **плюс** **(*****минус*****)***удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения*:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

2. ***Разность квадратов*** *двух выраженийравна произведению суммы этих выражений на их разность*:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

3. ***Куб суммы*** *двух выражений равен кубу первого выражения* **плюс** *утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго* **плюс** *куб второго выражения*:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

4. ***Куб разности*** *двух выражений равен кубу первого выражения* **минус** *утроенное произведение квадрата первого выражения на второе* **плюс** *утроенное произведение первого выражения на квадрат второго* **минус** *куб второго выражения*:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

5. ***Сумма кубов***a^3+b^3*двух выражений* a *и* b *равна произведению суммы этих выражений на их неполный квадрат разности*a^2-ab+b^2:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

6. ***Разность кубов*** a^3-b^3 *двух выражений a и b равна произведению разности этих выражений на их неполный квадрат суммы* a^2+ab+b^2:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Доказательство формул легко проводится с помощью непосредственного умножения скобок, записанных в разложении на множители для каждой из них. Выведем, например, формулу куба суммы:

$$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^2=(a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)=$$

$$=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Выведем далее формулу, которая помогает разложить на множители разность n-х степеней двух величин для любых натуральных n:

Зафиксируем произвольное числовое значение переменной y и рассмотрим выражение x^n-y^n как многочлен только от одной переменной x. Если $x=y$, то этот многочлен обращается в нуль, т. е. число y является корнем многочлена. По следствию из теоремы Безу, этот многочлен делится на $x-y$, т. е. $x^n-y^n=(x-y)\cdot q(x)$, где $q(x)$ – некоторый многочлен степени $n-1$:

$$q(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

Значит,

$$x^n-y^n=(x-y)\cdot(a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0),$$

то есть

$$x^n-y^n=a_{n-1}x^n+(a_{n-2}-ya_{n-1})x^{n-1}+(a_{n-3}-ya_{n-2})x^{n-2}+\ldots+(a_1-ya_2)x^2+$$

$$+(a_0-ya_1)x-ya_0.$$

Используя утверждение о том, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равны тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов одинаковы, получаем равенства:

$$a_{n-1}=1;\ a_{n-2}-ya_{n-1}=0;\ a_{n-3}-ya_{n-2}=0;\ldots,a_1-ya_2=0;\ a_0-ya_1=0;-ya_0=-y^n.$$

Из этих равенств последовательно получаем:

$$a_{n-1}=1, a_{n-2}=y, a_{n-3}=y^2,..., a_2=y^{n-3}, a_1=y^{n-2}, a_0=y^{n-1}.$$

Таким образом,

$$x^n-y^n=(x-y)\cdot(a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+...+a_2x^2+a_1x+a_0)=$$
$$=(x-y)\cdot(x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+...+y^{n-3}x^2+y^{n-2}x+y^{n-1}).$$

Получаем следующую формулу разложения на множители:

$$x^n-y^n=(x-y)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+xy^{n-2}+y^{n-1}). \qquad (1.1)$$

Из нее, в частности, получаем:

$$x^4-y^4=(x-y)\cdot(x^3+x^2y+xy^2+y^3);$$
$$x^5-y^5=(x-y)\cdot(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4).$$

Используя формулу (1.1), получим разложение на множители для многочлена $x^{2n+1}+y^{2n+1}$:

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=x^{2n+1}-(-y)^{2n+1}=(x+y)\cdot(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-x^{2n-3}y^3+...+$$
$$+x^2y^{2n-2}-xy^{2n-1}+y^{2n}).$$

Из нее, в частности, получаем:

$$x^5+y^5=(x+y)\cdot(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4).$$

Формула возведения суммы двух величин в n-ю степень для любых натуральных n называется ***биномом Ньютона*** и имеет вид:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n,$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

Напомним, что они могут быть найдены по формуле $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}, k=0,1,2,...,n$ или с помощью ***треугольника Паскаля***:

0				1				
1			1		1			
2		1		2		1		
3	1		3		3		1	
...		...		...		...		

Это таблица, в которой для каждого натурального n (первое число в каждой строке) расположены биномиальные коэффициенты C_n^k. При этом k изменяется от 0 до n. Например,

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

По формуле, аналогичной биному Ньютона, можно вычислить натуральную степень разности двух величин:

$$(a-b)^n = C_n^0a^n - C_n^1a^{n-1}b + \ldots + (-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + (-1)^nC_n^nb^n.$$

Например, $(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6.$

Отметим, что формулы сокращенного умножения часто используются справа налево ($\leftarrow$).

***Пример* 1.8.** Разложить на множители многочлены:

а) $f(x) = 16x^4 - 81;$

б) $f(x,y) = 8x^3 + y^6;$

в) $f(x) = 16x^7 - 72x^6 + 108x^5 - 54x^4.$

Решение. а) Преобразуем исходное выражение, пользуясь свойствами степеней и тем, что $16 = 2^4$, $81 = 3^4$. Получаем

$$f(x) = (2x)^4 - 3^4 = (4x^2)^2 - 9^2.$$

Применим далее формулу разности квадратов дважды:

$$f(x) = (4x^2-9)\cdot(4x^2+9) = (2x-3)\cdot(2x+3)\cdot(4x^2+9).$$

б) Пользуясь формулой суммы кубов, получаем:

$$f(x,y) = (2x)^3 + (y^2)^3 = (2x+y^2)\cdot(4x^2 - 2xy^2 + b^4).$$

в) Вынесем общий множитель $2x^4$ за скобки, а затем применим формулу «куб разности»:

$$f(x) = 2x^4\cdot(8x^3 - 36x^2 + 54x - 27) = 2x^4\cdot(2x-3)^3.$$

***Пример* 1.9.** Разложить на множители многочлен $f(x,y) = x^5 - 32y^5$.

Решение. Применяя формулу разности 5-х степеней, получаем:

$$f(x,y) = x^5 - (2y)^5 = (x-2y)\cdot(x^4 + x^3\cdot 2y + x^2\cdot(2y)^2 + x\cdot(2y)^3 + (2y)^4) =$$

$$= (x-2y)\cdot(x^4 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 8xy^3 + 16y^4).$$

Иногда внешний вид многочлена наводит на мысль о способе его разложения на множители. К примеру, после несложных преобразований коэффициенты выстраиваются в строчку из треугольника Паскаля, т.е. являются коэффициентами бинома Ньютона.

***Пример* 1.10.** Разложить на множители многочлен

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2.$$

Решение. Преобразуем выражение к виду

$$f(x) = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) - 3.$$

Последовательность коэффициентов суммы в скобках явно указывает, что это есть $(x+1)^4$. Следовательно, $f(x) = (x+1)^4 - 3.$

Применим далее формулу разности квадратов:

$$f(x) = (x+1)^4 - 3 = \left((x+1)^2 - \sqrt{3}\right)\cdot\left((x+1)^2 + \sqrt{3}\right).$$

Выражение во второй скобке действительных корней не имеет, а для многочлена из первой скобки еще раз применим формулу разности квадратов:

$$f(x) = \left(x + 1 - \sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(x + 1 + \sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(x^2 + 2x + 1 + \sqrt{3}\right).$$

Выделение полного квадрата осуществляется с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности.

***Пример* 1.11.** Разложить на множители многочлен

$$a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2ax - 2by.$$

Решение. Сгруппируем слагаемые, выделив полные квадраты суммы:

$$(a^2 + 2ax + x^2) - (b^2 + 2by + y^2) = (a+x)^2 - (b+y)^2.$$

Используем далее разность квадратов:

$$(a+x)^2 - (b+y)^2 = (a+x+b+y)\cdot(a+x-b-y).$$

Дополнение до формулы

***Пример* 1.12.** Разложить на множители многочлены:

а) $f(x) = x^4 + 4$;

б) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 169$;

в) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 19$.

Решение. а) Дополним многочлен $f(x)$ до квадрата суммы:

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2)^2 + 2\cdot 2\cdot x^2 + 2^2 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - 4x^2.$$

Применим далее формулу разности квадратов:

$$f(x) = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)\cdot(x^2 + 2 + 2x). \ \square$$

б) Заметим, что $x^4 + 169 = \left(x^2\right)^2 + 13^2$. Дополним эту сумму до полного квадрата: $\left(\left(x^2\right)^2 + 2\cdot 13\cdot x^2 + 13^2\right) - 26x^2 - 10x^2 = \left(x^2 + 13\right)^2 - 36x^2$. Далее следует применить формулу разности квадратов:

$$f(x) = \left(x^2 + 13\right)^2 - 36x^2 = \left(x^2 + 13\right)^2 - (6x)^2 = (x^2 - 6x + 13)\cdot(x^2 + 6x + 13).$$

в) Очевидно, до полного куба суммы не хватает 8. Получаем каноническое разложение многочлена $f(x)$:

$(x^3 + 9x^2 + 27x + 19 + 8) - 8 = (x+3)^3 - 2^3 = (x+3-2)\cdot((x+3)^2 + 2\cdot(x+3) + 4) =$
$= (x+1)\cdot(x^2 + 8x + 19)$, где многочлены $x+1$ и $x^2 + 8x + 19$ – неприводимы, так как $D = 64 - 4\cdot 19 = -12 < 0$.

Метод введения новой переменной

Часто замена переменной позволяет понизить степень многочлена и разложить его на множители.

***Пример* 1.13.** Разложить на множители многочлен:

а) $f(x) = x^6 + 5x^3 + 6$;

б) $f(x) = (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x\cdot(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$;

в) $f(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4) - 24$.

Решение. а) Очевидно, понизить степень многочлена $f(x)$ можно, сделав замену $y = x^3$, тогда $f(y) = y^2 + 5y + 6$. Корнями полученного квадратного трехчлена являются $y = -2$ и $y = -3$, так как по теореме Виета $y_1 \cdot y_2 = 6$, $y_1 + y_2 = -5$. Раскладывая многочлен на множители, получаем:

$$f(y) = y^2 + 5y + 6 = (y+2)\cdot(y+3).$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$f(y) = (y+2)\cdot(y+3) = (x^3+2)\cdot(x^3+3).$$

Применяем формулу суммы кубов:

$$f(x) = (x+\sqrt[3]{2})\cdot(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})\cdot(x+\sqrt[3]{3})\cdot(x^2-\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9}).$$

б) Обозначим $x^2+4x+8=t$, тогда $f(x,t)=2x^2+3tx+t^2$. Найдем корни многочлена $f(x,t)$ относительно переменной x:

$$x_1 = \frac{-3t-\sqrt{9t^2-8t^2}}{4} = -t, \quad x_2 = \frac{-3t+\sqrt{9t^2-8t^2}}{4} = -\frac{t}{2}.$$

Имеем:

$$f(x) = 2\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) = (x+t)\cdot(2x+t) = (x^2+5x+8)\cdot(x^2+6x+8).$$

Многочлен x^2+5x+8 корней не имеет, так как $D = 25-4\cdot 8 = -7 < 0$. Найдем корни многочлена x^2+6x+8:

$$x_1 = \frac{-6-2}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-6+2}{2} = -2.$$

Окончательно получаем:

$$f(x) = (x^2+5x+8)\cdot(x+2)\cdot(x+4).$$

в) Перемножим попарно скобки $x+1$ и $x+4$; $x+2$ и $x+3$ многочлена $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)-24$:

$$f(x) = (x^2+5x+4)\cdot(x^2+5x+6)-24.$$

Пусть $x^2+5x+4=t$, тогда многочлен $f(t)=t^2+2t-24$ имеет корни:

$$t_1 = \frac{-2-10}{2} = -6, \quad t_2 = \frac{-2+10}{2} = 4.$$

Таким образом, $f(t)=(t-4)\cdot(t+6)$. Возвращаясь к переменной x, получаем

$$f(x)=(x^2+5x)\cdot(x^2+5x+10)=x\cdot(x+5)\cdot(x^2+5x+10).$$

Заметим, что последний множитель $x^2+5x+10$ – неприводимый многочлен второй степени, так как его $D=-15<0$, а значит, разложение многочлена $f(x)=x\cdot(x+5)\cdot(x^2+5x+10)$ является искомым.

Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода неопределённых коэффициентов состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определятся путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Теоретической основой метода являются следующие утверждения.

1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты.

2. Любой многочлен третьей степени имеет хотя бы один действительный корень, а потому разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителя.

3. Любой многочлен четвёртой степени разлагается в произведение многочленов второй степени.

***Пример* 1.14.** Разложить на множители многочлен

$$f(x)=3x^3-x^2-3x+1.$$

Решение. Поскольку многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителей, то будем искать многочлены $x-p$ и ax^2+bx+c такие, что справедливо равенство

$$3x^3-x^2-3x+1=(x-p)\cdot(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-ap)\cdot x^2+(c-bp)\cdot x-pc.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях этого равенства, получаем систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} a = 3, \\ b - ap = -1, \\ c - bp = -3, \\ -pc = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $a = 3$, $p = 1$, $b = 2$, $c = -1$. Итак, многочлен разлагается на множители: $f(x) = (x-1)\cdot(3x^2 + 2x - 1)$. Найдем корни многочлена $3x^2 + 2x - 1$:

$$x_1 = \frac{-2-4}{2\cdot 3} = -1, \quad x_2 = \frac{-2+4}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Окончательно имеем:

$$f(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(3x-1).$$

Иногда требуется использовать разложение на множители для доказательства математических утверждений.

***Пример* 1.15.** Доказать, что если $x \in N$ и $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$, то $f(x) \vdots 24$.

Доказательство. Представим $6x^3$ и $11x^2$ в виде $6x^3 = x^3 + 5x^3$ и $11x^2 = 5x^2 + 6x^2$. Тогда $f(x) = x^4 + (x^3 + 5x^3) + (5x^2 + 6x^2) + 6x = (x^4 + x^3) +$

$+(5x^3 + 5x^2) + (6x^2 + 6x) = x^3\cdot(x+1) + 5x^2\cdot(x+1) + 6x\cdot(x+1) =$

$= x\cdot(x+1)\cdot(x^2 + 5x + 6) = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot$

Но из четырех последовательных чисел хотя бы одно делится на 3, а два числа являются четными, причем одно из них делится на 4. Таким образом, $f(x)$ делится на произведение $3\cdot 2\cdot 4 = 24$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/7534309

1.3. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Разложить на множители:

1.1.

а) $49-4x^2$; **б)** $(x-6)^2-9x^2$; **в)** $3x^2-25$.

1.2.

а) $27x^3+1$; **б)** x^3-8; **в)** 2^6+x^9.

1.3.

а) x^3-x; **в)** $(x-1)^2\cdot(x+1)+(x+1)\cdot(x-1)$.

б) $x^{10}+x^5$;

1.4.

а) $-x^2-4x-4$; **б)** $11x-3x^2+70$; **в)** $14+x+x^2$.

1.5*.

а) x^4+4x^2+4; **в)** $(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+2)-12$.

б) x^8+x^4+1;

1.6*.

а) x^5-32; **б)** $16x^4-81$; **в)** x^7+128.

1.7.**

а) $2x^3+7x^2+7x+2$; **б)** $x^9+6x^6+11x^3+8$; **в)** x^3-3x^2+3x-1.

1.8.**

а) $x^4+4x^3-25x^2-16x+84$; **в)** $4x^4+4x^3-3x^2-2x+1$.

б) $x^4-4x^3+7x^2-6x+2$;

1.9.**

а) x^3+5x^6+3x-9; **в)** $x^5+3x^4-4x^3-12x^2$.

б) $x^5+x^3-x^2-1$;

Задание 2. Разложить на множители многочлен от нескольких переменных:

2.1*.

а) $8x^3-1000y^3$; **в)** $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

б) $8x^3+y^6$;

2.2*.

а) $x^2 + 2x + 1 - y^2$; **б)** $x^2 + y^2 - 2xy - z^2$; **в)** $x^2 - 1 + y \cdot (y + 2x)$.

2.3*.

а) $56x^2 - 40xy + 63xz - 45yz$; **в)** $3x^2 - xy - 4y^2$.

б) $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2ax - 2by$;

2.4*. $x^2 + 2xy + y^2 + 3(x + y) + 2$.

2.5.** $x^3 + y^2 + y^3 + 2xy + y^2$.

2.6.** $x^4 \cdot (y^2 - z^2) + y^4 \cdot (z^2 - x^2) + z^4 \cdot (x^2 - y^2)$.

2.7.** $(xy + xz + yz) \cdot (x + y + z) - xyz$.

2.8.** $x^2y^2 \cdot (y - x) + y^2z^2 \cdot (z - y) + x^2z^2 \cdot (x - z)$.

2.9.** $(x - y) \cdot z^3 - (x - z) \cdot y^3 + (y - z) \cdot x^3$.

2.10.** $(x^2 + y^2)^3 - (y^2 + z^2)^3 - (x^2 - z^2)^3$.

2.11.** $x^4 + 2x^3y - 3x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$.

2.12.** $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$.

2.13.** $x^4 - 2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3 - y^4$.

2.14.** $x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3$.

Задание 3*. Сократить дробь:

3.1. $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

3.2. $\dfrac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^6 - y^6}$.

3.3. $\dfrac{(2x - 1)^2 + 2 \cdot (4x^2 - 1) + (2x + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2 - (2x^2 - 1)^2}$.

3.4. $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz}{x^2 - y^2 - z^2 - 2yz}$.

3.5. $\dfrac{x + 1 - 2x^2}{-4x + 1 + 3x^2}$.

3.6. $\dfrac{(2-3x)^2-4\cdot(9x^2-4)+4\cdot(2+3x)^2}{(2-3x)^2-4\cdot(2+3x)^2}$.

3.7. $\dfrac{(x+1)^2+3\cdot(x^3+1)+2\cdot(x^2-x+1)^2}{2x^2-x+3}$.

3.8. $\dfrac{25x^2-9y^2+6y-10x}{5x+3y-2}$.

3.9. $\dfrac{2x^2+y^2+3xy+4x+2y}{2x+y}$.

3.10. $\dfrac{(x^2+1)^2+(x-1)\cdot(x^2+1)-2\cdot(x-1)^2}{x^2+2x-1}$.

Задание 4.** Найти a и b, при которых многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$:

4.1. $f(x)=6x^4-x^3+ax^2+bx+4, \quad g(x)=x^2-4$.

4.2. $f(x)=2x^3-x^2+ax+b, \quad g(x)=x^2-1$.

4.3. $f(x)=x^4-3x^2+3x^2+ax+b, \quad g(x)=x^2-3x+2$.

4.4. $f(x)=x^4-2x^3+ax+2, \quad g(x)=x^2+x+b$.

Задание 5.** Определить, при каком a квадратный трехчлен $y=x^2-(2a+1)\cdot x+a^2+2$ можно представить в виде полного квадрата?

Задание 6.** Доказать, что:

6.1. Значение выражения $2x^2+4xy+4y^2-2x+1$ неотрицательно при любых значениях x и y и найдите наименьшее значение этого выражения.

6.2. Число $(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-6)+10$ – положительное при любых действительных x. Найти наименьшее значение этого выражения.

6.3. Число $49^{50}-2^{100}$ кратно 5.

6.4. Число $(x+12)^{28}-(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)^7$ кратно 13.

6.5. При $x=\dfrac{a-b}{a+b}$, $y=\dfrac{b-c}{b+c}$, $z=\dfrac{c-a}{a+c}$ выполняется равенство $(1+x)\cdot(1+y)\cdot(1+z)=(1-x)\cdot(1-y)\cdot(1-z)$.

6.6. Число $x\cdot(1+x)\cdot(2+x)\cdot(3+x)\,\vdots\,24$ при любых натуральных x.

6.7. Число $x^2 - 1$ делится на 24, если x – простое и x>3.

6.8. Число $x^5 - 5x^3 + 4x \vdots 120$ при любых натуральных x.

6.9. Число $\frac{x}{12} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24}$ – целое, если x – число четное.

6.10. $x^2 \cdot (x^2 + 14) + 49 \vdots 64$, если x – нечетное число.

2.ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

2.1. Основные понятия и утверждения

Равенство, справедливое не для всех значений букв, входящих в правую и левую части, называется ***уравнением***.

Понятие уравнения можно определить и через понятие функций.

В зависимости от количества букв, не являющихся постоянными, уравнения бывают с одним неизвестным (например, с буквой x), с двумя неизвестными (например, буквами x и y) и т. д.

Пусть даны две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Равенство $f(x) = g(x)$ называется **уравнением с одной переменной**.

Областью допустимых значений уравнения $f(x) = g(x)$ называется множество всех значений переменной x, при каждом из которых имеют смысл левая и правая части уравнения.

Число a, принадлежащее области допустимых значений (ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$, называется корнем уравнения, если при подстановке этого числа вместо переменной x в уравнении получается верное числовое равенство.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их не существует.

Рациональное выражение – это алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменной (переменных) с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с натуральным показателем.

Если $r(x)$ – рациональное выражение, то уравнение $r(x) = 0$ называют ***рациональным уравнением***. На практике удобнее пользоваться несколько более широким определением: рациональное уравнение – это уравнение вида $h(x) = q(x)$, где $h(x)$ и $q(x)$ – рациональные выражения.

Например, рациональными уравнениями являются следующие уравнения: $x = 5$; $x + 3y = 5$; $x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 1 = 0$; $x - ax = 2x + 5$; $\frac{x^2+1}{x} = 0$.

Как видно из примеров, рациональные уравнения могут быть как с одной переменной, так и с несколькими.

Рациональные уравнения называются ***целыми***, если и левая, и правая его части являются целыми рациональными выражениями.

Например, уравнения $0{,}7x^7 - 3x^5 - x = 5$, $(\sqrt{3} - x^2)(\sqrt{2} - x^3) = x^6$, $\frac{(x^3-5)x}{4} - 2 = \frac{x^2}{5} - 6x$ – целые рациональные уравнения.

Если хотя бы одна из частей рационального уравнения является дробным выражением, то такое уравнение называется ***дробно-рациональным*** (или дробным рациональным).

Например, уравнения $\frac{x^2+1}{x} = 0$, $(x + 5 + \frac{2}{x})(x - 3 + \frac{2}{x}) = 9$, $\frac{x^2+3}{2-x} = 12$ – дробно-рациональные уравнения.

Таким образом, можно сказать, что целые рациональные уравнения не содержат деление на переменную, а дробно-рациональные, напротив, обязательно содержат деление на переменную (содержат переменную в знаменателе дроби).

Неравенства с одной переменной имеют вид:

$$f(x) > g(x);\quad f(x) < g(x);\quad f(x) \geq g(x);\quad f(x) \leq g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ некоторые функции переменного *x*.

Решением неравенства называется значение переменной, при которой данное неравенство становится верным числовым неравенством.

Совокупность всех решений неравенства называется ***множеством решений неравенства***.

Основной метод решения неравенств есть его упрощение с помощью так называемых равносильных преобразований на некотором множестве *M*. В результате исходное неравенство оказывается равносильным некоторой системе простейших неравенств на множестве *M*, каждое из которых может быть решено непосредственно.

Областью допустимых значений* (*ОДЗ*) *неравенства $f(x) > g(x)$ (или неравенств $f(x) < g(x),\ f(x) \geq g(x),\ f(x) \leq g(x)$) называется пересечение областей определения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, т. е. множество всех числовых значений переменной *x*, при которых одновременно определены (имеют смысл) и левая, и правая части неравенства.

Любое число *x*из ОДЗ неравенства называется допустимым значением для данного неравенства. Ясно, что число *x* может быть решением неравенства только тогда, когда оно принадлежит ОДЗ неравенства. Отсюда вытекает очевидный вывод: решения неравенства следует искать только в области допустимых значений неравенства.

Отметим, что в дальнейшем мы будем полагать *f*(*x*) и *g*(*x*) рациональными алгебраическими выражениями, т.е. выражениями, полученными только с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень переменной величины *x* и постоянных действительных чисел. При этом переменная величина может быть обозначена различными буквами (*x, y, z, t* и т.д.).

Равносильные уравнения

Два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \text{ и } f_2(x) = g_2(x) \qquad (2.1)$$

называются ***равносильными* (*эквивалентными*)**, если совпадают множества их корней, в частности, если оба уравнения не имеют корней.

***Пример* 2.1. а)** уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\dfrac{x^2+1}{x} = 0$равносильны, так как каждое из них не имеет корней на множестве действительных чисел;

б) уравнения $x = 1$ и $\sqrt{x} = 1$равносильны, так как каждое из них имеет один корень, равный 1;

в) уравнения $x(x-2)=0$ и $x(x-1)(x-2)=0$ не равносильны, так как число 1 является корнем второго уравнения и не является корнем первого уравнения.

Из определения равносильности уравнений следует, что вместо того, чтобы решать данное уравнение, можно решать уравнение, ему равносильное.

Понятие равносильности обладает свойством транзитивности, т.е. если уравнение $f_1(x)=g_1(x)$ равносильно уравнению $f_2(x)=g_2(x)$ и уравнение $f_2(x)=g_2(x)$ равносильно уравнению $f_3(x)=g_3(x)$, то уравнение $f_1(x)=g_1(x)$ равносильно уравнению $f_3(x)=g_3(x)$.

Замена уравнения ему равносильным уравнением или замена уравнения ему равносильной совокупностью уравнений (неравенств, систем) называется ***равносильным переходом***.

В определении равносильности двух уравнений ничего не говорится об области допустимых значений (далее – ОДЗ). Так, пример 1 б) показывает, что равносильные уравнения могут иметь различные области допустимых значений: уравнение $x=1$ в качестве ОДЗ имеет множество всех действительных чисел *R*, в то время как уравнение $\sqrt{x}=1$ – множество неотрицательных действительных чисел. Пример 1 в) демонстрирует, что, хотя ОДЗ уравнений совпадают (множество всех действительных чисел), но уравнения могут и не быть равносильными.

При решении уравнений вместо понятия равносильности уравнений часто пользуются понятием равносильности уравнений на множестве: два уравнения называются ***равносильными на множестве A***, если совпадают множества всех их корней, принадлежащих множеству *A*, или они оба не имеют решений на этом множестве.

Уравнения могут не быть равносильными, но быть равносильными на некотором множестве. Примером могут служить уравнения

$$x=1 \text{ и } |x|=1,$$

которые равносильны на множестве положительных чисел, но не являются равносильными.

Говорят, что уравнение равносильно данной совокупности уравнений (неравенств, систем) на множестве A, если множество всех корней уравнения, принадлежащих A, совпадает с множеством всех решений совокупности уравнений (неравенств, систем), принадлежащих множеству A.

***Пример* 2.2.** Являются ли уравнение

$$(x^2+x+1)(3x+4)(-7x+2)(2x-\sqrt{5})(-12x-16)=0$$

и совокупность уравнений

$$3x+4=0;\ -7x+2=0;\ 2x-\sqrt{5};\ -12x-16=0$$

равносильными на множестве всех действительных чисел?

Решение. Так как дискриминант квадратного трехчлена x^2+x+1 отрицательный $(D=1-4=-3)$, $x^2+x+1\neq 0$ при любом действительном x. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$(3x+4)(-7x+2)(2x-\sqrt{5})(-12x-16)=0.$$

Любой корень этого уравнения обращает в нуль хотя бы один из входящих в него многочленов, т.е. является корнем хотя бы одного из уравнений данной совокупности. Наоборот, любой корень совокупности удовлетворяет данному уравнению. Поэтому уравнение и совокупность уравнений равносильны.

Если для данной пары уравнений (1) любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называется ***следствием*** первого уравнения, при этом пишут

$$f_1(x)=g_1(x)\Rightarrow f_2(x)=g_2(x).$$

Если заменить уравнение его следствием, то множество решений второго уравнения будет содержать все корни исходного уравнения и помимо них может содержать еще некоторые числа, называемые ***посторонними корнями*** исходного уравнения. Поэтому если в процессе решения от данного уравнения перешли к его следствию, то в конце решения необходимо еще провести исследование корней (например, сделать проверку) и отобрать те из них, которые являются решениями исходного уравнения.

Так, например, возведя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x} = -x$, получим уравнение-следствие

$$\sqrt{x} = -x \Rightarrow x = x^2.$$

Решив второе уравнение, находим два корня $x_1 = 0,\ x_2 = 1.$ Значение $x_1 = 0$ удовлетворяет уравнению $\sqrt{x} = -x$, тогда как значение $x_2 = 1$ не удовлетворяет уравнению $\sqrt{x} = -x$, т.е. является для него посторонним корнем.

Этот Пример показывает, что посторонний (для данного уравнения) корень $x_2 = 1$ появился вследствие того, что ОДЗ второго уравнения стала шире ОДЗ первого уравнения. Однако расширение ОДЗ уравнения при переходе к его следствию происходит не всегда (пример 1 в).

Если при выполнении преобразований уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ свелось к уравнению $f_2(x) = g_2(x)$ (или совокупности уравнений), причем некоторые корни уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ не являются корнями уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, то в таких случаях говорят о ***потере корней***.

Например, уравнение $(x-1)^2 = x-1$ имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Если обе части этого уравнения разделить на $\varphi(x) = x-1$, то получим уравнение $x-1=1$, которое имеет только один корень x = 2. Таким образом, при делении обеих частей уравнения на $\varphi(x) = x-1$ произошла потеря одного корня.

При решении уравнений, как правило, выполняются различные преобразования, в результате которых заданное уравнение сводится к более простому уравнению (или совокупности уравнений, неравенств, систем). При этом важно знать, какие из преобразований сводят данное уравнение к равносильному, какие приводят к уравнению-следствию, а какие – к потере корней.

Утверждения о равносильности уравнений

1. *Уравнения* $f(x)=g(x)$ *и* $f(x)-g(x)=0$ *равносильны.*

Например, уравнения $5x-4=-x^2$ и $5x-4+x^2=0$ равносильны.

2. *Уравнения* $f(x)=g(x)$ *и* $f(x)+\alpha=g(x)+\alpha$ *равносильны для любого действительного числа* α.

Например, уравнения $3x=2x-4$ и $3x+4=2x-4+4$ равносильны.

3. *Уравнения* $f(x)=g(x)$ *и* $\alpha\cdot f(x)=\alpha\cdot g(x)$ *равносильны для любого действительного числа* $\alpha\neq 0$.

Например, умножив обе части уравнения $\frac{x+1}{3}=\frac{x-2}{4}$ на 12, получим уравнение $4x+4=3x-6$, равносильное данному.

4. *Пусть функция* $y=\varphi(x)$ *имеет смысл при всех* x *из области определения уравнения* $f(x)=g(x)$. *Тогда уравнения* $f(x)=g(x)$ *и* $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ *равносильны.*

Например, если к обеим частям уравнения $2x^2-x-4=5x+1$ прибавить выражение $\varphi(x)=-5x-1$, получится уравнение $2x^2-x-4+(-5x-1)=5x+1+(-5x-1)$, равносильное исходному, так как выражение $\varphi(x)=-5x-1$ имеет смысл при всех значениях x из области определения исходного уравнения.

Если же к обеим частям уравнения $x^2=1$ прибавить выражение $\varphi(x)=\sqrt{x}$, то получится уравнение $x^2+\sqrt{x}=1+\sqrt{x}$, которое неравносильно исходному уравнению, так как выражение $\varphi(x)=\sqrt{x}$ имеет смысл не при всех x из области определения уравнения $x^2=1$, а только при значениях $x\geq 0$. Прибавив к обеим частям уравнения $x^2=1$ выражение $\varphi(x)=\sqrt{x}$, мы сузили область определения уравнения, что может привести к потере корней. В данном случае $x=-1$ является корнем уравнения $x^2=1$, но не является корнем уравнения $x^2+\sqrt{x}=1+\sqrt{x}$.

Следует понимать, что речь идет только об одном преобразовании – прибавлении к обеим частям уравнения одного и того же выражения. Последующее же приведение подобных членов (если оно возможно) – это новое преобразование уравнения, которое может привести и к неравносильному уравнению.

5. *Пусть функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *неотрицательны на некотором множестве А. Тогда на этом множестве Ауравнения* $f(x) = g(x)$ *и* $f^n(x) = g^n(x)$ $(n \in \mathrm{N})$ *равносильны*.

Например, после возведения в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x+1} = \sqrt{2-x}$ получим уравнение $x+1 = 2-x$, равносильное исходному, так как обе части исходного уравнения неотрицательны. Действительно, число 0,5 является единственным корнем обоих уравнений.

Если же возвести в квадрат уравнение $x-1 = 6-2x$, обе части которого могут быть произвольного знака, то получим уравнение $(x+1)^2 = (6-2x)^2$, неравносильное исходному. Действительно, единственный корень исходного уравнения – число $\frac{5}{3}$ – является решением уравнения $(x+1)^2 = (6-2x)^2$, но корень этого уравнения – число 7 – не является решением исходного уравнения.

6.*Пусть функция* $y = \varphi(x)$ *определена и не обращается в нуль ни в одной точке множестваА, содержащемся в области определения уравнения* $f(x) = g(x)$. *Тогда на множестве Ауравнения* $f(x) = g(x)$ *и* $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ *равносильны. МножествоА может совпадать с ОДЗ уравнения* $f(x) = g(x)$.

Так, если обе части уравнения $x - \frac{2}{x} = 2$ умножить на выражение $\varphi(x) = x$, то получится уравнение $x^2 - \frac{2x}{x} = 2x$, равносильное исходному, так как выражение $\varphi(x) = x$ имеет смысл при всех значениях x из области определения исходного уравнения $(x \neq 0)$ и нигде в этой области не обращается в нуль.

Если обе части уравнения $x-2=0$ умножить на $\varphi(x)=x+3$, то получим уравнение $(x-2)(x+3)=0$, неравносильное данному, так как при $x=-3$, принадлежащем области определения исходного уравнения, выражение $\varphi(x)=x+3$ обращается в нуль, хотя оно имеет смысл при всех x из области определения уравнения $x-2=0$. Таким образом, в данном случае умножение обеих частей уравнения на выражение $\varphi(x)=x+3$ привело к появлению постороннего корня $x=-3$.

Заметим, что в свойстве речь идет только об одном преобразовании – умножении (или делении) обеих частей уравнения на одно и тоже выражение.

Учитывая вышеизложенное, сформулируем утверждения, приводящие не к равносильным уравнениям, а к уравнениям-следствиям.

Утверждения о следствии

1. *Уравнение* $f^{2n}(x)=g^{2n}(x)$ *является следствием уравнения* $f(x)=g(x)$.

2. *Уравнение* $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ *является следствием уравнения* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)$.

3. *Уравнение* $f(x)=g(x)$ *является следствием уравнения* $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$.

4. *Совокупность уравнений*

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0 \end{array}\right.$$

является следствием уравнения $f(x)\cdot g(x)=0$.

Рассмотрим несколько примеров на применение указанных выше утверждений.

***Пример* 2.3.** Являются ли уравнения

$$x+7+\frac{10}{2x-1}=8-x+\frac{10}{2x-1} \text{ и } x+7=8-x$$

равносильными?

Решение. Второе уравнение получено из первого уравнения прибавлением к обеим частям одного и того же выражения $\frac{10}{2x-1}$, которое не определено при $x=0{,}5$. Это означает, что число 0,5 не может быть корнем первого уравнения, но может быть корнем второго. Легко проверить, что число 0,5 – корень второго уравнения.

Итак, корень второго уравнения $x=0{,}5$ не является корнем первого уравнения. Следовательно, данные уравнения не равносильны.

***Пример* 2.4.** Являются ли уравнения $x-2=5$ и $(x-2)^2=25$ равносильными?

Решение. Корнем первого уравнения является число $x=7$. Решая второе уравнение, находим два корня $x_1=-3,\ x_2=7.$ Таким образом, данные уравнения не равносильны. Корень $x=-3$ является посторонним для первого уравнения. Причина его появления в том, что по утверждению 5о равносильных уравнениях обе части уравнения при возведении его в одну и ту же чётную степень должны быть неотрицательны. Но относительно выражения $x-2$ утверждать этого нельзя. В данном случае справедливо утверждение 1 о следствии.

Важно помнить, что при преобразовании исходного уравнения в уравнение-следствие обязательна проверка всех найденных корней, чтобы выявить посторонний корень.

Отметим также, что из определения целого уравнения и условий перехода к равносильному уравнению с одной переменной вытекает, что любое целое уравнение можно преобразовать в равносильное ему уравнение вида $P(x)=0,$ где $P(x)$ – многочлен стандартного вида.

Равносильные неравенства

При решении неравенств важнейшим понятием является понятие равносильности неравенств.

Два неравенства

$$f_1(x) > g_1(x) \text{ и } f_2(x) > g_2(x) \tag{2.2}$$

называются ***равносильными*** (***эквивалентными***), если любое решение первого неравенства является решением второго неравенства, а любое решение второго неравенства – решением первого. При этом пишут

$$f_1(x) > g_1(x) \Leftrightarrow a = f_2(x) > g_2(x).$$

Если оба неравенства не имеют решений, то по определению они также считаются равносильными.

Пример **2.5.** Неравенства $x^2 > 4$ и $1+\dfrac{4}{x-2} > 0$ равносильны, так как множества решений каждого из этих неравенств есть множество $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Пример **2.6.** Неравенства $x-2>0$ и $x(x-2)>0$ не являются равносильными, так как значение $x=-1$ является решением второго неравенства, но не является решением первого.

Отметим, что равносильные неравенства могут иметь различные области допустимых значений.

Пример **2.7.** Например, неравенство $x>2$ равносильно неравенству $\dfrac{1}{x-2} \geq 0$, однако ОДЗ первого неравенства является множество всех действительных чисел, а ОДЗ второго неравенства – множество $R \setminus \{2\}$.

Два неравенства называются ***равносильными на множестве*** *M*, если совпадают множества их решений, принадлежащих этому множеству *M*.

Два неравенства могут быть неравносильными, но могут быть равносильными на некотором множестве. Например, неравенства $x^2 > 4$ и

$x > 2$ равносильны на множестве положительных чисел, но не являются равносильными на множестве действительных чисел.

Из всего вышесказанного следует, что при решении неравенств очень важно знать правила перехода от одного неравенства к равносильному ему другому неравенству.

Утверждения о равносильности неравенств

1. *Неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $g(x) < f(x)$ *равносильны.*

2. *Неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $f(x) - g(x) > 0$ *равносильны.*

3. *Неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ *равносильны, если функция* $h(x)$ *определена на ОДЗ неравенства* $f(x) > g(x)$.

4. *Неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $f(x) + a > g(x) + a$ *равносильны для любого числаa.*

5.*Если функция* $h(x)$ *положительна при всех значениях x из ОДЗ неравенства* $f(x) > g(x)$, *то неравенство* $f(x) > g(x)$ *и неравенство* $h(x) \cdot f(x) > h(x) \cdot g(x)$ *равносильны. Если функция* $h(x)$ *отрицательна при всех значениях x из ОДЗ неравенства* $f(x) > g(x)$, *то неравенство* $f(x) > g(x)$ *и неравенство* $h(x) \cdot f(x) < h(x) \cdot g(x)$ *равносильн*ы.

6. *Если a – положительное число, то неравенство* $f(x) > g(x)$ *равносильно неравенству* $a \cdot f(x) > a \cdot g(x)$, *а если a – отрицательное число, то неравенство* $f(x) > g(x)$ *равносильно неравенству* $a \cdot f(x) < a \cdot g(x)$.

7. *Неравенство* $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ *и* $f(x) \cdot g(x) > 0$*равносильны.*

8. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *неотрицательны на множестве M. Тогда на этом множестве неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $f^n(x) > g^n(x)$ $(n \in \mathrm{N})$ *равносильны.*

***Пример* 2.8.** Являются ли неравенства $\dfrac{x-3}{x^2 - 5x + 6} < 2$ и $2x^2 - 11x + 15 > 0$ равносильными?

Решение. ОДЗ первого неравенства есть множество $(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$. На этом множестве неравенство $\dfrac{1}{x-2}<2$ равносильно первому и имеет решения $(-\infty;2)\cup\left(\dfrac{5}{2};3\right)\cup(3;+\infty)$.

Уравнение $2x^2-11x+15=0$ имеет два корня: $x_1=3$ и $x_2=\dfrac{5}{2}$. Следовательно, множество решений второго неравенства есть множество $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)\cup(3;+\infty)$.

Таким образом, данные неравенства не являются равносильными.

Приведенный Пример показывает, что при решении неравенства нельзя обе части умножать на знаменатель без выяснения знака принимаемых им значений. Так, в данном примере мы имеем

$$\frac{x-3}{x^2-5x+6}<2 \Leftrightarrow \frac{(x-3)-2(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6}<0 \Leftrightarrow \frac{x-3-2x^2+10x-12}{x^2-5x+6}<0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{-2x^2+11x-15}{x^2-5x+6}<0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6}>0.$$

Однако, умножив обе части последнего неравенства на выражение $x^2-5x+6,$ мы получим неравенство $2x^2-11x+15>0,$ не равносильное исходному.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/view7535370

2.2. Общие методы решения рациональных уравнений

Стандартных методов решения уравнений много, нестандартных – еще больше. Последние подходят для решения небольшого количества (часто вообще одного) типа уравнений. При решении уравнений почти всегда приходится прибегать к равносильным преобразованиям алгебраических выражений, изложенным выше.

Начнем изложение со стандартных методов.

Метод разложения на множители

Суть данного метода при решении уравнений состоит в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух или более выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль. Тогда полученное уравнение можно заменить равносильной совокупностью уравнений:

$$f(x)\cdot g(x)\cdot\ldots\cdot h(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \\ \ldots, \\ h(x)=0. \end{array}\right.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Рассмотрим решения некоторых рациональных уравнений, основанные на разложении его левой части на множители.

***Пример* 2.9.** Решить уравнение $(x+1)^4+(x+2)^3=1.$

Решение. Осуществим разложение на множители, для этого вынесем 1 в правую часть

$$(x+1)^4+(x+2)^3-1=0,$$

применим ко второму и третьему слагаемым формулу *разности кубов*

$$(x+1)^4+(x+1)(x^2+4x+4+x+2+1)=0,$$

вынесем общий множитель и применим формулу *кубаразности*

$$(x+1)\cdot(x^3+3x^2+3x+1+x^2+5x+7)=0,$$

приведем подобные слагаемые

$$(x+1)(x^3+4x^2+8x+8)=0,$$

многочлен, стоящий во второй скобке, разложим на множители методом группировки:

$$(x+1)\left((x+2)(x^2-2x+4)+4x(x+2)\right)=0,$$

$$(x+1)(x+2)(x^2+2x+4)=0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ x+2=0, \\ x^2+2x+4=0. \end{array}\right.$$

Квадратное уравнение не имеет корней, так как $D = 4 - 16 < 0$, следовательно, исходное уравнение имеет два корня: – 1 и – 2.

Ответ: – 1 ; – 2.

***Пример* 2.10.** Решить уравнение $3x^3-2x-1=0$.

Решение. Для разложения на множители используем прием деления многочленов столбиком. Несложно догадаться, что $x = 1$ – корень многочлена $3x^3-2x-1$. Следовательно, по теореме Безу он без остатка делится на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^3-2x-1 & \overbrace{x-1}^{\text{делитель}} \\ \cline{2-2} \underline{3x^3-3x^2} \quad\quad & \underbrace{3x^2+3x+1}_{\text{частное}} \\ -\,3x^2-2x & \\ \underline{3x^3-3x} & \\ -\,x-1 & \\ \underline{x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Таким образом, $3x^3-2x-1=(3x^2+3x+1)(x-1).$

Дискриминант первого квадратичного уравнения отрицателен, поэтому корней у него нет. Из второго уравнения получается уже известный нам результат, что корень $x = 1$. Это единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

***Пример* 2.11.** Решить уравнение $2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 0.$

Решение. Поскольку коэффициенты многочлена – целые числа, то ищем целые корни среди делителей свободного члена: ±1. Подходит –1. Делим многочлен $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ на $x + 1$ с помощью схемы Горнера:

	2	–7	–3	5	–1
$\alpha = -1$	2	–9	6	–1	0

То есть $f(x) = (x+1)(2x^3 - 9x^2 + 6x - 1).$

Ищем целые корни кубического многочлена среди делителей свободного члена: ±1. Вычисления показывают, что целых корней нет. Так как старший коэффициент многочлена не равен 1, то многочлен, а следовательно и исходное уравнение, может иметь дробные рациональные корни. Ищем рациональные корни среди дробей $\frac{p}{q}$, где p принимает значения ± 1, а q – 1, 2. Знак «–» в знаменателе дроби можно не учитывать, так как он учитывается в числителе. Тогда дробными корнями могут быть только числа $\pm\frac{1}{2}$. Подходит $\frac{1}{2}$:

	2	–9	6	–1
$\alpha = \frac{1}{2}$	2	–8	2	0

Имеем:

$$f(x) = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 2) = (x+1)(2x-1)(x^2 - 4x + 1)$$

или $$(x+1)(2x-1)(x^2 - 4x + 1) = 0.$$

Откуда находим $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}.$

Ответ: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}.$

Метод введения новой переменной

Если уравнение имеет вид (или его можно свести к виду)

$$P\left(f\left(x\right)\right) = 0,$$

то заменой неизвестной $y = f\left(x\right)$ оно сводится к уравнению

$$P\left(y\right) = 0,$$

после нахождения всех корней $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n$ которого сводится к решению совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = y_1, \\ \ldots, \\ f\left(x\right) = y_n. \end{array}\right.$$

Данным методом решаются ***трехчленные*** уравнения, т.е. уравнения вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \text{где}\ a \neq 0,\ n \geq 2,\ n \in N.$$

При $n = 2$ трехчленное уравнение называется *биквадратным.*

С помощью замены $y = x^n$ решение трехчленных уравнений сводится к решению квадратного уравнения.

***Пример* 2.12.** Решить уравнение $x^8 - 17x^4 + 16 = 0.$

Решение. Обозначив $x^4 = y$, получим уравнение $y^2 - 17y + 16 = 0,$ откуда найдём $y_1 = 1$ и $y_2 = 16$. Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^4 = 1, \\ x^4 = 16, \end{array}\right.$$

решая которую находим $x_{1,2} = \pm 1$ и $x_{3,4} = \pm 4.$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 4.$

***Пример* 2.13.** Решить уравнение $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $a\cdot (f(x))^2-b\cdot f(x)+c=0$.

$$(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x-1)-5+9=0,$$

$$(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x-1)+4=0.$$

Введем новую переменную $y=2x^2+3x-1$, тогда получим квадратное уравнение $y^2-5y+4=0$, которое имеет корни $y_1=1$ и $y_2=4$. Чтобы найти x, нужно решить уравнения $2x^2+3x-1=1$ и $2x^2+3x-1=4$,

$$\begin{array}{ll} 2x^2+3x-2=0, & 2x^2+3x-5=0, \\ D=9+16=25, & D=9+20=29, \\ x_1=\dfrac{-3-5}{4}=-2, & x_3=\dfrac{-3-\sqrt{29}}{4}, \\ x_2=\dfrac{-3+5}{4}=\dfrac{1}{2}. & x_4=\dfrac{-3+\sqrt{29}}{4}. \end{array}$$

Ответ: $-2; \dfrac{1}{2}; \dfrac{-3-\sqrt{29}}{4}; \dfrac{-3+\sqrt{29}}{4}$.

***Пример* 2.14.** Решить уравнение $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Решение. Обращаем внимание на то, что $x=0$ не является корнем данного уравнения. Следовательно, без потери или приобретения лишних корней можно разделить числитель и знаменатель обеих дробей на x. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

Введем новую переменную $y=4x+\dfrac{7}{x}$. Тогда

$$\frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2-25y+144}{(y-8)(y-10)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-25y+144=0, \\ y\neq 8, \\ y\neq 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=16, \\ y=9, \end{array}\right. \\ y\neq 8, \\ y\neq 10. \end{cases}$$

Итак, y = 16 или y = 9. Переходя к обратной подстановке, получаем:

1. $4x+\frac{7}{x}=16,$ что при $x\neq 0$ равносильно уравнению $4x^2-16x+7=0.$

   Откуда $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=\frac{7}{2}.$

2. $4x+\frac{7}{x}=9,$ что при $x\neq 0$ равносильно уравнению $4x^2-9x+7=0,$ у которого корней нет, так как дискриминант отрицателен.

Ответ: $\frac{1}{2};\frac{7}{2}.$

***Пример* 2.15.** Решить уравнение $3x^3+9x+8=0.$

Решение. Проверив делители свободного члена, можно убедиться, что данное уравнение не имеет целых корней.

Введем новую переменную $x=y-\frac{1}{y},$ тогда

$$x^3=\left(y-\frac{1}{y}\right)^3=y^3-\frac{1}{y^3}-3\cdot\left(y-\frac{1}{y}\right)$$

и уравнение примет вид

$$3\cdot\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)-9\cdot\left(y-\frac{1}{y}\right)+9\cdot\left(y-\frac{1}{y}\right)+8=0,$$

$$3\cdot\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)+8=0.$$

Это уравнение является квадратным относительно y^2. Заменой $t = y^2$ оно приводится к квадратному $3t^2 + 8t - 3 = 0$, корни которого $t_1=-3,$ $t_2=\frac{1}{3}.$

Учитывая замену, получим два уравнения:

1) $y^3 = -3,\quad y_1 = -\sqrt[3]{3}$, тогда $x_1 = y_1 - \dfrac{1}{y_1} = -\sqrt[3]{3} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$;

2) $y^3 = \dfrac{1}{3},\quad y_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, тогда $x_2 = y_2 - \dfrac{1}{y_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{3}.$

Как видим, $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{3}.$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{3}.$

***Пример* 2.16.** Решить уравнение $x(19-x)(19+x^2)=84(x+1)^2$.

Решение. Заметим, что $x = -1$ не является корнем данного уравнения. Тогда, разделив обе части уравнения на $(x+1)^2 \neq 0$, получим равносильное уравнение:

$$x \cdot \left(\frac{19-x}{x+1}\right) \cdot \frac{19+x^2}{x+1} = 84,$$

$$x \cdot \left(\frac{19-x}{x+1}\right) \cdot \left(x + \frac{19-x}{x+1}\right) = 84.$$

Пусть $x \cdot \left(\dfrac{19-x}{x+1}\right) = a,\ x + \dfrac{19-x}{x+1} = b,$ тогда $a \cdot b = 84,$

$$a + b = x \cdot \frac{19-x}{x+1} + x + \frac{19-x}{x+1} = \frac{19-x}{x+1} \cdot (x+1) + x = 19.$$

Следовательно, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=19, \\ ab=84, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} a_1 = 12, \\ b_1 = 7, \end{cases} \text{или} \begin{cases} a_1 = 7, \\ b_1 = 12. \end{cases}$$

Поскольку $b = x + \dfrac{19-x}{x+1} = \dfrac{x^2+19}{x+1}$, то получим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+19}{x+1}=7, \\ \dfrac{x^2+19}{x+1}=12; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7x+12=0, \\ x^2-12x+7=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=4, \\ x_3=6-\sqrt{29}, \\ x_3=6+\sqrt{29}. \end{array}\right.$$

Ответ: 3; 4; $6\pm\sqrt{29}$.

Функционально-графический метод

Функционально-графический метод является, пожалуй, самым красивым и наглядным из общих методов решения уравнений. Это объясняется тем, что он подразумевает использование функций, их свойств и графиков. Рассмотрим сначала примеры решения уравнений с использованием свойств функций без построения их графиков.

Умножение на функцию

Иногда решение уравнения существенно упрощается, если умножить обе его части на некоторую функцию – многочлен от неизвестной. При этом нужно помнить, что возможно появление лишних корней – корней многочлена, на который умножали уравнение. Поэтому надо либо умножать на многочлен, не имеющий корней, и получать равносильное уравнение, либо умножать на многочлен, имеющий корни, и тогда каждый из этих корней надо обязательно подставить в исходное уравнение и установить, является ли это число корнем.

***Пример* 2.17**. Решить уравнение $x^8-x^6+x^4-x^2+1=0.$

*Решение.*Умножив обе части уравнения на многочлен $x^2+1,$ не имеющий корней, получим уравнение

$$(x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)=0,$$

равносильное исходному уравнению. Это уравнение можно записать в виде

$$x^{10}+1=0.$$

Полученное уравнение не имеет действительных корней, поэтому и исходное уравнение их не имеет.

Ответ: корней нет.

***Пример* 2.18.** Решить уравнение $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0.$

*Решение.*Умножив обе части уравнения на многочлен $x + \frac{1}{2}$, получим уравнение

$$6x^4 + 2x^3 - \frac{41}{2}x^2 + 2x + 6 = 0. \qquad (2.3)$$

Так как число 0 не является корнем уравнения (2.3), то разделив обе его части на $2x^2$ и перегруппировав его члены, получим уравнение

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{41}{4} = 0, \qquad (2.4)$$

равносильное уравнению (2.3). Обозначим $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$.

Уравнение (2.4) перепишем в виде

$$3y^2 + y - \frac{65}{4} = 0, \qquad (2.5)$$

которое имеет два корня $y_1 = -\frac{5}{2}$ и $y_2 = \frac{13}{6}$. Поэтому уравнение (2.5) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \\ x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = -2, \\ x_2 = -\frac{1}{2}, \\ x_3 = \frac{2}{3}, \\ x_4 = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Так как корень $y_2 = -\frac{1}{2}$ является посторонним для уравнения (2.3), то оно имеет три корня.

Ответ: $x_1 = -2,\ x_2 = \dfrac{2}{3},\ \ x_3 = \dfrac{3}{2}.$

***Пример* 2.19**. Решить уравнение

$$(1 + x + x^2)\,(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^6)^2.$$

*Решение.*Умножив обе части уравнения на многочлен $(x-1)^2$, получим уравнение

$$(x^3 - 1)(x^{11} - 1) = (x^7 - 1)^2,$$

$$x^{11} - 2x^7 + x^3 = 0,$$

$$x^3\,(x^4 - 1)^2 = 0,$$

которое имеет корни $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

Корень $x_3 = 1$ является посторонним, возникшим в результате умножения обеих частей уравнения на многочлен $(x - 1)^2$.

Ответ: 0 ; –1.

Использование суперпозиции функций

Иногда можно найти корень уравнения, если заметить, что функция, находящаяся в одной из частей уравнения, является суперпозицией некоторых более простых функций.

***Теорема* 2.1.** Если функция $f(x)$ строго возрастает на некотором промежутке, то уравнения $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ равносильны на этом промежутке.

Следствие. Если n – натуральное число, а функция $f(x)$ монотонно возрастает, то уравнения $f(x) = x$ и

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n\ \text{раз}} = x$$

имеют одно и то же множество корней.

***Пример* 2.20**. Решить уравнение

$$(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5-x=0. \qquad (2.6)$$

Решение. Обозначим $f(x)=x^2+2x-5$, тогда уравнение (2.6) можно переписать в виде $f(f(x))=x$. По теореме 2.1: если x_0 – корень уравнения $f(x)=x$, то x_0 и корень уравнения $f(f(x))=x$. Корни уравнения $x^2+2x-5=x$ $\left(x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\right)$ являются и корнями уравнения (2.6).

Переписав уравнение (2.6) в виде

$$x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0 \qquad (2.7)$$

и разделив многочлен $x^4+4x^3-4x^2-17x+10$ на многочлен $(x-x_1)(x-x_2)$, получим, что уравнение (2.7) можно записать в виде

$$(x^2+2x-5)(x^2+3x-2)=0.$$

Следовательно, корнями уравнения (2.6) наряду с корнями x_1 и x_2 являются также корни уравнения $x^2+3x-2=0$, т.е. числа $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_3=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_4=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Использование ограниченности функций

Если при решении уравнения $f(x)=g(x)$ удается показать, что для всех x из ОДЗ справедливы неравенства $f(x)\le A$ и $g(x)\ge A$, то уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$

***Пример* 2.21**. Решить уравнение $4x^2+4x+17=\dfrac{12}{x^2-x+1}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+16=\frac{12}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Для любых действительных x имеем

$$g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\geq 4,\ f(x)=\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\leq 4.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=4,\\ \dfrac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=4,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0,\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0,\end{cases}$$

которая решений не имеет, поэтому исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Использование неотрицательности функций

Основано на свойстве $f^{2k}(x)+g^{2n}(x)+\ldots+h^{2m}(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)=0,\\ \ldots\\ h(x)=0,\end{cases}$

так как $f^{2k}(x)\geq 0,\ g^{2n}(x)\geq 0,\ldots,h^{2m}(x)\geq 0.$

***Пример* 2.22**. Решить уравнение $(x^2-5x+6)^4+\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2=0.$

Решение.

$$\left(x^2-5x+6\right)^4+\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ \dfrac{x-3}{x-2}=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=2; \end{array}\right. \\ x=3, \\ x\neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

Рассмотрим методы, в которых используются графики функций.

Для решения уравнения $f(x)=g(x)$ графическим методом необходимо построить графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в одной системе координат и найти точки их пересечения. Тогда *абсциссы* точек пересечения и будут корнями уравнения.

Рассмотрим применение этого метода на примере решения квадратного уравнения $x^2+2x-8=0$. Существует несколько способов решения.

Первый способ. Строят график функции $y=ax^2+bx+c$ и находят точки его пересечения с осью *x*. Абсциссы этих точек пересечения и будут корнями уравнения.

Построим график функции $y=x^2+2x-8$:

1. $a=1, b=2, x_0=-\dfrac{b}{2a}=-1, y_0=-9.$ Значит, вершиной параболы является точка $(-1;-9),$ а осью параболы – прямая $x=-1$. Ветви параболы направлены вверх.
2. Строим по точкам параболу, пользуясь ее симметричностью относительно прямой $x=-1$(рис. 2.1):

x	0	1	2
y	–8	–5	0

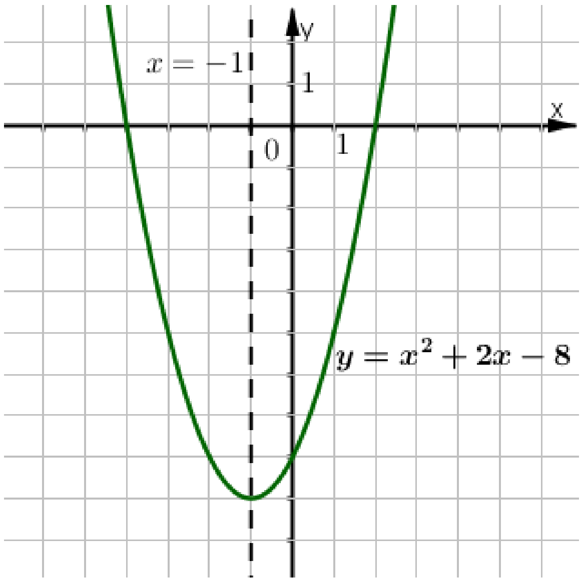

Рис.2.1. График функции $y = x^2 + 2x - 8$

Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения параболы с осью x; значит, корни уравнения таковы: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Второй способ. Строят параболу $y = ax^2$ и прямую $y = -bx - c$, находят точки их пересечения (корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения, если, разумеется, таковые имеются).

Преобразуем уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$ к виду $x^2 = -2x + 8$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = -2x + 8$ (рис. 2.2).

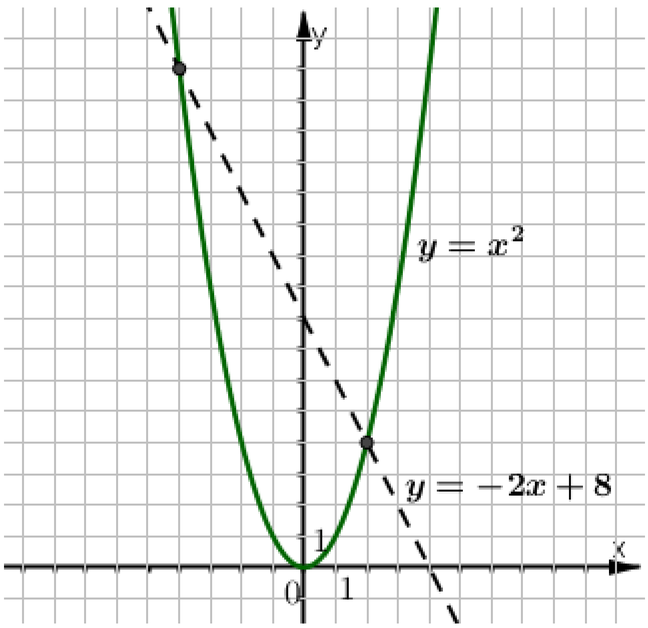

Рис.2.2. Графики функций $y = x^2$ и $y = -2x + 8$

Они пересекаются в двух точках $(-4;16)$ и $(2;4)$. Корнями уравнения являются абсциссы точек $x_1 = -4,\ x_2 = 2$.

Третий способ. Преобразуют уравнение к виду $ax^2 + c = -bx$, строят параболу $y = ax^2 + c$ и прямую $y = -bx$ (она проходит через начало координат). Затем находят абсциссы их точек пересечения.

Четвертый способ. Применяя метод выделения полного квадрата, преобразуют уравнение к виду $a(x+l)^2 + m = 0$ или $a(x+l)^2 = -m$. Строят параболу $y = a(x+l)^2$ и прямую $y = -m$, параллельную оси *x*; находят абсциссы точек пересечения параболы и прямой.

Пятый способ. Преобразуют уравнение к виду

$$\frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x} = \frac{0}{x},$$

то есть

$$ax + b + \frac{c}{x} = 0,$$

и далее

$$\frac{c}{x} = -ax - b.$$

Строят гиперболу $y = \frac{c}{x}$ (это гипербола при условии, что $c \neq 0$) и прямую $y = -ax - b$; находят абсциссы их точек пересечения.

Преобразуем уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$ к виду $\frac{8}{x} = x + 2$ и построим в одной системе координат графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = x + 2$ (рис. 2.3).

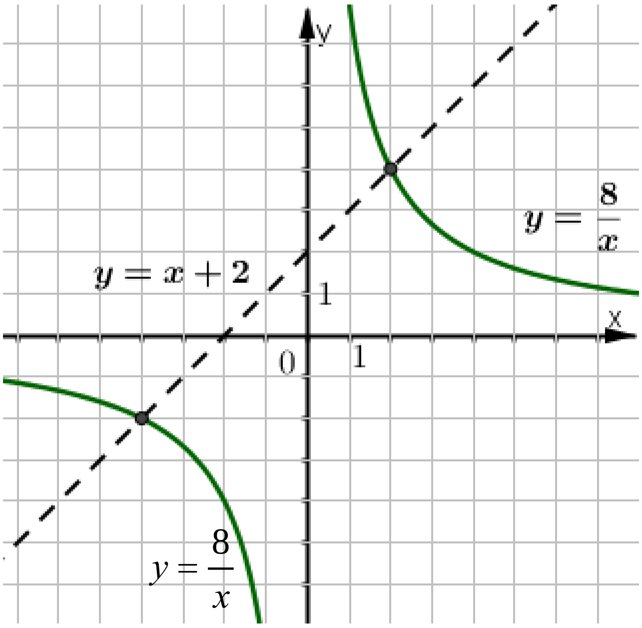

Рис.2.3. Графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = x + 2$

Находим абсциссы точек пересечения $x_1 = -4,\ x_2 = 2$.

Заметим, что первые четыре способа применимы к любым уравнениям вида $ax^2 + bx + c = 0$, а пятый – только к тем, у которых $c \neq 0$. На практике можно выбирать тот способ, который вам кажется наиболее рациональным при решении данного уравнения.

Несмотря на обилие способов решения квадратных уравнений графическим методом, уверенности в том, что любое квадратное уравнение мы сможем решить графически, нет. Мы не всегда сможем с помощью чертежа точно определить абсциссы точек пересечения графиков функций. Поэтому чаще всего графический метод применяется для определения количества корней квадратного уравнения.

Рассмотрим пример графического решения кубического уравнения.

***Пример* 2.23**. Решить графически уравнение $x^3 + x + 2 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x^3 = -x - 2$ и построим в одной системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = -x - 2$ (рис. 2.4).

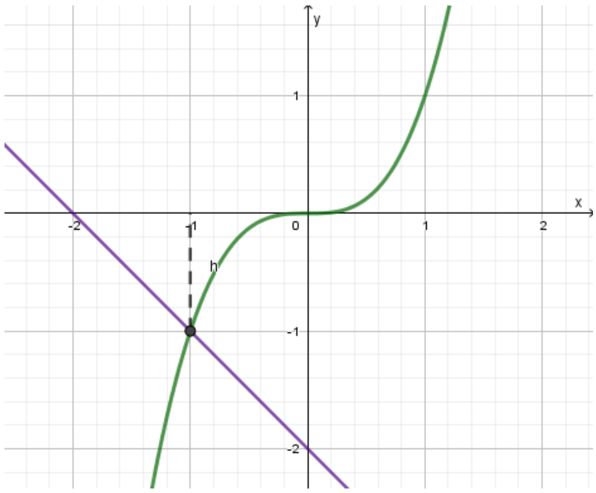

Рис.2.4. Графики функций $y = x^3$ и $y = -x - 2$

Находим абсциссу точки пересечения графиков $x = -1$.

Ответ: – 1.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/view7549790

2.3. Общие методы решения рациональных неравенств

Метод интервалов

Метод интервалов является одним из основных методов решения рациональных неравенств. Он применяется после приведения неравенства к виду

$$p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_n(x) \vee 0,$$

где $p(x)$ и $g(x)$– многочлены первой или второй степени, а символ $\vee$ заменяет один из знаков $>, <, \geq, \leq$ иоснован на правиле определения знака произведения или частногонескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного. При этом используются следующие факты:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).

2. Знак произведения не изменится (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.

3. Знак многочлена справа от большего (или единственного) корня совпадает со знаком его старшего коэффициента. В случае отсутствия корней знак многочлена совпадает со знаком его старшего коэффициента на всей числовой прямой.

4. Любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение множителей следующего вида $(ax+b)^m$и $(a_1x^2+b_1x+c_1)^n$, где $b_1^2-4a_1c_1<0$, $m, n\in N$.

5. Многочлен $(ax+b)^m$при нечетном mменяет знак в точке $x=-\frac{b}{a}$ (в которой он равен нулю) и удовлетворяет неравенству $(ax+b)^m\geq 0$ при четном m.

Алгоритм решения рационального неравенства *методом интервалов* состоит в следующем:

1. Многочлен раскладываем на неприводимые множители, т.е. приводим многочлен к виду

$$p(x)=a(x^2+b_1x+c_1)^{k_1}...(x^2+b_sx+c_s)^{k_s}(x-x_1)^{n_1}...(x-x_l)^{n_l}. \quad (2.8)$$

Если неравенство дано в виде (2.8), этот шаг пропускаем.

2. Находим корни многочлена и отмечаем их на числовой оси. Если данное неравенство является строгим, то нули отмечаются особым образом («выкалываются») и обычно изображаются пустыми кружочками. Если неравенство нестрогое, нули многочлена являются решениями неравенства, и, чтобы не забыть ни один из них, лучше изобразить их закрашенными(бросающимися в глаза) кружочками.

3. Корни многочлена разбивают числовую ось на несколько интервалов, на каждом из которых многочлен принимает значения одногознака.

Определяем знак на каждом из полученных интервалов по знаку в одной из точек интервала (такие точки иногда называют пробными) или в зависимости от знака коэффициента a по следующему правилу:

1. На крайнем правом полуинтервале (когда $x > x_1$) знак многочлена совпадает со знаком коэффициента a.

2. Будем перемещаться по числовой оси влево. При прохождении очередного корня x_i знак многочлена меняем на противоположный, если множитель $(x - x_i)^{n_i}$ имеет нечетную степень n_i (в том числе единицу), и оставляем прежний знак, если эта степень четная (в этом случае корень x_i называют *двойным* и отмечают на числовой оси двойным подчеркиванием).

3. В зависимости от того, какой знак у рассматриваемого неравенства, выбираем «положительные» или «отрицательные» интервалы и записываем ответ.

Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (*кривой знаков*), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком $p(x)$ в рассматриваемом промежутке. Промежутки, которые содержат точки, удовлетворяющие данному неравенству, покрывают штрихами.

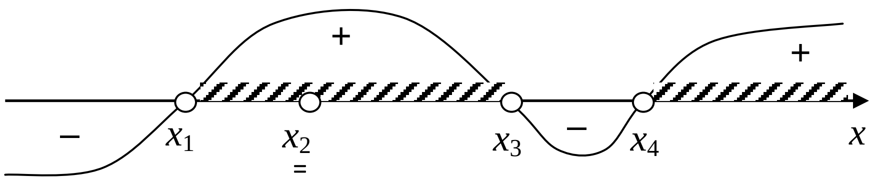

Рис. 2.5. Кривая знаков

Например, для кривой знаков, изображенных на рис. 2.5, получаем следующее решение неравенства $p(x) > 0$: $(x_1, x_2) \cup (x_2, x_3) \cup (x_4, +\infty)$.

***Пример* 2.24.** Решите неравенство

$$(1-3x)^7(3-2x)^2(1+3x)^3(2-x)^5x^3(x+2)^4(x+3)^3 > 0.$$

Решение.Найдем корни множителей:

$1 - 3x = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{3};$

$3 - 2x = 0,$ $\qquad x_2 = 1\frac{1}{2};$

$1 - 3x = 0,$ $\qquad x_3 = -\frac{1}{3};$

$2 - x = 0,$ $\qquad x_4 = 2;$

$x = 0,$ $\qquad x_5 = 0;$

$x + 2 = 0,$ $\qquad x_6 = -2;$

$x + 3 = 0,$ $\qquad x_7 = -3.$

Отметим их на числовой оси (рис. 2.6).

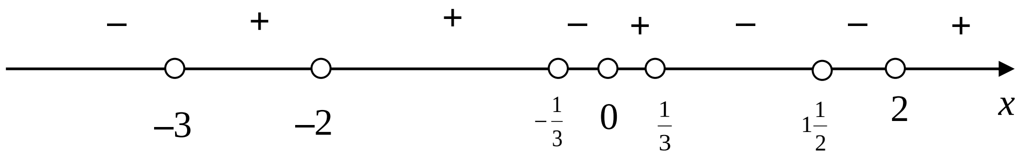

Рис. 2.6. Корни множителей на числовой прямой

Расставим знаки в интервалах. В интервале $(2; +\infty)$ знак исходного выражения – плюс, так как количество отрицательных коэффициентов при переменной x чётно $(1 - 3x)^7(3 - 2x)^2(2 - x)^5$, т.е. $7 + 2 + 5 = 14$ – чётное число.

В интервале $(1\frac{1}{2};\ 2)$ знак минус, так как $(2 - x)^5$ – количество множителей, имеющих корень 2, – нечётное число 5. В интервале ($\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{2}$) знак минус, так как $(3 - 2x)^2$ – количество множителей, имеющих корень $1\frac{1}{2}$, – чётное число 2.

В интервале $(0;\ \frac{1}{3})$ знак плюс, так как $(1 - 3x)^7$ – количество множителей, имеющих корень $\frac{1}{3}$, – нечётное число 7 . В интервале $(-\frac{1}{3};\ 0)$ знак минус, так как x^3 – количество множителей, имеющих корень 0, – нечётное число 3. В интервале $(-2;\ -\frac{1}{3})$ знак плюс, так как $(1 + 3x)^3$ –

количество множителей, имеющих корень $-\frac{1}{3}$, –нечётное число 3. В интервале (-3; -2) знак плюс, так как $(x+2)^4$ – количество множителей, имеющих корень –2, – чётное число 4.

В интервале $(-\infty;\ -3)$ знак минус, так как $(x+3)^3$ – количество множителей, имеющих корень –3, –нечётное число 3.

Решением неравенства является объединение всех интервалов со знаком плюс:

$$(-3\,;-2) \cup (-2\,;-\frac{1}{3}) \cup (0\,;\frac{1}{3}) \cup (2\,;+\infty).$$

Ответ: $x \in (-3;-2) \cup (-2;-\frac{1}{3}) \cup (0;\frac{1}{3}) \cup (2;+\infty)$.

***Пример* 2.25.** Решите неравенство $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0$.

Решение. Приведем сначала неравенство к виду, позволяющему применить метод интервалов, т.е. разложим правую часть на множители.

$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = x(x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6) =$$

$$= x(x-1)(x^2 - 5x - 6) = x(x-1)(x-2)(x-3) < 0.$$

Строим кривую знаков (рис.2.7).

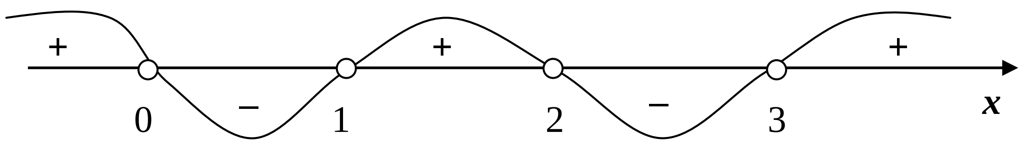

Рис. 2.7. Кривая знаков

При решении *дробно-рациональных неравенств* $\frac{p(x)}{g(x)} \vee 0$ необходимо исключить из рассмотрения такие значения *x*, при которых многочлен $g(x)$ обращается в ноль.

Таким образом, ***алгоритм*** решения дробно-рационального неравенства *методом интервалов* состоит в следующем:

1. Находим корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнений $p(x) = 0$ и $g(x) = 0$ и отмечаем их на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а незакрашенными – не удовлетворяющие ему.

2. Точки x_1, x_2, …, x_n разбивают числовую ось на промежутки, в которых выражение $\dfrac{p(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак. Определяем и отмечаем на числовой оси знаки выражения $\dfrac{p(x)}{g(x)}$ для значений x, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Если функции $p(x)$ и $g(x)$ являются многочленами и не содержат множителей вида $(x-x_i)^{2n}$, где $n \in N$, то достаточно определить знак функции $\dfrac{p(x)}{g(x)}$ в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки «плюс» и «минус» будут чередоваться. Если же в числителе или знаменателе дроби $\dfrac{p(x)}{g(x)}$ имеется множитель вида $(x-x_i)^{2n}$, где $n \in N$, то непосредственной проверкой выясняют, удовлетворяет ли значение $x = x_i$ заданному неравенству.

***Пример* 2.26.** Решите неравенство

$$\frac{x^2-3x-18}{13x-x^2-42} \geq 0.$$

*Решение.*Приведем сначала неравенство к виду, позволяющему применить метод интервалов. Получаем последовательно:

$$\frac{x^2-3x-18}{x^2-13x+42} \leq 0, \quad \text{или} \quad \frac{(x-6)(x+3)}{(x-6)(x-7)} \leq 0.$$

Сократив дробь на $x - 6$ при условии, что $x \neq 6$, получим:

$$\frac{x+3}{x-7} \leq 0,$$

откуда (рис. 2.8) находим $-3 \leq x < 7$. Исключив из этого промежутка точку $x = 6$, получим решение заданного неравенства $-3 \leq x < 6$; $6 < x < 7$.

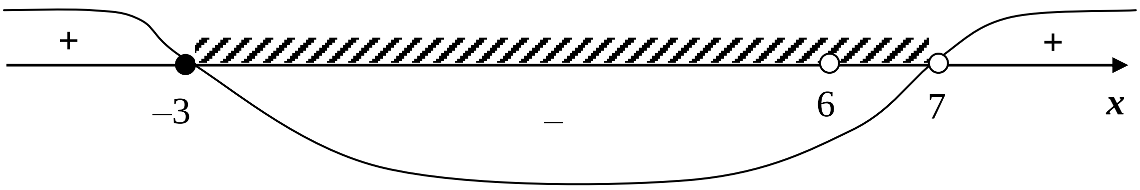

Рис. 2.8. Решение неравенства

Ответ:[–3; 6)$\cup$(6; 7).

Метод замены переменной

Метод замены переменной, рассмотренный в предыдущем параграфе, можно применять и при решении неравенств. Если неравенство приводится к виду $f(g(x)) \vee 0$, то можно ввести новую переменную $y = g(x)$, решить неравенство $f(y) \vee 0$ относительно переменной y и затем решить полученные неравенства с первоначальной переменной x.

***Пример* 2.27.** Решить неравенство $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4\le 0.$

Решение. Пусть $\dfrac{x^2+x-5}{x}=y,$ тогда получаем неравенство

$$y+\frac{3}{y}+4\le 0 \Leftrightarrow \frac{y^2+4y+3}{y}\le 0.$$

Используя метод интервалов в последнем неравенстве, находим его решения $y \le -3$ или $-1 \le y < 0$. Возвращаемся к первоначальной переменной и решаем неравенства

$$\frac{x^2+x-5}{x}\le -3 \quad \text{и} \quad -1\le \frac{x^2+x-5}{x}<0.$$

Первое неравенство приводим к виду $\dfrac{x^2+4x-5}{x}\le 0$ и находим его решения $x \le -5$ или $0 < x \le 1$.

Двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-5}{x} \ge 0, \\ \dfrac{x^2+x-5}{x} < 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $-1-\sqrt{6} \le x < \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ или $-1+\sqrt{6} \le x < \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

Объединяя полученные решения с найденными выше, записываем ответ.

Ответ: $(-\infty;-5] \cup \left[-1-\sqrt{6};\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup (0;1] \cup \left[-1+\sqrt{6};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Иногда при решении неравенств полезно вводить две новых переменных.

***Пример* 2.28.** Решить неравенство

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2} + \frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2} \le \frac{(2x^2-x+5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Решение. Входящие в неравенство выражения имеют смысл при $x \ne -2$ и $x \ne 3$. При всех остальных значениях x неравенство равносильно следующему:

$$2(x-3)^2(x-1)^2 + 2(x+2)^2(x+1)^2 \le (2x^2-x+5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-4x+3)^2 + 2(x^2+3x+2)^2 \le (2x^2-x+5)^2.$$

Заметим, что

$$(x^2-4x+3)+(x^2+3x+2) = 2x^2-x+5.$$

Пусть $x^2-4x+3=a$ и $x^2+3x+2=b$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$2a^2+2b^2 \le (a+b)^2 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2 \le a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \le 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \le 0.$$

Отсюда следует, что $a=b.$ Выполняя обратную замену, получаем

$$x^2-4x+3 = x^2+3x+2,$$

$$x = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{7}$.

Метод знакотождественных множителей

Метод знакотождественных множителей заключается в замене одного или нескольких множителей в левой части неравенств вида

$$p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot\ldots\cdot p_n(x)\vee 0 \quad \text{или} \quad \frac{p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot\ldots\cdot p_n(x)}{p_{n+1}(x)\cdot p_{n+2}(x)\cdot\ldots\cdot p_{n+m}(x)}\vee 0$$

знакотождественным выражением (т.е. имеющим соответственно одни и те же промежутки знакоположительности, знакоотрицательности и нули). Для рациональных неравенств таких пар знакотождественных выражений всего две:

1. Разность одинаковых нечётных степеней двух выражений можно заменять разностью этих выражений:
$$p(x) = u^{2n+1}(x) - v^{2n+1}(x) \text{ и } b(x) = u(x) - v(x).$$
2. Разность одинаковых чётных степеней двух выражений можно заменять разностью квадратов этих выражений
$$p(x) = u^{2n}(x) - v^{2n}(x) \text{ и } b(x) = u^2(x) - v^2(x).$$

То, что указанные пары знакотождественны, следует из монотонноговозрастания степенной функции: на всей числовой оси для нечётных степеней, на множестве неотрицательных чисел — для чётных степеней. В силу монотонного возрастания функции $y= t^{2n+1}$ (здесь $n\in N$) разности $t_1^{2n+1}-t_2^{2n+1}$ и $t_1 - t_2$ являются числами одного знака при любом значении переменной; аналогично в силу неотрицательности $t_1^2-t_2^2$ и возрастания функции $y= t^n$при $t\geq 0$ (для любого $n\geq 2$, $n\in N$) разности $t_1^{2n}-t_2^{2n}$ и $t_1^2-t_2^2$ являются числами одного знака при любом значении переменной.

***Пример* 2.29.** Решите неравенство $(3x+ 2)^6\leq (2x+ 3)^3$.

Решение. Перенесём выражение из правой части неравенства в левую и запишем полученную разность в виде разности кубов:

$$\left((3x+2)^2\right)^3-(2x+3)^3\le 0.$$

Применив метод знакотождественных множителей, придём к неравенству

$$(3x+2)^2-(2x+3)\le 0,$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим квадратное неравенство $9x^2+10x+1\le 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части неравенства являются числа -1 и $-\frac{1}{9}$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена множество решений неравенства имеет вид $\left[-1;-\frac{1}{9}\right]$.

Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{9}\right]$.

Использование ограниченности функций

Иногда неравенство $f(x)\vee g(x)$ устроено так, что при всех допустимых значениях неизвестной x имеют место неравенства $f(x)\ge A$ и $g(x)\le A$ при некотором A. В этом случае:

а) решение неравенства $f(x)\le g(x)$ сводится к нахождению тех значений x, для которых одновременно $f(x)=A$ и $g(x)=A$;

б) неравенство $f(x)<g(x)$ не имеет решений;

в) решение неравенства $f(x)\ge g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x)\ge A$, для которых определена функция $g(x)$;

г) неравенство $f(x)>g(x)$ верно для всех допустимых значений x.

***Пример* 2.30.** Решите неравенство

$$(x^2+2x+3)(x^2+2x+4)(x^2+2x+5)(x^2+2x+6)\le 120.$$

Решение. Первый способ. Выделим полные квадраты:

$$\left((x+1)^2+2\right)\left((x+1)^2+3\right)\left((x+1)^2+4\right)\left((x+1)^2+5\right)\le 120.$$

Поскольку $(x+1)^2 \ge 0$, то при любом значении переменной значение выражения $(x+1)^2+2$ не меньше 2, значение выражения $(x+1)^2+3$ не меньше 3,значение выражения $(x+1)^2+4$ не меньше 4, значение выражения $(x+1)^2+5$ не меньше 5. Следовательно, произведение в левой части неравенства не меньше $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Поэтому неравенство будет выполнено, только если его левая часть равна 120, что возможно лишь в случае $(x+1)^2 = 0$, откуда $x = -1$.

Второй способ. Пусть $t = x^2 + 2x$, тогда неравенство примет вид

$$(t+3)(t+4)(t+5)(t+6) \le 120.$$

Перемножив первую скобку с последней, а вторую с третьей, неравенство можно переписать в виде

$$(t^2+9t+18)(t^2+9t+20) \le 120.$$

Обозначив $y = t^2 + 9t + 19$, получим неравенство

$$(y-1)(y+1) \le 120,$$

$$y^2 - 121 \le 0,$$

$$-11 \le y \le 11.$$

Возвращаясь к переменной t, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} t^2+9t+19 \ge -11, \\ t^2+9t+19 \le 11; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+9t+30 \ge 0, \\ t^2+9t+8 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in R, \\ -8 \le t \le -1. \end{cases}$$

Переходяк переменной x, получаем:

$$\begin{cases} x^2+2x \ge -8, \\ x^2+2x \le -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+8 \ge 0, \\ x^2+2x+1 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ (x+1)^2 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\{-1\}$.

Использование неотрицательности функций

При решении неравенств вида

$$f^{2k}(x) + g^{2n}(x) + \ldots + h^{2m}(x) \vee 0$$

используется неотрицательность выражений

$$f^{2k}(x) \geq 0,\ g^{2n}(x) \geq 0, \ldots, h^{2m}(x) \geq 0.$$

Решениями неравенств вида $f^{2k}(x)+g^{2n}(x)+\ldots+h^{2m}(x) \geq 0$ являются все x из ОДЗ неравенства.

Решениями неравенств вида $f^{2k}(x)+g^{2n}(x)+\ldots+h^{2m}(x) > 0$ являются все x из ОДЗ неравенства, за исключением тех значений x, которые не являются решениями системы уравнений $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0, \\ \ldots \\ h(x)=0. \end{cases}$

Неравенства вида $f^{2k}(x)+g^{2n}(x)+\ldots+h^{2m}(x) < 0$ решений не имеют, а

$$f^{2k}(x)+g^{2n}(x)+\ldots+h^{2m}(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0, \\ \ldots \\ h(x)=0. \end{cases}$$

***Пример* 2.31.** Решите неравенство $\left(\dfrac{2x-2}{x+4}\right)^2+(x^2-2x+1)^4>0$.

Решение. Решением неравенства являются все значения x из ОДЗ: $x \neq -4$, за исключением значений, обращающих в ноль каждое из слагаемых одновременно $\begin{cases} 2x-2=0, \\ x^2-2x+1=0; \end{cases}$ т.е. $x = 1$.

Ответ: $x \in R \setminus \{-4;1\}$.

Использование монотонности функций

***Теорема* 2.2.** *Если функция $f(t)$ строго возрастает на R, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.*

***Теорема* 2.3.** *Если функция $f(t)$ строго убывает на R, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.*

Следствие. Так как функция $f(t)=t^{2n+1}$ строго возрастает на *R, то равносильны неравенства*: $(h(x))^{2n+1} > (g(x))^{2n+1} \Leftrightarrow h(x) > g(x), n \in N$.

***Пример* 2.32.** Решите неравенство $x^5+1<0$.

Решение. Запишем неравенство в виде $x^5<(-1)^5$. Функция $y=x^5$ строго возрастает на R,поэтому последнее неравенство равносильно неравенству $x<-1$.

Ответ: $(-\infty;-1)$.

***Пример* 2.33.** Решите неравенство $(2x^2+1)^5-(3x)^5>3x-2x^2-1$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$(2x^2+1)^5+2x^2+1>(3x)^5+3x. \tag{2.9}$$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^5+t$, определенную при всех действительных значенияхt. Тогда неравенство (2.9) примет вид

$$f(2x^2+1)>f(3x). \tag{2.10}$$

Так как функция $f(t)$ строго возрастает как сумма двух возрастающих функций, то неравенство (2.10) равносильно неравенству $2x^2+1>3x$, решением которого являются $x<0{,}5$ или$x>1$.

Ответ: $(-\infty;0{,}5)\cup(1;+\infty)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/view7590603

2.4. Задания для самостоятельного решения

Задание 1.Равносильны ли следующие пары уравнений?

1.1.

а) $x^3+x=0$ и $\frac{x^3+x}{x}=0$;**б)** $x^2+1=0$ и $\frac{x^2+1}{x}=0$.

1.2.

а) $\dfrac{2x^2+2x+3}{x+3}=\dfrac{3x^2+2x-1}{x+3}$ и $2x^2+2x+3=3x^2+2x-1$;

б) $\dfrac{2x^2+2x+3}{x+2}=\dfrac{3x^2+2x-1}{x+2}$ и $2x^2+2x+3=3x^2+2x-1$.

Задание 2. Равносильны ли следующие пары неравенств?

2.1.

а) $-4x^2+14x-12>0$ и $2x^2-7x+6<0$; **б)** $(2y^2+3)(7y-6)>0$ и $-7y+6>0$.

2.2.

а) $\dfrac{t(11t+6)}{-t^2-2}<0$ и $11t^2+6t>0$; **б)** $x^2\geq 25$ и $x\geq 5$.

2.3.

а) $(x-1)(x+2)\leq 0$ и $x^2+x\leq 2$; **б)** $\dfrac{1}{x-2}>0$ и $x^2-4>0$.

Задание 3. Решить уравнения методом разложения на множители.

3.1.

а) $x^3+5x^2-4x-20=0$; **б)** $x^3+x^2-9x-9=0$; **в)** $x^3-3x^2-4x+12=0$.

3.2.

а) $x^5+8x^4+12x^3=0$; **б)** $x^5-36x^3+8x^2-288=0$; **в)** $x^5-25x^3+27x^2-675=0$.

3.3.*

а) $(x-11)^3+4(x-11)^2=0$; **б)** $(x-25)^3+6(x-25)^2=0$.

Задание 4. Решите уравнение методом введения новой переменной.

4.1.

а) $(2x-21)^2-5(2x-21)+4=0$; **б)** $x^4-13x^2+12=0$; **в)** $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2{,}9$.

4.2.

а) $(x+1)^2\cdot(x^2+2x)=12$; **б)** $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1)=28$.

4.3.*

а) $x(x+4)(x+5)(x+9)+96=0$; **б)** $(x^2-5x)(x+3)(x-8)+108=0$.

4.4.**

а) $(x-3)(x+6)(x^2-2x-8)=126x^2$; **б)** $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$

Задание 5. Решить уравнения функционально-графическим методом.

5.1.

а) $2x^2=-2x+4$; **б)** $4x^2-3x+2=0$; **в)** $-0{,}5x^2+8=0.$

5.2.

а) $x=\sqrt[3]{x}$; **б)** $\frac{5}{x}-x=4$; **в)** $\frac{3}{x}=\frac{x}{3}$; **г)** $-\frac{4}{x}=3-x.$

5.3.*

а) $\frac{2x^3+2x^2}{x+1}=0$; **б)** $\frac{3x^3-3x^2}{x-1}=0$; **в)** $\frac{-0{,}5x^3+x^2}{x-2}=0.$

5.4.**

а) $\frac{x-3}{x^2-3x}=0$; **б)** $\frac{2x+2}{x^2+x}=0$; **в)** $\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+2x}=0.$

Задание 6. Решить неравенства.

6.1.

а) $x^3(x-1)^2<0$;

б) $(2-x)(3x+1)(2x-1)<0$;

в) $(x-3)^3(x-1)^3(3x-2)(x+2)^4<0$;

г) $\frac{(x-1)(3x-2)}{5-2x}\ge 0$;

д) $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}\ge 0$;

е) $(x+7)(x^2-4)(x-1)^2\le 0.$

6.2.

а) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}>0;$

б) $\dfrac{x^2-4x-2}{9-x^2}<0;$

в) $\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25}\ge 0;$

г) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0.$

6.3.*

а) $\dfrac{(x^3+3x-4)(x-2)^2}{x^3-2x-4}\ge 0;$

б) $x^2+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}>0;$

в) $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}<5.$

6.4.

а) $\dfrac{(x^2-9)(x-5)(2x-3-3x^2)}{x^2+7x+12}\le 0;$

б) $\dfrac{x^3(2-x)^3(x+1)(-2-x)^3(3-x)^2}{(3-2x)^2(-x-1)^4}\le 0;$

в) $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-6x+8)(x^2+4x+4)<0.$

6.5.**

а) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+2x+2}\ge 0;$

б) $(x^2-x-1)(x^2-x-7)<-5;$

в) $2x^2+2x+1-\dfrac{15}{x^2+x+1}<0;$

г) $\dfrac{x^3-3x^2+2x+1}{x-1} > \dfrac{x^3-2x^2+2}{x}$;

д) $\dfrac{x^2-x+1}{x-1} + \dfrac{x^2-3x+1}{x-3} > 2x - \dfrac{1}{4x-8}$.

3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. Рациональные уравнения

Уравнение вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0,$$

называется ***целым рациональным уравнением***.

При $n = 3$ и $n = 4$ существуют формулы для нахождения корней алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Однако, в силу их громоздкости, они применяются редко.

3.1.1. Линейные, квадратные и трехчленные уравнения

В случае $n = 1$ уравнение обычно записывается в виде

$$ax + b = 0,\ \ a \neq 0$$

и называется ***линейным*** уравнением, которое имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{a}$.

В случае $n = 2$ уравнение называется ***квадратным***и записывается в виде

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где коэффициенты a, b, c – любые действительные числа, причем $a \neq 0$. Коэффициенты a, b, c различают по названиям: *a – первый,* или *старший, коэффициент*; *b* – *второй коэффициент*, или *коэффициент* при *x*; *c* – *свободный член*.

Полным квадратным уравнением называют квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых; другими словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и c отличны от нуля.

Неполным квадратным уравнением называют квадратное уравнение, в котором присутствуют не все три слагаемых; другими словами, это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов b, c равен нулю. Например, уравнение $3x^2+2x=0$ является неполным, так как коэффициент $c=0$; уравнение $-3x^2=0$ является неполным, так как $b=c=0$.

Рассмотрим решение неполных квадратных уравнений:

1. Если уравнение имеет вид $ax^2=0$, то оно имеет один корень: $x=0$.
2. Если уравнение имеет вид $ax^2+bx=0\ (b\neq 0)$, то используется метод разложения на множители: $x(ax+b)=0$; значит, либо $x=0$, либо $ax+b=0$. В итоге получаем два корня: $x_1=0,\ x_2=-\dfrac{b}{a}$.
3. Если уравнение имеет вид $ax^2+c=0,\ (c\neq 0)$, то его преобразуют к виду $ax^2=-c$ и далее $x^2=-\dfrac{c}{a}$. В случае, если $-\dfrac{c}{a}<0$, уравнение $x^2=-\dfrac{c}{a}$ не имеет действительных корней (значит, не имеет корней и исходное уравнение $ax^2+c=0$). В случае, когда $-\dfrac{c}{a}>0$, уравнение $x^2=-\dfrac{c}{a}$ (а значит, и уравнение $ax^2+c=0$) имеет два корня: $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Общие приемы решения квадратных уравнений

1. *Формула корней квадратных уравнений*

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат. Имеем:

$$ax^2+bx+c=(ax^2+bx)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+c=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Обычно выражение b^2-4ac обозначают буквой D и называют ***дискриминантом квадратного уравнения*** $ax^2+bx+c=0$ (или *дискриминантом квадратного трехчлена* ax^2+bx+c, см. 1.1).

Таким образом,

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}.$$

Значит, квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ можно переписать в виде

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a}$$

и далее

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \tag{3.1}$$

Любое квадратное уравнение можно преобразовать к виду (3.1), удобному для того, чтобы определять число корней квадратного уравнения и находить эти корни.

***Теорема* 3.1**. *Если* $D<0$, *то квадратное уравнение* $ax^2+bx+c=0$ *не имеет корней*.

***Теорема* 3.2**. *Если* $D=0$, *то квадратное уравнение* $ax^2+bx+c=0$ *имеет один корень, который находится по формуле* $x=-\dfrac{b}{2a}$.

***Теорема* 3.3.** *Если* $D>0$, *то квадратное уравнение* $ax^2+bx+c=0$ *имеет два корня, которые находятся по формулам*:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \tag{3.2}$$

Доказательство теорем предоставляется читателям.

Формулы (3.2) можно объединить в одну формулу:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.3}$$

Алгоритм решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

1. Вычислить дискриминант D по формуле $D = b^2 - 4ac$.
2. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.
3. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень: $x = -\dfrac{b}{2a}$ (говорят также, что квадратное уравнение в этом случае имеет два одинаковых корня: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$).
4. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Этот алгоритм универсален, он применим как к полным, так и к неполным квадратным уравнениям. Однако неполные квадратные уравнения более рационально решать так, как было показано ранее.

На практике удобно иметь дело с квадратными уравнениями, у которых старший коэффициент положителен и является целым числом. Для этого обе части уравнения умножаются на соответствующее число.

***Пример* 3.1.** Решить уравнение $-\dfrac{1}{3}x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$.

Решение. Умножим обе части уравнения на –12:

$-12\left(-\dfrac{1}{3}x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right) = -12 \cdot 0$ или $4x^2 + 12x - 3 = 0$.

Тогда $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 144 + 48 = 192$. Так как $D > 0$, то данное уравнение имеет два корня: $x_1 = \dfrac{-12 + \sqrt{192}}{8} = \dfrac{-12 + 8\sqrt{3}}{8} = \dfrac{-3 + 2\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-3 - 2\sqrt{3}}{2}$.

2. ***Другая формула корней квадратного уравнения***

Пусть у квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$коэффициент b имеет вид $b=2k$. Подставив в формулу (3.3)число $2k$ вместо b, получим:

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}. \quad (3.4)$$

Итак, корни квадратного уравнения $ax^2+2kx+c=0$можно вычислять по формуле (3.4). Выражение k^2-acобозначают через D_1 или $\frac{D}{4}$, так как оно в четыре раза меньше обычного дискриминанта. Формула (3.4) позволяет значительно упростить вычисления.

***Пример* 3.2.** Решим уравнение $3x^2-10x+3=0$. Имеем:

$a=3,\ b=-10,\ c=3,\ k=-5.$

$D_1=k^2-ac=(-5)^2-3\cdot3=25-9=16=4^2>0-2$ корня.

$x_{1,2}=\frac{5\pm4}{3},$

$x_1=3,\ x_2=\frac{1}{3}.$

Ответ: $3,\ \frac{1}{3}.$

3. ***Теорема Виета***

Так как левая часть квадратного уравнения является квадратным трехчленом, то Теорема Виета, приведенная в разделе 1.1, может быть применена для нахождения корней квадратногоуравнения (или их суммы и произведения). Дадим ее формулировку.

***Теорема* 3.4** (Теорема Виета неполная). *Если* $x_1,\ x_2$ *– корни квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$, *тогда сумма корней равна* $-\frac{b}{a}$, *а произведение корней равно* $\frac{c}{a}$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

***Пример* 3.3.** Найдите сумму и произведение корней уравнения $5x^2 + 12x + 7 = 0$.

Решение. Для уравнения $5x^2 + 12x + 7 = 0$ можно, воспользовавшись теоремой Виета, сразу указать сумму и произведение корней, не находя сами корни. Так сумма корней равна $-\frac{12}{5}$, а их произведение равно $\frac{7}{5}$.

Ответ: $-\frac{12}{5}, \frac{7}{5}$.

Замечание. Теорема Виета справедлива и в том случае, когда квадратное уравнение имеет один корень (т.е. когда $D = 0$), просто в этом случае считают, что уравнение имеет два одинаковых корня, к которым и применяют указанные выше соотношения.

***Теорема* 3.5** (обратная теореме Виета). *Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то эти числа – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.*

Теорема 3.5 позволяет решать многие квадратные уравнения устно, избегая громоздких формул и вычислений, а также составлять квадратные уравнения с заданными корнями. При этом при подборе корней следует обратить внимание на следующие замечания:

1) если свободный член уравнения – положительное число, то оба корня либо положительны, либо отрицательны;

2) если свободный член уравнения – отрицательное число, то корни различны по знаку.

***Пример* 3.4.** Составим квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1 = 3$, $x_2 = -5$.

Решение. В таких случаях обычно составляют приведенное квадратное уравнение, т.е. уравнение $x^2 + px + q = 0$. Из теоремы 3.5 следует:

$\begin{cases} p = -(x_1 + x_2), \\ q = x_1 \cdot x_2. \end{cases}$. Отсюда $p = 2,\ q = -15$. Итак, искомое квадратное уравнение имеет вид $x^2 + 2x - 15 = 0$.

4. *Специальные методы решения квадратных уравнений*

Использование свойств коэффициентов квадратного уравнения

Рассмотрим решение квадратных уравнений, коэффициенты которых обладают определенными свойствами.

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

***Теорема* 3.6**. *Если* $a + b + c = 0$, *то* $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Доказательство. Разделим обе части квадратного уравнения на $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a},\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Так как $a + b + c = 0$, то $b = -(a + c)$, тогда

$$x_1 + x_2 = \frac{a + c}{a} = \frac{a}{a} + \frac{c}{a} = 1 + \frac{c}{a},$$
$$x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot \frac{c}{a}.$$

Отсюда следует, что $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{c}{a}$. Что и требовалось доказать.

***Пример* 3.5.** Решим с помощью теоремы 3.6 квадратное уравнение $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Для этого сначала выпишем коэффициенты данного уравнения: $a = 2,\ b = -5,\ c = 3$. Проверим условие теоремы 3.6: $a + b + c = 2 - 5 + 3 = 0$. Так как условие теоремы выполняется, то $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 1, $1\frac{1}{2}$.

***Теорема* 3.7**. *Если* $a-b+c=0$, *то* $x_1=-1,\ x_2=-\frac{c}{a}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.6.

***Пример* 3.6.** Решим квадратное уравнение $2x^2+3x+1=0$ с помощью теоремы 3.7. Выпишем коэффициенты уравнения: $a=2,\ b=3,\ c=1$. Очевидно, что $a-b+c=0$, тогда, согласно теореме 3.7, получаем: $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2}$.

Ответ: –1; –0,5.

***Теорема* 3.8**. *Если в квадратном уравнении* $ax^2+bx+a=0$ *коэффициент* $b=a^2+1$, *то* $x_1=-a,\ x_2=-\frac{1}{a}$.

Доказательство. Разделим обе части данного квадратного уравнения $ax^2+bx+a=0$ на $a\neq 0$:

$$x^2+\frac{b}{a}x+1=0.$$

По теореме Виета: $x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=1$. Так как $b=a^2+1$, то

$$x_1+x_2=-\frac{a^2+1}{a}=-\frac{a^2}{a}-\frac{1}{a}=-1-\frac{1}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=1=(-a)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right).$$

Отсюда следует, что $x_1=-a,\ x_2=-\frac{1}{a}$. Что и требовалось доказать.

***Пример* 3.7.** Решить уравнение $4x^2+17x+4=0$.

Решение. $a=c=4,\ b=17$. Так как $a=c=4$ и $17=4^2+1$, то мы можем воспользоваться теоремой 3.8: $x_1=-4,\ x_2=-\frac{1}{4}$.

Ответ: –4; –0,25.

***Теорема* 3.9**. *Если в квадратном уравнении* $ax^2 + bx + a = 0$ *коэффициент* $b = -(a^2 + 1)$, *то* $x_1 = a,\ x_2 = \dfrac{1}{a}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.8.

Рассмотренные выше теоремы позволяют значительно ускорить процесс решения квадратных уравнений и даже решать их устно.

***Пример* 3.8.** Решить уравнение $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

Решение. $a = c = 3,\ b = -10$. Так как $b = -10 = -(3^2 + 1)$, то мы можем воспользоваться теоремой 3.9: $x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{3}$ (сравните решение в примере 3.7).

Использование формул сокращенного умножения

В ряде случаев удобно решать квадратные уравнения с помощью формул сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

***Пример* 3.9.**Решить уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Решение. Уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$ можно решить с помощью формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Имеем: $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$. Отсюда, решая уравнение $(2x-3)^2 = 0$, находим $x = 1\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 1,5.

Использование формул квадрата суммы и квадрата разности двух выражений носит название *метода выделения полного квадрата*.

***Пример* 3.10.** Решим уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$методом выделения квадрата суммы двучлена:

$$x^2+6x+8=0,$$
$$(x^2+2\cdot 3\cdot x+9)-9+8=0,$$
$$(x+3)^2-1=0,$$
$$(x+3)^2=1.$$

$x + 3 = 1$ или $x + 3 = –1$

$x = –2$ $x = –4.$

В приведенном выше примере можно поступить и несколько иначе, а именно:

$$(x+3)^2-1=0,$$
$$(x+3-1)(x+3+1)=0,$$

$x + 3 – 1 = 0$ или $x + 3 + 1 = 0$

$x = –2$ $x = –4.$

Заметим, что метод выделения квадрата двучлена применим для любых квадратных уравнений, но не всегда удобен в использовании.

Разложение на множители

В ряде случаев удобно решать квадратные уравнения разложением на линейные множители. При этом чаще всего используется метод группировки.

***Пример* 3.11.** Решить уравнение $x^2+10x-24=0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2+10x-24=x^2+12x-2x-24=x(x+12)-2(x+12)=(x+12)(x-2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x+12)(x-2)=0.$$

Так как произведение равно нулю, то по крайне мере один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при $x = 2$, а также при $x = –12$. Это означает, что числа 2 и –12 являются корнями данного уравнения.

Ответ: 2; –12.

Метод «переброски» старшего коэффициента

В некоторых случаях бывает удобно решать сначала не данное квадратное уравнение, а приведенное, полученное «переброской» коэффициента *a*, а затем разделить найденные корни на *a* для нахождения корней исходного уравнения. Данный метод опирается на следующую теорему.

***Теорема* 3.10**. *Корни квадратных уравнений* $ax^2+bx+c=0$ *и* $y^2+by+ac=0$ *связаны соотношениями* $x_1=\frac{y_1}{a}$ и $x_2=\frac{y_2}{a}$.

Доказательство. По теореме, обратной к теореме Виета, имеем:

$$\begin{matrix} y_1+y_2=-b, \\ y_1\cdot y_2=ac \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{matrix}$$

Отсюда получаем:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{y_1+y_2}{a}=\frac{y_1}{a}+\frac{y_2}{a},$$
$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{y_1\cdot y_2}{a\cdot a}=\frac{y_1}{a}\cdot\frac{y_2}{a}.$$

То есть $x_1=\frac{y_1}{a}$ и $x_2=\frac{y_2}{a}$. Что и требовалось доказать.

***Пример* 3.12.** Заменим уравнение $2x^2-9x-5=0$ приведенным квадратным уравнением с «переброской» коэффициента *a*:

$$y^2-9y-5\cdot 2=0,$$
$$y^2-9y-10=0.$$

$D>0$, 2 корня. По теореме, обратной теореме Виета, подбором найдем корни:

$$\left.\begin{matrix} y_1+y_2=9, \\ y_1\cdot y_2=-10 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} y_1=10 \\ y_2=-1. \end{matrix}$$

Теперь вернемся к корням исходного уравнения:

$$x_1 = \frac{y_1}{a} = \frac{10}{2} = 5,$$
$$x_2 = \frac{y_2}{a} = \frac{-1}{2} = -0{,}5.$$

Ответ: 5; –0,5.

К решению квадратного уравнения сводится решение уравнений вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

где $a \neq 0$, $n \geq 2$, $n \in N$, которыеназываются ***трехчленными.***

Трехчленные уравнения решается с помощью подстановки $y = x^n$.

При n = 2 трехчленное уравнение называется***биквадратным***.

***Пример* 3.13.** Решить уравнение $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$.

Решение. Осуществим подстановку $y = x^2$. Получим квадратное уравнение относительно переменной *y*: $9y^2 - 37y + 4 = 0$. Решая его, находим: $y_{1,2} = \dfrac{37 \pm \sqrt{1225}}{18} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{1}{9}, \\ y_2 = 4. \end{array}$

Отсюда получаем:

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{3};$$
$$x^2 = 4 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2.$$

Ответ: $\pm\dfrac{1}{3}$, ± 2.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/view7590637

3.1.2. Дробно-рациональные уравнения

Сформулируем алгоритм решения дробно-рациональных уравнений.

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1. Перенести все члены уравнения в одну часть.
2. Преобразовать эту часть уравнения к виду алгебраической дроби $\dfrac{p(x)}{q(x)}$.
3. Решить уравнение $p(x)=0$.
4. Для каждого корня уравнения $p(x)=0$ сделать проверку: удовлетворяет ли он условию $q(x)\neq 0$ или нет. Если да, то это корень заданного уравнения; если нет, то это посторонний корень и его включать не следует.

Чтобы избежать ошибок при выполнении пунктов 3 и 4 алгоритма, можно воспользоваться следующим равносильным переходом:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x)=0, \\ q(x)\neq 0. \end{cases}$$

Данный переход опирается на утверждение, что дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

***Пример* 3.14.** Решить уравнение $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}-1=\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$.

Решение. Будем действовать в соответствии с алгоритмом.

1. Перенесем все члены уравнения в одну часть

$$\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}-1-\frac{3}{(x+1)(x-2)}=0.$$

2.Выполним преобразования левой части этого уравнения:

$$\frac{x+2}{x+1}^{\overline{|x-2}}+\frac{3}{x-2}^{\overline{|x+1}}-1^{\overline{|(x+1)(x-2)}}-\frac{3}{(x+1)(x-2)}=0;$$

$$\frac{x^2-4+3x+3-x^2+x+2-3}{(x+1)(x-2)}=0;$$

Таким образом, заданное уравнение принимает вид $\dfrac{4x-2}{(x+1)(x-2)}=0.$

Воспользуемся равносильным переходом.Полученное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 4x-2=0, \\ (x+1)(x-2)\neq 0. \end{cases}$

В итоге получаем $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ (\dfrac{1}{2}+1)(\dfrac{1}{2}-2)\neq 0 - \text{истина}. \end{cases}$

Ответ: 0,5.

При решении дробно-рациональных уравнений нужно быть внимательным при сокращении дробей, так как в этом случае можно получить посторонние корни.

***Пример* 3.15.** Решить уравнение $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}=\left(\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}\right):\dfrac{1+x^3}{x^2-x}.$

*Решени*е. Преобразуем сначала правую часть уравнения:

$$\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x}\right):\frac{1+x^3}{x^2-x}=\frac{x^2-x+1}{x(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x(x-1)}{(1+x)(x^2-x+1)}.$$

Свернем знаменатель левой части уравнения в полный квадрат:

$$\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x^2-x+1)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}(x+1)^2\cancel{(x-1)}\cancel{(x^2-x+1)}}\quad (x\neq 0; x\neq 1).$$

Сокращая дробь, не забудем, что найденные корни уравнения должны быть отличны от 0 и 1!

$$\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Следуя алгоритму решения дробно-рациональных уравнений, получаем:

$$\frac{x^2-1}{(x+1)^2}=0;\ \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0, \\ x+1\neq 0. \end{cases}$$

Из системы получаем, что $x=1$. Но в этом случае один из знаменателей равен нулю. Значит, уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Одним из частных случаев дробно-рациональных уравнений являются уравнения, содержащие взаимно-обратные выражения, т.е.уравнениявида $a\cdot\frac{f_1(x)}{f_2(x)}+b\cdot\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=c$,которые решаются с помощью подстановки $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=t$, тогда $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=\frac{1}{t}$ и уравнение принимает вид $a\cdot t+b\cdot\frac{1}{t}=c$, решение которого сводится к решению квадратного $a\cdot t^2-c\cdot t+b=0,\ (t\neq 0)$.

***Пример* 3.16.**Решить уравнение $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$.

Решение.Перепишем уравнение в виде $\frac{2x+1}{x}+4\cdot\frac{x}{2x+1}=5$. В этом случае $a=1,\ b=4,\ c=5$. Введем новую переменную $t=\frac{2x+1}{x}$,тогда исходное уравнение примет вид $t^2-5t+4=0,\ t\neq 0$. Отсюда находим корни квадратного уравнения по теореме 3.6: $t_1=1,\ t_2=4$. Переходя к обратной замене, получаем:

$$\frac{2x+1}{x}=1\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1-x=0,\\ x\neq 0;\end{cases}\Rightarrow x=-1;$$

$$\frac{2x+1}{x}=4\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1-4x=0,\\ x\neq 0;\end{cases}\Rightarrow x=0{,}5.$$

Ответ: –1; 0,5.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/view7590807

3.1.3.Возвратные уравнения

Возвратным уравнением называется уравнение вида

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_n x^{n+1} + \lambda a_n x^n + \lambda^3 a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \lambda^{2n+1} = 0,$$

если степень уравнения нечетная, и

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \lambda^n a_0 = 0,$$

если его степень четная. λ – некоторое число.

Например, уравнение $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 81x + 486 = 0$ является возвратным, здесь $\lambda = 3$. Чтобы лучше понять определение, запишем данное уравнение в виде

$$2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2 \cdot 3^1 \cdot x^2 + 3 \cdot 3^3 \cdot x + 2 \cdot 3^5 = 0.$$

Коэффициенты как бы симметричны, но присутствует множитель – степень числа 3, причем показатель степени этого числа меняется, принимая ***нечетные*** значения, от 5 до 1, считая от крайнего правого слагаемого.

Примером возвратного уравнения четной степени может служить также уравнение

$$4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 11x^3 + 6x^2 + 20x - 32 = 0.$$

Здесь число $\lambda = -2$. Посмотрим на другую запись этого уравнения:

$$4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3 \cdot (-2)^1 \cdot x^2 + 5 \cdot (-2)^2 \cdot x + 4 \cdot (-2)^3 = 0.$$

Симметрию коэффициентов нарушает множитель – степень числа (–2), причем показатель, в отличие от предыдущего примера, меняется от 3 (половина числа *n*) до 1 (т.е. принимает все целые значения от $\frac{n}{2}$ до 1), считая от крайнего правого слагаемого.

Более того, справедливы утверждения:

1. *Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень* $x = -\lambda$.

2. *В результате деления возвратного уравнения нечетной степени на* $(x + \lambda)$ *получается возвратное уравнение четной степени.*

Поэтому для решения возвратных уравнений достаточно научиться решать возвратные уравнения четной степени.

Решение возвратного уравнения четной степени $2n$ осуществляется подстановкой $y = x + \frac{\lambda}{x}$ и далее сводится к решению уравнения n-й степени, а затем к решению n квадратных уравнений.

***Пример* 3.17.** Решить уравнение $x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 135x + 243 = 0.$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 6 \cdot 3 \cdot x^2 - 5 \cdot 3^3 \cdot x + 3^5 = 0.$$

Это возвратное уравнение нечетной степени, $\lambda = 3$. Следовательно, оно имеет корень $x = -3$. Разделив левую часть уравнения на $(x + 3)$, получим уравнение

$$x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 72x + 81 = 0,$$

которое является возвратным уравнением четной степени ($\lambda = 9$). Разделим его на среднюю степень, т.е. на x^2:

$$x^2 - 8x + 30 - 8 \cdot \frac{9}{x} + \frac{9^2}{x^2}.$$

Сгруппируем соответствующие слагаемые:

$$\left(x^2 + \frac{9^2}{x^2}\right) - 8 \cdot \left(x + \frac{9}{x}\right) + 30 = 0.$$

Обозначим $x + \frac{9}{x} = y$. Тогда $x^2 + \frac{9^2}{x^2} = y^2 - 18$. Исходя из этого, получаем:

$$y^2 - 18 - 8y + 30 = 0 \text{ или}$$

$$y^2 - 8y + 12 = 0.$$

Откуда находим $y_1 = 2,\ y_2 = 6.$ Получаем два уравнения:

$$x + \frac{9}{x} = 2 \text{ или } x + \frac{9}{x} = 6.$$

Первое уравнение не имеет действительных корней. Решая второе уравнение, находим $x_1 = x_2 = 3$.

Итак, исходное уравнение имеет три корня: –3, 3,3.

Ответ: –3; 3; 3

Если в возвратных уравнениях $\lambda = 1$, т.е. уравнение имеет вид

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_0 \neq 0,\ a_\kappa = a_{n-\kappa},\ \kappa = 0, 1, 2, \ldots, n,$ то уравнение называется ***симметрическим.***

Например, уравнения

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0,$$
$$2x^7 - 3x^6 - 31x^5 + 44x^4 + 44x^3 - 31x^2 - 3x + 2 = 0$$

симметрические: у них коэффициенты, одинаково удаленные от начала и конца, равны между собой. Первое уравнение четной степени, второе – нечетной. «Ось» симметрии в первом уравнении проходит через слагаемое $5x^2$. Оно симметрично самому себе. Во втором уравнении – между слагаемыми $44x^4$ и $44x^3$.

Рассмотрим метод решения таких уравнений. Во-первых, если такое уравнение имеет нечетную степень, то оно имеет корень $x = -1$.

Далее мы можем понизить степень уравнения, поделив его на $(x + 1)$. При делении симметрического уравнения на $(x + 1)$ получается симметрическое уравнение четной степени. Решение уравнений четной степени рассмотрим на примере.

***Пример* 3.18.** Решить уравнение $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0.$

Решение. Так как число 0 не является корнем уравнения, то такое уравнение можно решить, разделив обе его части на x^2 (на среднюю степень). Получим

$$2x^2 + 3x - 5 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем члены с симметричными коэффициентами, которые вынесем за скобки:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0.$$

Обозначим $x+\frac{1}{x}=y$. Было бы неверным вслед за этим обозначить $x^2+\frac{1}{x^2}$ как y^2. Чтобы получить верное обозначение, возведем в квадрат равенство $x+\frac{1}{x}=y$:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2, \text{ откуда } x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Итак, осуществляя замену, получим:

$$2(y^2-2)+3y-5=0$$

или

$$2y^2+3y-9=0,$$

откуда $y=\frac{3}{2}$ или $y=-3$.

Далее, чтобы вычислить x, решаем два уравнения:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \text{ и } x+\frac{1}{x}=-3$$

или

$$2x^2-3x+2=0 \text{ и } x^2+3x+1=0.$$

Первое из них корней не имеет, второе имеет два корня $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, что и будет ответом исходного уравнения.

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

***Пример* 3.19.** Решить уравнение

$$2x^7-3x^6-31x^5+44x^4+44x^3-31x^2-3x+2=0.$$

Решение. Это симметрическое уравнение нечетной степени. Оно имеет корень $x=-1$. Поделим левую часть уравнения на $(x+1)$, применив схему Горнера:

	2	–3	–31	44	44	–31	–3	2
-1	2	–5	–26	70	–26	–5	2	0

Тем самым мы понизили степень уравнения

$$2x^6-5x^5-26x^4+70x^3-26x^2-5x+2=0$$

и получили симметрическое уравнение 6-й степени. Делим его на среднюю степень x^3:

$$2x^3-5x^2-26x+70-\frac{26}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}=0.$$

Группируем члены с симметричными коэффициентами, которые выносим за скобки:

$$2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-26\left(x+\frac{1}{x}\right)+70=0.$$

Обозначим $x+\frac{1}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, что мы знаем из предыдущего примера. Чтобы выразить $x^3+\frac{1}{x^3}$, достаточно, например, перемножить два последних равенства или возвести в куб равенство $x+\frac{1}{x}=y$. Будем иметь

$$x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=y^3$$

или

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Откуда $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$.

Аналогичным образом можно выразить через y любую сумму вида $x^n+\frac{1}{x^n}$.

Так, возведя в квадрат равенство $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, получим

$$x^4+2+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+4$$

или

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2 \text{ и т.д.}$$

Итак, наше уравнение принимает вид

$$2(y^3-3y)-5(y^2-2)-26y+70=0 \text{ или}$$

$2y^3-5y^2-32y+80=0,$ которое имеет корень $y_1 = 4$ (согласно теореме 1.2). Разделив левую часть уравнения на $(y - 4)$, получим

$2y^2+3y-20=0,$ откуда находим оставшиеся два корня данного уравнения $y_2=-4,\ y_3=\frac{5}{2}$. Вследствие чего получаем:

1) $x+\frac{1}{x}=4;\ \ x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{3};$

2) $x+\frac{1}{x}=-4;\ \ x^2+4x+1=0 \Rightarrow x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3};$

3) $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2};\ \ 2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x_5=2, x_6=\frac{1}{2}.$

Не следует забывать, что в самом начале мы получили корень $x = -1$. Его также включаем в ответ.

Ответ: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3};\ x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3};\ x_5=2, x_6=\frac{1}{2},\ x_7=-1.$

Прием, рассмотренный в примере, можно применять к уравнениям, которые после умножения на некоторый многочлен превращаются в возвратные. Например, при решении уравнения вида

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \tag{3.4}$$

где $a\neq 0,\ d\neq 0,\ c\neq a,\ a(c-a)=d(b-d).$ В самом деле, умножив это уравнение на многочлен $x+\frac{a}{d},$ получим симметрическое уравнение четвертой степени, среди корней которого содержится и корень $x=-\frac{a}{d}$. Отметим, что этот корень может быть посторонним корнем уравнения (3.4).

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/view7590855

3.1.4.Однородные уравнения

Однородным уравнением n-й степени называется уравнение вида

$$a_0U^n+a_1VU^{n-1}+a_2V^2U^{n-2}+\ldots+a_nV^n=0,$$

где U и V – некоторые переменные, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – постоянные коэффициенты.

Например, уравнение $3x^2+7xy-5y^2=0$ – однородное уравнение 2-й степени; $5x^3-2x^2y+3xy^2+4y^3=0$ – однородное уравнение 3-й степени.

Всякое однородное уравнение n-й степени можно представить в виде обычного уравнения n-й степени, разделив его на n-ю степень любой переменной. Рассмотрим решение однородного уравнения на примере.

Пример **3.20.** Решить уравнение

$$(x^2+3)^2-11(x^2+3)(2-x)-12(2-x)^2=0.$$

Решение. Введем обозначение: $x^2+3=U$, $2-x=V$. Получим однородное уравнение 2-й степени:

$$U^2-11UV-12V^2=0.$$

Разделив обе части уравнения, например, на V^2 (это возможно, так как значение переменной x, при которой $V=0$, корнем уравнения не является), получим:

$$\left(\frac{U}{V}\right)^2-11\frac{U}{V}-12=0.$$

Заменив $\dfrac{U}{V} = t$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - 11t - 12 = 0,$$

корнями которого являются $t_1 = 12, t_2 = -1$. Тогда исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\frac{x^2+3}{2-x} = 12 \text{ и } \frac{x^2+3}{2-x} = -1.$$

Решая эти уравнения, получим

$\dfrac{x^2+3}{2-x} = 12;\ x^2 + 12x - 21 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{57}$.

$\dfrac{x^2+3}{2-x} = -1;\ x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ корней нет.

Итак, исходное уравнение имеет два действительных корня $x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{57}$.

Ответ: $-6 \pm \sqrt{57}$.

В некоторых однородных уравнениях следует рассматривать случай, когда *V* = 0 (или *U* = 0). Это необходимо во избежание потери корней.

Например, разделив однородное уравнение

$$(x^2-1)^2 + 3(x^2-1)(x-1) + 2(x-1)^2 = 0$$

на $(x-1)^2$, получим уравнение $(x+1)^2 + 3(x+1) + 2 = 0$, а затем корни $x_1 = -2, x_2 = -3$, потеряв при этом очевидный корень *x* = 1.

Чтобы таких потерь не было, следует каждый раз проверять, не является ли значение *x*, при котором выражение *V* (или *U*) обращается в нуль, корнем однородного уравнения.

В рассмотренном нами примере $V = x - 1$ обращается в нуль при *x* = 1. Проверкой убеждаемся, что при этом же значении $xU = x^2 - 1$ также обращается в нуль, а значит, уравнение обращается в верное числовое равенство, т.е. *x* = 1 – корень уравнения. При *x* = 1 делить на выражение $(x-1)^2$ нельзя, при всех остальных значениях *x* – можно. После того как мы выявили корень $x = 1$, поделим уравнение на $(x-1)^2$, наложив условие, что во вновь полученном уравнении $x \neq 1$. При этом не забудем указать $x = 1$ в ответе.

3.1.5. Частные случаи уравнений четвертой степени

Для уравнений четвертой степени существуют формулы для вычисления корней, как и для квадратных. Однако эти формулы столь сложны, что ими практически не пользуются, чаще пытаются понизить степень с помощью некоторой подстановки. Приемы решения уравнений четвертой степени рассмотрим на примерах.

***Пример* 3.21.** Решить уравнение $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=12$.

Решение. Можно раскрыть скобки и попытаться разложить на множители многочлен четвертой степени ранее изученными способами, но это весьма трудозатратно. Перепишем уравнение в виде

$$(x^2+3x+4)(x^2+3x+4+1)=12.$$

Заметим, что каждая скобка содержит одно и тоже выражение: x^2+3x+4. Обозначим его за y, получим новое уравнение $y(y+1)=12$ или $y^2+y-12=0$. Откуда находим $y_1=-4,\ y_2=3$. Подставим эти значения в выражение для y:

$$x^2+3x+4=3 \text{ и } x^2+3x+4=-4.$$

Первое из этих уравнений имеет корни $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Второе уравнение действительных корней не имеет.

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

***Пример* 3.22.** Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.

Решение. Перемножив первую скобку с последней, а вторую с третьей, получим

$$\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=3.$$

Далее решаем как в примере 3.21. Обозначив $y=x^2+5x+4$, получим уравнение $y(y+2)=3$ или $y^2+2y-3=0$. Откуда находим $y_1=-3, y_2=1$. Далее решаем два уравнения:

$$x^2+5x+4=-3 \text{ и } x^2+5x+4=1.$$

Первое из них корней не имеет. Корни второго $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Характерной особенностью данного уравнения $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$, которое дало возможность использовать эту подстановку, является то, что $a+b=c+d$.Поэтому, перемножив $(x-a)(x-b)$ и $(x-c)(x-d)$,мы получим уравнение вида

$$\left(x^2+mx+n\right)\left(x^2+mx+l\right)=A,$$

которое решается подстановкой $t=x^2+mx+k$, где k выбирается исходя из конкретных значений n и l. Например, в данном примере для симметризации уравнения можно было взять подстановку $y=x^2+5x+5$ и получить уравнение $\left(y-1\right)\left(y+1\right)=3$.

Если же в уравнении вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$ числа удовлетворяют условию $b-a=d-c$, то с помощью замены $y=\dfrac{x-a+x-b+x-c+x-d}{4}=x-\dfrac{a+b+c+d}{4}$ оно сводится к биквадратному уравнению.

***Пример* 3.23.** Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$.

Решение. Сделаем замену

$$y=\frac{x+1+x+2+x+4+x+5}{4}=x+3,$$

тогда $x=y-3$ и уравнение можно переписать в виде

$$(y-2)(y-1)(y+1)(y+2)=10,$$

$$(y^2-4)(y^2-1)=10.$$

Это уравнение имеет два корня: $y_1 = -\sqrt{6}$ и $y_2 = \sqrt{6}$, следовательно, и исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = -\sqrt{6} - 3$ и $x_2 = \sqrt{6} - 3$.

Ответ: $x_1 = -\sqrt{6} - 3$, $x_2 = \sqrt{6} - 3$.

Также к биквадратному уравнению можно свести решение уравнений вида

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$$

с помощью замены $t = \dfrac{x+a+x+b}{2}$, или $t = x + \dfrac{a+b}{2}$.

***Пример* 3.24.** Решить уравнение $(2x+3)^4 + (2x+5)^4 = 82$.

Решение. Пусть $t = \dfrac{2x+3+2x+5}{2} = 2x+4$, тогда уравнение можно переписать в виде $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 82$. Используя биномом Ньютона $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, мы получим биквадратное уравнение, поскольку благодаря симметризации члены с нечетными степенями уничтожатся:

$$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 82,$$

$$t^4 + 6t^2 - 40 = 0.$$

Решив это биквадратное уравнение, найдем $t_1 = 2$ и $t_2 = -2$, откуда $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = -3$.

***Пример* 3.25.** Решить уравнение $(x^2+5x+2)(x^2-3x+2) = 9x^2$.

Решение. Заметим, что каждая скобка имеет одинаковые выражения: x^2+2. Разделим уравнение на x^2 (потери корней не будет, так как $x = 0$ не является корнем данного уравнения). При этом каждую скобку будем делить на x. Получим следующее:

$$\frac{(x^2+5x+2)}{x} \cdot \frac{(x^2-3x+2)}{x} = \frac{9x^2}{x^2};$$

$$\left(x+5+\frac{2}{x}\right)\left(x-3+\frac{2}{x}\right)=9.$$

Теперь, обозначив $x+\frac{2}{x}=y$ (за переменную y можно также обозначить любую из скобок), получим новое уравнение:

$$(y+5)(y-3)=9,$$

$$y^2+2y-24=0 \Rightarrow y_1=4, y_2=-6.$$

Далее, решая уравнения $x+\frac{2}{x}=4$ и $x+\frac{2}{x}=-6$, находим корни исходного уравнения: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=-3\pm\sqrt{7}$.

Ответ: $x_1=2-\sqrt{2}$, $x_2=2+\sqrt{2}$, $x_3=-3-\sqrt{7}$, . $x_4=-3+\sqrt{7}$.

Таким образом, уравнения вида

$$(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2, \tag{3.5}$$

где $c\neq 0$ и $A\neq 0$, эффективно решать делением на $x^2\neq 0$ и заменой $y=ax+\frac{c}{x}$.

К решению уравнений (3.5) можно свести решение уравнений вида

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=Ax^2, \tag{3.6}$$

где $a\cdot b=c\cdot d$. Действительно, перемножив первую скобку со второй, а третью с четвертой, уравнение (3.6) можно переписать в виде

$$(x^2-x(a+b)+ab)(x^2-x(c+d)+cd)=Ax^2.$$

***Пример* 3.26.** Решить уравнение $(x-2)(x-1)(x-8)(x-4)=7x^2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\left((x-2)(x-4)\right)\cdot\left((x-1)(x-8)\right)=7x^2,$$

$$(x^2-6x+8)(x^2-9x+8)=7x^2.$$

Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то, разделив его обе части на x^2, получим равносильное уравнение

$$\left(x-6+\frac{8}{x}\right)\left(x-9+\frac{8}{x}\right)=7.$$

Делая замену переменных $x+\frac{8}{x}=y$, получаем квадратное уравнение

$$(y-6)(y-9)=7,$$

которое имеет корни $y_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{37}}{2}$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{8}{x}=\frac{15+\sqrt{37}}{2}, \\ x+\frac{8}{x}=\frac{15-\sqrt{37}}{2}. \end{array}\right.$$

Корнями первого уравнения этой совокупности являются

$$x_{1,2}=\frac{\frac{15+\sqrt{37}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{15+\sqrt{37}}{2}\right)^2-32}}{2}.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет.

Ответ: $x_1=\frac{15+\sqrt{37}+\sqrt{30\sqrt{37}+134}}{4}$, $x_2=\frac{15+\sqrt{37}-\sqrt{30\sqrt{37}+134}}{4}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/view7597773

3.2. Системы уравнений

Уравнения $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, …, $A_n=B_n$, рассматриваемых совместно, называют ***системой уравнений*** и записывают

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \quad \dots \\ A_n = B_n. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Под множеством допустимых значений системы, если нет специальной оговорки, понимают множество числовых значений буквенных величин, входящих в выражения A_1, B_1, A_2, B_2, …, A_n, B_n, при которых все они одновременно имеют смысл.

Классификацию систем (их названия) проводят по числу и характеру уравнений, входящих в систему.

Решением системы называют совокупность значений неизвестных системы, принадлежащих ее множеству допустимых значений и удовлетворяющих всем уравнениям системы одновременно.

Решить систему – это значит найти множество всех ее решений. Если система не имеет решений, то говорят, что она противоречива, или несовместна.

Если все решения одной системы являются решениями другой системы, то вторую систему называют ***следствием*** первой системы.

Две системы называются ***равносильными*** (эквивалентными), если каждая из них является следствием другой. Из этого определения следует, что равносильные системы имеют только одни и те же решения.

Очевидно, что две несовместные системы можно считать равносильными, так как они обе не имеют решений.

Несколько уравнений образуют ***совокупность***, если ставится задача об отыскании всех тех наборов значений переменных (для уравнений с двумя переменными x и y это пары (x, y)), которые удовлетворяют по крайней мере одному из этих уравнений.

Чтобы отличить совокупность уравнений от системы, ее обозначают квадратной скобкой:

$$\left[\begin{array}{l} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \quad \ldots \\ A_n = B_n. \end{array}\right.$$

Несколько систем уравнений образуют совокупность систем, если ставится задача об отыскании всех тех наборов значений переменных (для уравнений с двумя переменными x и y это пары (x, y)), которые удовлетворяют по крайней мере одной из заданных систем.

Система (S) ***равносильна совокупности двух систем*** (S') и (S''), если каждое решение системы (S) является в то же время решением либо системы (S'), либо системы (S'') и обратно: все решения систем (S') и (S'') являются в то же время решениями системы (S).

Уравнение $A = B$ есть уравнение-следствие системы (S), если все решения этой системы являются в то же время решениями уравнения $A = B$.

Например, уравнения

$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ и $A_1 A_2 \ldots A_n = B_1 B_2 \ldots B_n$

являются уравнениями-следствиями системы

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \quad \ldots \\ A_n = B_n. \end{cases}$$

Если обратно, все решения уравнения $A = B$ являются решениями системы (S), то это ***уравнение и систему*** называют ***равносильными***.

Имеют место следующие свойства систем:

1. Любое уравнение системы можно заменить уравнением, ему равносильным; при этом получится равносильная система.

2. Если одно из уравнений системы (S) равносильно совокупности двух уравнений, то эта система равносильна совокупности двух систем (S') и (S''), в каждой из которых это уравнение заменено на одно из уравнений равносильной совокупности, а остальные оставлены без изменения.

Например, в системе

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3(x + y), \\ x^2 + y^2 = 7; \end{cases}$$

первое уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $x + y = 0$ и $x^2 - xy + y^2 = 3$. И, следовательно, система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = 7; \end{cases} \text{и} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 7. \end{cases}$$

Основные методы решения систем уравнений

1. ***Метод подстановки***: из какого-либо уравнения системы выражаем одно неизвестное через другие и подставляем в оставшиеся уравнения системы.

***Пример* 3.27.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим, что

$$z = 7 - 2x - y. \tag{3.8}$$

Подставляем это выражение для z во второе и третье уравнения системы. Тогда

$$\begin{cases} x + 2y + 7 - 2x - y = 8, \\ x + y + 14 - 4x - 2y = 9; \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} -x + y = 1, \\ -3x - y = -5. \end{cases}$$

Повторяем этот процесс:

$$y = x + 1, \tag{3.9}$$

тогда $-3x - x - 1 = -5$, т.е. $-4x = -4$. Отсюда $x = 1$. Подставляем $x = 1$ в равенство (3.9): $y = 2$. Значения $x = 1$ и $y = 2$ подставляем в равенство (3.8): $z = 7 - 2 - 2 = 3$.

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

2. ***Метод алгебраического сложения*** поясним на примере.

***Пример* 3.28.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2 y + xy^2 = 20. \end{cases}$$

Решение. Умножим второе уравнение на 3 и сложим с первым уравнением:

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 20, \\ (x + y)^3 = 125; \end{cases} \quad \begin{cases} xy(x + y) = 20, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 1; \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 4. \end{cases}$$

Ответ: (4, 1), (1, 4).

3. ***Метод введения новых переменных***. Для решения систем уравнений часто применяется метод замены переменных, когда некоторые выражения от исходных переменных принимаются за новые переменные, в результате чего получается более простая система уравнений относительно этих переменных. После того как эта система решена, надо по найденным значениям выбранных нами выражений найти значения исходных переменных.

***Пример* 3.29**. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 21, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$$

Решение. Легко видеть, что при замене x на y, а y на x система не изменяет своего вида. Следовательно, данная система симметрическая. Введем новые переменные $u = x + y$, $v = xy$ и выразим через них левые части уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = (x + y)^2 - xy = u^2 - v, \\ x + xy + y = u + v. \end{cases}$$

Исходная система сведена к следующей:

$$\begin{cases} u^2 - v = 21, \\ u + v = 9. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Сложив уравнения этой системы друг с другом, получаем квадратное уравнение $u^2 + u - 30 = 0$. Из него следует, что $u_1 = 5$ и $u_2 = -6$.

Так как $v = 9 - u$, то $v_1 = 4$ и $v_2 = 15$. Таким образом, получены две пары (5; 4) и (-6; 15), удовлетворяющие системе уравнений (3.10). Переходя теперь к исходным переменным, заключаем, что исходная система уравнений свелась к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases} \text{и} \begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Решая первую из полученных систем (например, методом подстановки), находим $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, $x_2 = 4$, $y_2 = 1$.

Вторая система решений не имеет, а потому решениями совокупности являются только решения первой системы.

Ответ: (1; 4), (4; 1).

***Пример* 3.30**. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 - xy} + \dfrac{4}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{7}{x^2 - xy} - \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Решение. Пусть

$$\frac{1}{x^2 - xy} = t, \quad \frac{1}{y^2 - xy} = z. \qquad (3.11)$$

Тогда получаем

$$\begin{cases} 5t + 4z = -\dfrac{1}{6}, \\ 7t - 3z = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе –на 4 и сложим почленно:

$$15t + 28t = -\frac{1}{2} + \frac{24}{5},\ 43t = \frac{43}{10}, \quad \text{т.е.} \quad t = \frac{1}{10}.$$

А теперь избавимся от t. Первое уравнение умножим на 7, а второе –на 5 и вычтем из первого уравнения второе:

$$28z + 15z = -\frac{7}{6} - 6,\ 43z = -\frac{43}{6}, \quad \text{т.е.} \quad z = -\frac{1}{6}.$$

Подставляем t и z в равенства (3.11):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - xy} = \dfrac{1}{10}, \\ \dfrac{1}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{6}; \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x^2 - xy = 10, \\ y^2 - xy = -6. \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения системы: $(x - y)^2 = 4,$ т.е. $|x - y| = 2.$

Последняя система распадается на две:

$$\begin{cases} x(x - y) = 10, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(x - y) = 10, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Решая их, находим $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $x_2 = -5$, $y_2 = -3$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения являются решениями системы.

Ответ: (5, 3), (–5, –3).

4. ***Однородные системы***. Система, содержащая однородные алгебраические выражения одинаковой степени, называется *однородной*.

Пусть задана система

$$\begin{cases} P_1(x, y) = b_1, \\ P_2(x, y) = b_2; \end{cases}$$

где $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ – однородные алгебраические выражения одинаковой степени; b_1, b_2 – числа.

Сразу заметим, что если одно из b_1, b_2 равно нулю, то соответствующее уравнение является однородным и дальнейшее решение зависит от умения и возможности решать однородные уравнения. Поэтому будем считать, что b_1, b_2 не равны нулю.

Рассмотрим два способа решения подобных систем.

I способ. Умножим обе части первого уравнения на b_2, а второго –на b_1. Теперь из первого уравнения вычитаем второе и получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} b_2P_1(x, y) - b_1P_2(x, y) = 0, \\ P_2(x, y) = b_2. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы однородное, и успех в решении системы зависит от успеха в решении этого уравнения.

II способ. Решаем систему при $x = 0$. После этого полагаем, что $x \neq 0$, и делаем замену $y = tx$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} x^pP_1(1, t) = b_1, \\ x^pP_2(1, t) = b_2. \end{cases}$$

Так как мы договорились о неравенстве нулю правых частей исходной системы, делим соответственно левые и правые части уравнений системы друг на друга и получаем уравнение относительно новой переменной t.

***Пример* 3.31.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = 1, \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = 4. \end{cases}$$

Решение. В этой системе имеем в левых частях однородные алгебраические выражения второй степени. Значит, система является однородной.

I способ. Умножим обе части первого уравнения на 4 и вычитаем из преобразованного первого уравнения второе. Мы далее будем заниматься полученной разностью, поэтому не будем писать второе уравнение системы, имея в виду его наличие. Получим

$$\frac{4x^3}{y} + 3xy - \frac{y^3}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^4 + 3x^2y^2 - y^4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y^2 = 4x^2, \\ y^2 = -x^2; \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = 2x, \\ y = -2x. \end{array} \right.$$

Заметим, что при переходах мы использовали условие $x \neq 0, y \neq 0$.

Теперь подставляем полученные результаты во второе уравнение системы и получаем

$$\left[\begin{aligned} &8x^2 + 2x^2 = 4, \\ &-8x^2 - 2x^2 = 4; \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = \sqrt{2/5}, \\ &x = -\sqrt{2/5}. \end{aligned}\right.$$

Далее находим значения второй переменной.

II способ. Так как $x \neq 0$, то сразу делаем замену $y = tx$ и делим первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{t} + x^2 t = 1, \\ x^2 t^3 + x^2 t = 4; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t^4 - 3t^2 - 4 = 0, \\ x^2 t^3 + x^2 t = 4. \end{cases}$$

Далее находим из первого уравнения t и т.д.

Отметим еще один очень эффективный способ решения подобных систем.

III способ. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} = 1 - xy, \\ \dfrac{y^3}{x} = 4 - xy \end{cases}$$

и перемножим, соответственно, левые и правые части уравнений друг на друга. Получим квадратное уравнение относительно xy

$$x^2 y^2 = (1 - xy)(4 - xy),$$

решение которого быстро приведет к ответу.

Ответ: $\left(\sqrt{2/5}; 2\sqrt{2/5}\right), \left(-\sqrt{2/5}; -2\sqrt{2/5}\right)$.

5. *Разложение на множители*.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0, \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

При решении подобных примеров надо сначала попытаться решить одно из уравнений как квадратное относительно какой-либо переменной. Решим первое уравнение системы как квадратное относительно x:

$$x^2 - 2x(y-1) + (2y^2 - 8y + 10) = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (y-1)^2 - 2y^2 + 8y - 10 = -y^2 + 6y - 9 = -(y-3)^2.$$

Для разрешимости квадратного уравнения в действительных числах необходима неотрицательность дискриминанта, что в нашем случае возможно только при $y = 3$. Подставляем найденное значение в первое уравнение и находим $x = 2$. Теперь убеждаемся в том, что пара $x = 2$, $y = 3$ является решением второго уравнения. Если бы оказалось, что найденное решение первого уравнения не является решением второго уравнения, то система не имела бы решений.

Ответ: (2; 3).

3.3. Рациональные неравенства

Какуже было описано в параграфе 2.4, основным методом решения рациональных неравенств является метод интервалов. Рассмотрим частные случаи.

***Пример* 3.32**. Решить неравенство $\frac{x-2}{x+1} < 2.$

*Решение.*Перенесем число 2 в левую часть неравенства и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x-2}{x+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-2x-2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0.$$

Умножив последнее неравенство на –1 и изменив знак неравенства, получим равносильное неравенство $\frac{x+4}{x+1} > 0.$

Стандартный метод интервалов (или просто свойства квадратичных неравенств) сразу дает ответ: $(-\infty;-4) \cup (-1;+\infty)$. Грубейшей ошибкой, которую, к сожалению, довольно часто допускают школьники, является попытка умножить неравенство на знаменатель дроби. Этого делать нельзя, поскольку знаменатель может принимать как положительные, так и отрицательные значения!

Ответ: $(-\infty;-4)\cup(-1;+\infty)$.

Пример **3.33.**Решить неравенство $\dfrac{2x}{x^2+1}>-1.$

*Решение.*Пользуясь тем, что знаменатель дроби в левой части неравенства всегда строго положителен, умножим обе части неравенства на x^2+1. Тогда получим равносильное неравенство $2x>-x^2-1$. Перенесем все части неравенство в левую часть и выделим полный квадрат: $(x+1)^2>0$. Последнее неравенство справедливо при всех *x*, отличных от –1.

Ответ: $x\neq 1$.

Пример **3.34.**Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{(6-x^2)(x^2-7x+12)}{x^2+9x+20}\geq 0.$$

Решение.

1. Путём равносильных преобразований разложим многочлены $p(x)$ и $q(x)$ на линейные множители. Представим выражение $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ в виде

$$\frac{(4-x)(4+x)(x-4)(x-3)}{(x+4)(x+5)}\geq 0,$$

$$\frac{(x-(-4))(x-4)^2(x-3)}{(x-(-4))(x-(-5))}\leq 0.$$

2. Отметим на координатной прямой все корни каждого множителя: –5; –4;3; 4.
3. Неравенство нестрогое, поэтому во множество решений неравенства включаем точки, являющиеся корнями только множителей числителя (3;

4) и обязательно исключаем точки, являющиеся корнями множителей знаменателя (–5; –4).

4. Все коэффициенты при переменной x положительны, поэтому в крайнем правом интервале выражение положительно.

5. При переходе через точку 4 знак выражения $\frac{p(x)}{q(x)}$ не меняется, так как множитель $(x-4)^2$ имеет чётный показатель степени. При переходе через точку 3 знак меняется на минус, а через точку (–4) остаётся прежним, поскольку множитель $(x-(-4))$ повторяется чётное число раз и т.д. (рис. 3.1)

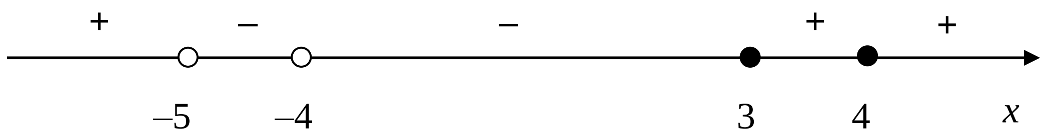

Рис. 3.1. Промежутки знакопостоянства

Таким образом, решением неравенства будет объединение всех интервалов знака минус и числа 4: $x \in (-5;-4) \cup (-4;3] \cup \{4\}$.

Значит, количество целочисленных решений равно 8.

Ответ: 8.

***Пример* 3.35.** Решить неравенство $\frac{2x^2-32}{7-x} > 0$.

*Решение.*1. Перепишем неравенство в виде $\frac{2(x-4)(x-(-4))}{x-7} < 0$.

2. Отметим на координатной прямой все корни каждого множителя: –4; 4; 7.

3. Неравенство строгое, поэтому точки, являющиеся корнями множителей, не включаем в множество решений неравенства.

4. Все коэффициенты при переменной x положительны, поэтому в крайнем правом интервале выражение положительно.

5. При переходе через каждую точку знак выражения $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ меняется, так как все множители имеют нечётный показатель степени (1) (рис.3.2).

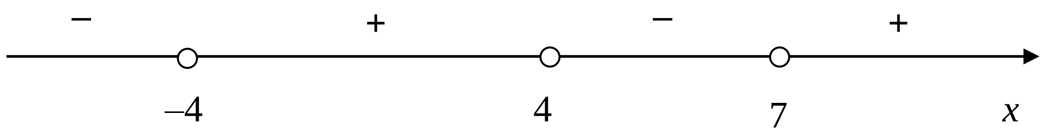

Рис. 3.2. Промежутки знакопостоянства

6. Таким образом, решением неравенства будет объединение всех интервалов знака минус .

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; 7)$.

***Пример* 3.36.** Решить неравенство:

$$\frac{(2-x)^3 x^2}{(2x+5)(2x+3)} \geq 0.$$

Решение.

1. Корни множителей:

$$2 - x = 0, \qquad x_1 = 2;$$
$$x = 0, \qquad x_2 = 0;$$
$$2x + 5 = 0, \qquad x_3 = -2{,}5;$$
$$2x + 3 = 0, \qquad x_4 = -1{,}5 .$$

2. Нанесём все корни на координатную прямую.
3. Отметим точки, которые надо включить в решение неравенства ($x = 0$, x=2) (рис. 3.3).

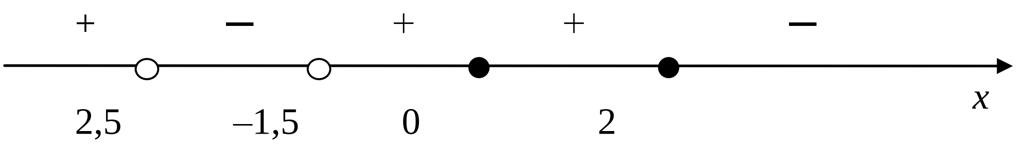

Рис. 3.3. Промежутки знакопостоянства

4. Расставим знаки в интервалах согласно обобщённому методу интервалов:

Во множителе $(2-x)^3$ коэффициент при переменной x отрицательный (-1), таких множителей три, т.е. количество отрицательных коэффициентов нечётно. Значит, в крайнем правом интервале $(2;+\infty)$ выражение $\dfrac{(2-x)^3x^2}{(2x+5)(2x+3)}$ отрицательно.

При переходе через точку 2 выражение меняет знак, так как показатель степени множителя $(2-x)$ – нечётное число 3. В интервале $(0; 2)$ ставим знак плюс. При переходе через точку 0 выражение не меняет знак, так как множитель x имеет показатель степени 2 – чётное число. В интервале $(-1{,}5; 0)$ ставим знак плюс. При переходе через точку $-1{,}5$ выражение знак меняет, так как $(2x+3)$ – множитель в первой степени, 1 – нечётное число. В интервале $(-2{,}5; -1{,}5)$ ставим знак минус. Аналогично, выражение меняет знак при переходе через точку $-2{,}5$, В интервале $(-\infty; -2{,}5)$ ставим знак плюс.

5. Итак, решением неравенства является совокупность (объединение) всех промежутков, где поставлен знак плюс, $(-\infty; -2{,}5) \cup (-1{,}5; 2]$.

Ответ: $(-\infty; -2{,}5) \cup (-1{,}5; 2]$.

***Пример* 3.37.** Решите неравенство

$$(x+5)(2x-3)^5(-x+7)^3(3x+8)^2 \le 0.$$

Решение.

Корни множителей:

$x+5=0,\qquad x_1=-5;$

$2x-3=0,\qquad x_2=1\frac{1}{2};$

$-x+7=0,\qquad x_3=7;$

$3x+8=0,\qquad x_4=-2\frac{2}{3}.$

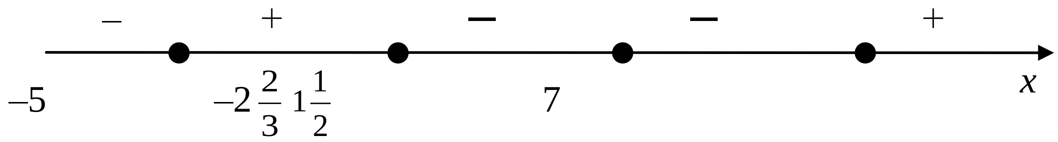

Рис. 3.4 Промежутки знакопостоянства

Расставим знаки в интервалах согласно обобщённому методу интервалов (рис. 3.4).

В крайнем правом интервале (7; + ∞) выражение

$$(x + 5)(2x - 3)^5(-x + 7)^3(3x + 8)^2$$

имеет знак минус, так как количество отрицательных коэффициентов при переменной x нечётно $((-x + 7)^3)$.

Смена знаков в интервалах не произойдёт только при переходе через точку $x = -2\frac{2}{3}$, так как показатель степени множителя $(3x + 8)$ – чётное число 2.

Решением неравенства будет объединение промежутков со знаком минус:

$$[-5;\ 1\frac{1}{2}] \cup [7;\ \infty).$$

Ответ: $[-5;\ 1\frac{1}{2}] \cup [7;\ \infty)$.

***Пример* 3.38.** Решить неравенство $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{(x-7)(x+2)} \geq 0.$

Решение.

1. Сначала найдем область допустимых значений неравенства (далее сокращенно будем писать – ОДЗ). Очевидно, что $x \neq 7,\ x \neq -2$.
2. Преобразуем дробно-рациональное неравенство в рациональное:

$$(x^2 - 5x + 4)(x-7)(x+2) \geq 0.$$

3. Разложим на множители левую часть полученного неравенства:

$$(x-4)(x-1)(x-7)(x+2) \geq 0.$$

4. Заметим, что корни многочлена – числа –2, 1, 4 и 7, имеют кратность «единица», отложим их на числовой оси и расставим на полученных интервалах знаки неравенств (рис. 3.5)

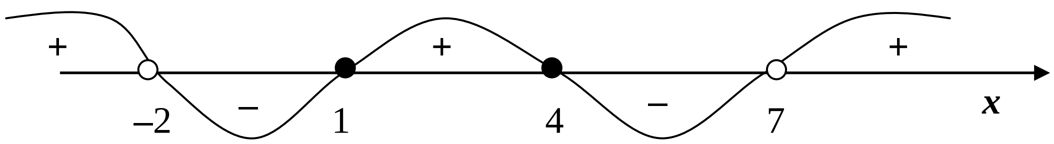

Рис. 3.5. Промежутки знакопостоянства

5. Выписываем окончательный ответ, включая в него корни многочлена, стоявшего в числителе и исключая корни знаменателя.

Ответ: $(-\infty,-1]\cup(2,4]\cup(7,+\infty)$.

В следующем примере мы рассмотрим неравенства с кратными корнями.

***Пример* 3.39.** Решить неравенство $\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{2}{x-5}$.

Решение.

Это неравенство не похоже на каноническое дробно-рациональное, но оно сводится к таковому. Главное – сделать это правильно. Для этого перенесем дробь из правой части неравенства в левую и приведем полученную разность двух дробей к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-5} > 0 \Leftrightarrow \frac{1\cdot(x-5)}{(x-2)(x-5)} - \frac{2\cdot(x-2)}{(x-2)(x-5)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-1\cdot(x+1)}{(x-2)(x-5)} > 0.$$

Сократим числитель на –1, при этом знак неравенства изменится на противоположный: $\dfrac{x+1}{(x-2)(x-5)} < 0$. Теперь перед нами каноническое дробно-рациональное неравенство, эквивалентное исходному. Решим его методом интервалов, как это было раскрыто выше и получим два промежутка $(-\infty,-1)$ и $(2,5)$.

Ответ: $(-\infty,-1)\cup(2,5)$.

Замечание. Часто такие задачи решают неправильно, а именно просто умножают числитель левой части на знаменатель правой и наоборот. В результате получается совершенно другое неравенство: $(x-5)>2(x-2)$, которое сводится к линейному неравенству $x+1<0$, ответ для которого, $x\in(-\infty,-1)$, только частично совпадает с правильным.

Рассмотрим решение более сложных неравенств.

***Пример* 3.40.** Решить неравенство

$$(x^2+1{,}3x+0{,}9)^2+(x^2+3{,}3x-0{,}7)^2\le(x^2+1{,}5x+0{,}74)^2+(x^2+3{,}1x-0{,}54)^2.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$(x^2+3{,}3x-0{,}7)^2-(x^2+3{,}1x-0{,}54)^2\le(x^2+1{,}5x+0{,}74)^2-(x^2+1{,}3x+0{,}9)^2,$$

$$(0{,}2x-0{,}16)(2x^2+6{,}4x-1{,}24)\le(0{,}2x-0{,}16)(2x^2+2{,}8x+1{,}64),$$

$$(0{,}2x-0{,}16)(3{,}6x-2{,}88)\le 0,$$

$$0{,}2(x-0{,}8)3{,}6(x-0{,}8)\le 0,$$

$$(x-0{,}8)^2\le 0.$$

Единственным решением полученного неравенства является $x = 0{,}8$.

Ответ: $\{0{,}8\}$.

***Пример* 3.41.** Решить неравенство $\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}+\dfrac{x^3-3x^2+2}{x-3}\le x+x^2.$

Решение. Преобразуем левую часть, выполнив деление с остатком для каждойдроби:

$$\frac{x(x-2)-1}{x-2}+\frac{x^2(x-3)+2}{x-3}\le x+x^2,$$

$$x-\frac{1}{x-2}+x^2+\frac{2}{x-3}\le x+x^2,$$

$$-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}\le 0,$$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \le 0.$$

Ответ: $(-\infty;1] \cup (2;3)$.

***Пример* 3.42.**Решить неравенство

$$\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 + 14\cdot\frac{x^2-9}{x^2-1} - 15\cdot\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2 \le 0.$$

Решение. Пусть $\frac{x+3}{x-1} = a,\ \frac{x-3}{x+1} = b.$ Неравенство примет вид $a^2 + 14ab - 15b^2 \le 0$. Разложим левую часть последнего неравенства на множители, рассмотрев её как квадратный трёхчлен относительно a. По теореме Виета: $a_1 \cdot a_2 = -15b^2$, $a_1 + a_2 = -14b.$Корнями трёхчлена будут $-15b$ и b. Теперь неравенство можно переписать в виде

$$(a-b)\cdot(a+15b) \le 0.$$

Сделав обратную замену, придём к неравенству

$$\left(\frac{x+3}{x-1} - \frac{x-3}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x+3}{x-1} + 15\cdot\frac{x-3}{x+1}\right) \le 0.$$

Приведя дроби в скобках к общим знаменателям, после упрощений получим

$$\frac{8x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{16x^2-56x+48}{(x-1)(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x^2-7x+6)}{(x-1)^2(x+1)^2} \le 0.$$

Разложив на множители квадратный трёхчлен $2x^2 - 7x + 6$, корнями которого являются числа 1,5 и 2, придём к неравенству

$$\frac{2x(x-1{,}5)(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2} \le 0.$$

Если $x \ne \pm 1$, то знаменатель дроби положителен. Поэтому можно перейти к системе

$$\begin{cases} x(x-1{,}5)(x-2) \le 0, \\ x \ne \pm 1. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов и исключим из множества решений ± 1 (рис. 3.6).

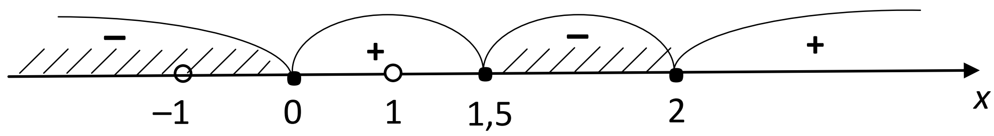

Рис. 3.6.Кривая знаков

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[1{,}5;2]$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/view7597802

3.4. Системы и совокупности неравенств с одной переменной

Несколько неравенств с одной переменной образуют ***системунеравенств*** в том случае, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств.

Несколько неравенств с одной переменной образуют ***совокупность неравенств***, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из этих неравенств.

Из сказанного следует, что решением системы неравенств является пересечение решений неравенств, образующих систему, а решением совокупности неравенств – объединение решений неравенств, образующих совокупность.

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют систему неравенств, то это записывают так:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$

В некоторых случаях неравенства, образующие систему, можно записать и в строчку. Так, если неравенства $f(x) > g_1(x)$ и $f(x) < g_2(x)$ образуют систему, то эту систему можно записать в виде двойного неравенства $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$.

Из определения системы неравенств следует, что если неравенство $f(x) > g(x)$ является следствием неравенств $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ (или следствием только одного из этих неравенств), то система неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x); \end{cases}$$

равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Несколько систем неравенств с одной переменной образуют ***совокупность систем неравенств*** в том случае, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одной из этих систем.

***Пример* 3.43.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x-3)^3}{(x-3)(x+1)} \geq 0, \\ (x-4)(x+4) \leq 0. \end{cases}$$

Решение. Решаем методом интервалов первое неравенство. Поскольку знаменатель обращается в ноль в точках 3 и -1, то мы их исключаем из координатной прямой (рис. 3.7). Первое неравенство имеет решение (- ∞, -1).

Решаем второе неравенство. На координатной прямой отметим точки -4 и 4, в которых множители равны нулю и включим их в ответ (рис.3.8). Тогда второе неравенство имеет решение [–4; 4].

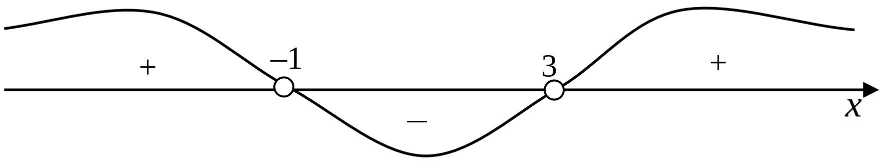

Рис. 3.7.Кривая знаков

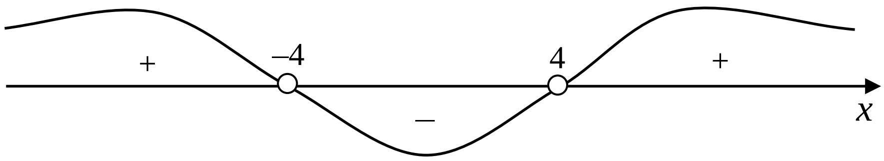

Рис. 3.8.Кривая знаков

Найдем пересечение этих множеств (рис.3.9) [–4; –1) ∪ (3; 4].

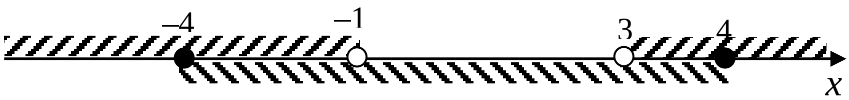

Рис. 3.9.Решениепримера

Ответ: [–4; –1) ∪ (3; 4].

Пример **3.44.**Решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x^5 \geq 100x^3, \\ \dfrac{(x+9)(6x-x^2-18)}{x^2-18x+45} \geq 0. \end{array}\right.$$

Решение. Преобразуем первое неравенство совокупности к виду $x^3(x-10)(x+10) \geq 0.$

С помощью кривой знаков (рис. 3.10) найдем решение этого неравенства: [–10; 0]∪[10; ∞).

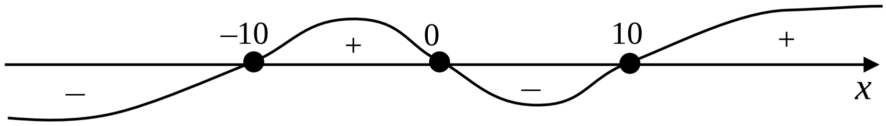

Рис. 3.10Кривая знаков

Рассмотрим второе неравенство совокупности. Имеем

$$\frac{(x+9)(x^2-5x+18)}{(x-3)(x-15)} \le 0.$$

Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 5x + 18$ отрицателен, а старший коэффициент положителен, то $x^2 - 5x + 18 > 0$ при всех значениях x, и, следовательно, разделив обе части неравенства на $x^2 - 5x + 18$ и сохранив знак неравенства, получим равносильное неравенство

$$\frac{(x+9)}{(x-3)(x-15)} \le 0.$$

С помощью кривой знаков (рис. 3.11) находим решение последнего неравенства: $(-\infty; -9] \cup (3; 15)$.

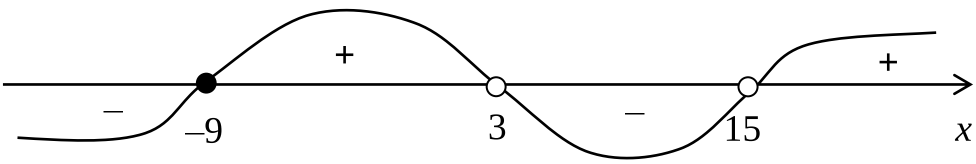

Рис. 3.11.Кривая знаков

Объединив найденные решения каждого из неравенств совокупности, получим $(-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$ – решение исходной совокупности.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$.

3.5. Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Решить уравнения различными способами:

1.1.

а) $5x^2 + 8x + 3 = 0;$ **б)** $7x^2 + 11x + 4 = 0;$ **в)** $-3x^2 + 8x - 5 = 0.$

1.2.

а) $5x^2 - 26x + 5 = 0;$ **б)** $21x^2 + 4x - 1 = 0;$ **в)** $-4x^2 + 17x - 4 = 0.$

Задание 2.Решить уравнения:

2.1.

а) $\dfrac{4x-2(5+2x)}{0{,}3(2+0{,}4x)+1}=0$; **г)** $\dfrac{x-1}{x-1}=0$;

б) $\dfrac{3(3x+1)-4(5x+1)}{2(2x-1)+5(0{,}2x-3x)}=1$; **д)** $\dfrac{x-1}{x-1}=1$;

в) $\dfrac{2(2x-1)+3(4-2x)}{3(x-2)-2(x+2)}=3$; **е)** $\dfrac{2x+5}{x^2+x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3x}{x+1}$.

2.2.

а) $\dfrac{3}{3+x}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{6}{3x-x^2}$; **г)** $\dfrac{7}{x+2}-\dfrac{x+4}{4-2x}=\dfrac{3x^2-38}{x^2-4}$;

б) $\dfrac{4}{9x^2-1}-\dfrac{x}{3x-1}=\dfrac{2}{3x+1}$; **д)** $\dfrac{1}{2x-8}=\dfrac{2x}{x^2-12x+32}+\dfrac{2}{x-8}$;

в) $\dfrac{1}{4x+1}-\dfrac{1}{16x^2+8x+1}=1$; **е)** $\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{x}{x^2-8x-84}=\dfrac{2}{x-14}$.

2.3.

а) $\dfrac{x+4}{x+1}-\dfrac{10}{x^2-1}=\dfrac{10}{3}$; **г)** $\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{x-3}{2-x}=\dfrac{20}{x^2-4}$;

б) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x+6}{x+5}=\dfrac{7}{x^2+3x-10}$; **д)** $\dfrac{x+5}{x-2}+\dfrac{x-4}{x+1}=\dfrac{21}{(x-2)(x+1)}$;

в) $\dfrac{x}{x+4}+\dfrac{5}{x-4}=\dfrac{32}{x^2-16}$; **е)** $\dfrac{x+2}{x-9}-\dfrac{x+10}{x-1}=\dfrac{88}{(x-9)(x-1)}$.

2.4.

а) $\dfrac{2x-5}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{x^2+x}+\dfrac{x-5}{x^2-9}=0$;

б) $\dfrac{8}{16x^2-9}-\dfrac{8}{16x^2-24x+9}=\dfrac{1}{4x^2+3x}$;

в) $\dfrac{1+2x}{6x^2-3}-\dfrac{2x-1}{14x^2+7x}=\dfrac{8}{12x^2-3}$;

2.5.

а) $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$;

б) $\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{3-6x+3x^2}=3;$

в) $\dfrac{x+3}{4x^2-9}-\dfrac{3-x}{4x^2+12x+9}=\dfrac{2}{2x-3}.$

2.6.*

а) $\dfrac{5}{x^3+2x^2-2x+1}-\dfrac{2}{x^3-4x^2+4x-1}=\dfrac{1}{x^2-1};$

б) $\dfrac{x+1}{x^3-3x^2+x-3}+\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{x-2}{x^3-3x^2-x+3};$

в) $\dfrac{5}{x^3+2x^2+2x+1}-\dfrac{2}{x^3-1}=\dfrac{1}{x^2-1};$

г) $\dfrac{x}{2x^2+12x+10}+\dfrac{3x+1}{4x^2+16x-20}-\dfrac{x+34}{x^3+5x^2-x-5}=0;$

д) $\dfrac{1}{2x+3}-\dfrac{1}{x^2-16}+\dfrac{1}{2x^2+11x+12}-\dfrac{x-8}{2x^3+3x^2-32x-48}=0.$

Задание 3. Решить уравнения методом введения новой переменной:

3.1.

а) $\dfrac{x+5}{x}+\dfrac{4x}{x+5}=4;$ **в)** $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2=\dfrac{3}{2};$

б) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2{,}9;$ **г)** $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\dfrac{82}{9}.$

3.2.

а) $7\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\cdot\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9;$ **б)** $2\cdot\left(4x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(16x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-7=0.$

3.3.*

а) $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=6;$ **б)** $x^3+\dfrac{1}{x^3}=3\dfrac{1}{4}\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right).$

3.4.

а) $9x^4-37x^2+4=0;$ **в)** $x^6+9x^3+8=0;$

б) $x^8-17x^4+16=0;$ **г)** $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0.$

3.5.

а) $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=12$; в) $(x-2)(x-3)^2(x-4)=20$;

б) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$; г) $(x+4)^2(x+10)(x-2)+243=0$.

3.6.*

а) $(x^2-3x+1)(x^2+5x+1)=9x^2$; в) $(x-3)(x+9)(x^2-4x-12)=300x^2$;

б) $(x+12)(x+2)(x+3)(x+8)=4x^2$; г) $(x^2-6x-9)^2=x(x^2-4x-9)$.

3.7.**

а) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0$; в) $(3x+5)^2+(x+6)^3=4x^2+1$;

б) $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x=-9$; г) $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$.

Задание 4. Решить симметрические и возвратные уравнения:

4.1.

а) $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$; в) $x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1=0$;

б) $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$; г) $5x^5+4x^4+3x^3+3x^2+4x+5=0$.

4.2.

а) $x^4-5x^3+10x+4=0$;

б) $2x^5+3x^4-2x^3-6x^2+81x+486=0$;

в) $4x^6+5x^5-3x^4+50x^3-9x^2+45x+108=0$;

г) $2x^6+3x^5-2x^4+45x^3+4x^2+12x-16=0$.

Задание 5. Решить однородные уравнения:

5.1.

а) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$;

б) $(x^2+3)^2-11(x^2+3)(2-x)-12(2-x)^2=0$.

5.2.

а) $5\cdot\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-44\cdot\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+12\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$;

б) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^2=\dfrac{2x^2+2x}{x^2+4x-5}$.

5.3.*

а) $\dfrac{x^2}{1-2x^2}=12x^2+7x-6$;

б) $2x+1+\dfrac{4x^4}{2x+1}=5x^2$.

Задание 6. Решить уравнения:

6.1.

а) $x^3+x-2=0$;

б) $4x^3-10x^2+14x-5=0$;

в) $2x^4-7x^3-3x^2+5x-1=0$;

г) $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0$.

6.2.**

а) $\dfrac{x^3+2x}{(x^2-x+2)^2}=\dfrac{3}{4}$;

б) $2x^4-10x^3+15x^2-7x+1=0$;

в) $\dfrac{x^3+2x-2}{x^3+2x-3}=\dfrac{x^3+x+3}{x^3+x+2}$;

г) $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

Задание 7. Решить системы уравнений:

7.1.

а) $\begin{cases}3x+2y=1,\\-x+5y=-6.\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x+5y=-1,\\5x+3y=7.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y-z=0,\\2x-y+3z=9,\\-3x+4y+2z=11.\end{cases}$

7.2.

а) $\begin{cases}x^2+y^2=2(xy+2),\\x+y=6.\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^2+y=1,\\x+y^2=1.\end{cases}$

г) $\begin{cases}y^4-xy^2=2x^2,\\x+y=6.\end{cases}$

д) $\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}+x^2-1=0,\\\dfrac{x^2}{x-y}+2=0.\end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 + 2y = 6x, \\ 2x + y^3 = 6y. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 2, \\ 2(x + y) = 3xy. \end{cases}$

7.3.*

а) $\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x + y = 5, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$

7.4.**

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y = 5, \\ 2x^2 - 2x + 3y^2 - 6y = 13. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45, \\ (x - y)^2 - 2(x - y) = 3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$

Задание 8. Решить линейные неравенства:

а) $\frac{3x-1}{2} \le \frac{2x+1}{3} + 1;$ б) $-\frac{1}{3}x < -9.$

Задание 9. Решить квадратные неравенства:

9.1.

а) $x^2 - 6x + 8 \le 0;$ б) $x^2 + 4x + 4 > 0;$ в) $x^2 - 2x + 18 > 0.$

9.2.

а) $-7x^2 + 5x - 2 \le 0;$ б) $-3x^2 + 2x - 1 \ge 0;$ в) $-x^2 - 2x - 13 > 0.$

9.3.

а) $3x - x^2 \ge 0;$ б) $x^2 \le 16;$ в) $x^2 \ge 7.$

Задание 10. Решить рациональные неравенства:

10.1.

а) $(x+1)(x+7)(x-6) < 0;$ б) $(2-x)(x+5)(x-4) \ge 0.$

10.2.

а) $x^3 - 3x^2 - x + 3 \le 0;$ б) $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0.$

10.3.

а) $(x+1)^3(x-3)^2(x-7)^5 > 0;$ б) $(x-1)^2(x+2)^3(x-4)^5 \ge 0.$

10.4.

а) $(x+1)^3(x-3)^2(x-7)^5 \geq 0;$ **б)** $(x+5)(x+3)^2(x-1)^5(x-4)^{14} < 0.$

10.5.

а) $(x-1)(x^2-7x+6) \geq 0;$ **б)** $-4(x+4)^3(x-2)^7 > 0.$

Задание 11. Решить дробно-рациональные неравенства:

11.1.

а) $\dfrac{9x^2-1}{3x^2+4} < 0;$ **б)** $\dfrac{x-2}{x+1} \leq 2;$ **в)** $\dfrac{2x}{x^2+1} > -1;$ **г)** $\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{2}{x-5}.$

11.2.

а) $\dfrac{x^2-5x+4}{(x-7)(x+2)} \geq 0;$ **б)** $\dfrac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3} \leq \dfrac{1}{x+1};$ **в)** $\dfrac{x^2-14x+49}{5x^2-15x} \leq 0.$

11.3.

а) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+2x-8} \geq 0;$ **б)** $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} \leq \dfrac{1-2x}{x^3+1};$ **в)** $\dfrac{2-x}{x^3+x^2} \geq \dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}.$

11.4.

а) $\dfrac{(x^2-4x+4)(x-9)}{x^2+4x+4} \geq 0;$

б) $\dfrac{(6-x^2)(x^2-7x+12)}{x^2+9x+20} \leq 0;$

в) $\dfrac{(x+2)^2(x-1)(x+3)}{x(x+1)} \leq 0.$

11.5.*

а) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0;$ **б)** $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1} < 0.$

Задание 12.* При каких значениях х t трёхчлен $2t^2 - 5t + 2$ принимает отрицательные значения?

Задание 13. Заполнить таблицу «**РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ**»

	Схематический чертеж	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
			$a > 0$		
$D > 0$					
$D = 0$					
$D < 0$					
			$a < 0$		
$D > 0$					
$D = 0$					
$D < 0$					

Задание 14.** Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство верно для любого действительного x:

а) $3x^2 - 18x \geq a$; **б)** $(1-a)x^2 - x + a \geq 0$; **в)** $9x^2 - ax + 4 \geq 0$.

Задание 15. Решить системы неравенств:

15.1.

а) $4x - 2 < x^2 + 1 < 4x + 6$; **б)** $5x - 20 \leq x^2 \leq 8x$.

15.2.

а) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2}<1, \\ \dfrac{2x+3}{3x-2}<2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-1>3, \\ x^2+x+2<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\le 0, \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\ge 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x^2+12x+35)(2x+1)(3-2x)\ge 0, \\ (x^2-2x-8)(2x-1)\ge 0. \end{cases}$

15.3.*

а) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^3(x^2-4)^4(x^2-9)^3(x^2+1)}{(-3x)(x^2-x-6)(x^2-3x+16)}< 0, \\ \dfrac{2x^2+x-16}{x^2+x}<1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\le \dfrac{(3x+1)^2}{4}, \\ \dfrac{x^3+37}{(x+4)^3}\ge 1+\dfrac{1}{(x+4)^2}. \end{cases}$

Задание 16. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 5x-20\le x^2\le 8x, \\ 1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2. \end{array} \right.$

в) $\left[\begin{array}{l} -1>4x-4, \\ 1+\dfrac{3-x}{3}\le \dfrac{2x-1}{5}. \end{array} \right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 3+2x-x^2\le 0, \\ \dfrac{3+2x}{5-2x}<0. \end{array} \right.$

г) $\left[\begin{array}{l} 2-3x>x, \\ \dfrac{3-2x}{5}<\dfrac{1-x}{2}. \end{array} \right.$

Задание 17. ***Решить совокупность систем неравенств:**

а) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x+6>0, \\ \dfrac{3x-21}{x^2+x+4}<0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3>1, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}<0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2+9x-20}{11x-x^2-30}\le -1, \\ x^2+18>5x. \end{cases} \end{array} \right.$

б) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{(2x+9)(7x-2)}{(6x+9)^2}\le 0, \\ \dfrac{5x+37}{12+x-x^2}>2; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{(9-2x)(3x+5)}{(7-5x)^2}\ge 0, \\ \dfrac{43-34x}{18-9x+x^2}<4. \end{cases} \end{array} \right.$

Задание18.**Решить систему совокупностей неравенств:

а) $\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (x+1)(x-3) > 0, \\ 2 - x^2 \le 0; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x^2 > 25, \\ \dfrac{x-1}{x+2} < 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$

б) $\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{x-3} < \dfrac{3}{x}, \\ (x-10)(x^2+3x+8) \ge 0, \\ x^2 - 1 < 0; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{x+2} < \dfrac{4}{x}, \\ \dfrac{x-4}{x-3} > \dfrac{x-3}{x-4}. \end{array} \right. \end{array} \right.$

в) $\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2}{7x-3x^2-10} > -1, \\ x^2 - 64 < 0, \end{array} \right. \\ x^3 - 7x + 6 > 0; \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x - 2x^2 < 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$

г) $\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^4 + 5x^2 + 4 \le 0, \\ 8x^2 - x^3 - 15x \ge 0; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4x-5} > 0, \\ \dfrac{x-3}{x-5} < 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$

Список литературы

1. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. – 17-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2013. – 271 с.
2. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова] ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2013. – 256 с.
3. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 287 с.
4. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова] ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2013. – 287 с.
5. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2016. – 320 с.
6. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова] ; под ред. С. А. Теляковского. – 21-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 271 с.
7. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во "Просвещение" – 5-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 304 с.
8. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1991. – 352 с.
9. Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и к другим формам выпускного и вступительного экзаменов / сост. Г. И. Ковалева, Т. И. Бузулина, О. Л. Безрукова, Ю. А. Розка. – Волгоград : Учитель, 2007, – 494 с.
10. Мерзляк, А. Г. Алгебра : 7 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М . С. Якир. – М. : Вентана-Граф, 2015. – 272 с.
11. Мерзляк, А. Г. Алгебра : 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М . С. Якир. – М. : Вентана-Граф, 2013. – 256 с.
12. Мерзляк, А. Г. Алгебра : 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М . С. Якир. – М. : Вентана-Граф, 2014. – 304 с.
13. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7 класс: В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 175 с.

14. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс: В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – 14-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2012. – 175 с.
15. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс: В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. – 14-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2012. – 280 с.
16. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс: В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2010. – 224 с.
17. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс: В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2010. – 223 с.
18. Мордкович, А. Г. Преподавание алгебры в 8-9 классах по учебникам А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева : метод. пособие для учителя / А. Г. Мордкович. – 2-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2014. – 128 с.
19. Муравин, Г. К. Алгебра. 7 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2013. – 285 с.
20. Муравин, Г. К. Алгебра. 8 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2013. – 254 с.
21. Муравин, Г. К. Алгебра. 9 кл. : учебник / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2014. – 315 с.
22. Шахмейстер, А. Х. Уравнения. – 3-е издание, исправленное и дополненное – М. : МЦНМО : СПб. : Петроглиф, Виктория плюс, 2008. – 264 с.
23. Шестаков, С. А. ЕГЭ 2017. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень). – М. : МЦНМО, 2017. – 352 с.

Приложение. Итоговый тест

1. Сократить дробь $\dfrac{5x^2 - x - 4}{x^3 - 1}$:

a) $\dfrac{5x+4}{x^2+x+1}$;

b) $\dfrac{1}{x^2-x+1}$;

c) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$;

d) $\dfrac{5x+4}{x^2-x+1}$.

2. Сократить дробь $\dfrac{x^4 - x^2 - 12}{x^4 + 8x^2 + 15}$:

a) $\dfrac{x-2}{x^2+5}$;

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+5}$;

c) $\dfrac{x^2+4}{x^2-5}$;

d) $\dfrac{x^2-4}{x^2-5}$.

3. Сократить дробь $\dfrac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}$:

a) $\dfrac{x+2}{x+1}$;

b) $\dfrac{x+2}{x-1}$;

c) $\dfrac{x+2}{2x-2}$;

d) $\dfrac{x+2}{2x+1}$.

4. Сократить дробь $\dfrac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^6 - y^6}$:

a) $\dfrac{1}{x^2 - y^2}$;

b) $x^2 - y^2$;

c) $(x-y)^2$;

d) $x-y$.

5. Упростить выражение $\dfrac{1}{(x-y)\cdot(x-z)} + \dfrac{1}{(y-z)\cdot(y-x)} + \dfrac{1}{(z-x)\cdot(z-y)}$:

a) 0;

b) x;

c) y;

d) $x-y$.

6. Упростить выражение $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$:

a) $(y-2x)^3$;

b) $(2x+y)^3$;

c) $8x^3 - y^3$;

d) $(2x-y)^3$.

7. Найти сумму целых корней многочлена $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$:

a) 3;

b) -3;

c) 0;

d) 2.

8. Найти значение выражения $\dfrac{x\cdot(y-3x)^2}{3x^2 - xy} - 3x$ при $x = 2{,}18,\ y = -5{,}6$.

9. Найти значение выражения $\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x} + 2\right)\cdot\dfrac{1}{x+3}$ при $x = 6$.

10. Упростить выражение $\dfrac{x^3y - xy^3 + y^3z - yz^3 + z^3x - zx^3}{x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2}$ и найдите его значение при $x = y = z = 1$.

11. Указать пару равносильных уравнений:

a) $x^2-4=0$ и $x-2=0$;

b) $(x^2-4)\cdot(x-5)=0$ и $x^2-4=0$;

c) $x^3=x$ и $x^2=1$;

d) $2x-5=11$ и $7x+6=62$.

12. Указать пару неравносильных неравенств:

a) $\frac{x^2-3}{x+5}\ge 0$ и $(x^2-3)\cdot(x+5)\ge 0$;

b) $\frac{x-3}{x^2+5}\ge 0$ и $x-3\ge 0$;

c) $4x^2+2x-8\ge 0$ и $2x^2+x-4\ge 0$;

d) $\frac{11x+1}{-x^2-1}<0$ и $11x+1>0$.

13. Составить приведенное квадратное уравнение с корнями 1 и -3:

a) $x^2-2x-3=0$;

b) $x^2+2x-3=0$;

c) $x^2-4x-3=0$;

d) $x^2-2x+3=0$.

14. Найти отрицательный корень уравнения $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{x+2}{11}=\frac{2-5x}{4}$.

15. Найти сумму корней уравнения $3(x+1)\cdot(x-3)=x\cdot(2x-1)-3$:

a) 7;
b) 5;
c) -5;
d) -7.

16. Найти сумму корней уравнения $x^3+3x^2-25x-75=0$:

a) -3;
b) 3;
c) 0;
d) 5.

17. Указать количество корней уравнения

$$\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{20}{(x+3)^2}=8\cdot\left(\frac{x+3}{5}-\frac{2}{x+3}\right)+1,$$

принадлежащих отрезку $[-6;-4]$:

a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 4.

18. Укажите промежуток, которому принадлежит отрицательный корень уравнения $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)=3$:

a) $[-5;-4]$;
b) $(-4;-1)$;
c) $[-1;0]$;
d) $(0;1]$.

19. Сколько корней имеет уравнение $4x^3+6x^2+5x+69=0$?

a) не имеет действительных корней
b) 1;
c) 2;
d) 3.

20. Сколько корней имеет уравнение $3x^3-2x^2+x-10=0$?

a) не имеет действительных корней
b) 1;
c) 2;
d) 3.

21. Сколько корней имеет уравнение $x^4+2x^3-7x^2-4x+4=0$?

a) не имеет действительных корней;
b) 2;
c) 3;
d) 4.

22. Сколько корней имеет уравнение $x\cdot(x-4)\cdot(4+x^2)=5\cdot(x+1)^2$?

a) не имеет действительных корней;
b) 1;

c) 2;
d) 3.

23. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^3+3x^2-7x+1=0$, используя теорему Виета.

24. Указать наибольший корень уравнения $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0.$

25. Указать наименьший корень уравнения $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1).$

26. Указать наименьший корень уравнения $6(x^2-4)^2+5(x^2-4)^2\cdot(x^2-7x+12)+(x^2-7x+12)^2=0.$

27. Решить уравнение $2x^5+x^4+3x^3-6x^2-8x-64=0.$

28. Решить уравнение $x^3=-x+10.$

29. Решить уравнение $x^5+5x-42=0.$

30. Решить уравнение $x^6+x^2-8x+6=0.$

31. Найти сумму корней уравнения $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3-x=0.$

32. Решить неравенство $\dfrac{x^2-3x-18}{-x^2+13x-42}\ge 0$:

a) $-3\le x<6;\ 6<x<7;$
b) $-3\le x<6;\ 6<x\le 7;$
c) $-3<x<7;$
d) $-3\le x<6.$

33. Решить неравенство $x+\dfrac{6}{x+2}>3x+8$:

a) $(-\infty;-5]\cup[-2;-1)$;
b) $(-\infty;-5)\cup(-2;-1)$;
c) $-3<x<7;$
d) $-3\le x<6.$

34. Решить неравенство $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-3x^2-9x-5}\ge 0$:

a) $(-\infty;-3] \cup (5;+\infty)$;
b) $(-\infty;-3) \cup (5;+\infty)$;
c) $(-\infty;-3) \cup \{1\} \cup (5;+\infty)$;
d) $(-\infty;-3] \cup \{1\} \cup (5;+\infty)$.

35. Решить неравенство $(7-7x^2)\cdot(x^2-6x+8)\cdot(x^4+1)<0$:

a) $(-\infty;-1] \cup [1;2] \cup [4;+\infty)$;
b) $(-\infty;-1) \cup (1;2) \cup (4;+\infty)$;
c) $(-\infty;-1) \cup [1;2] \cup (4;+\infty)$;
d) $(-\infty;-1] \cup (1;2) \cup (4;+\infty)$.

36. Решить неравенство $(x^2+x)^2-8x^2-8x+12<0$:

a) $(-3;-2] \cup [1;2]$;
b) $[-3;-2] \cup [1;2]$;
c) $(-3;-2) \cup (1;2)$;
d) $(-\infty;-3) \cup (-2;1) \cup (2;+\infty)$.

37. Решить неравенство $(2x-3)^8 \le (4+3x)^8$:

a) $(-\infty;-7] \cup \left[-\frac{1}{5};+\infty\right)$;

b) $\left[-7;-\frac{1}{5}\right]$;

c) $(-\infty;-7) \cup \left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$;

d) $\left(-7;-\frac{1}{5}\right)$.

38. Решить неравенство $-x^3+4x \le x^2-4$:

a) $[-2;-1] \cup [2;+\infty)$;
b) $[-1;2]$;
c) $(-2;-1) \cup (2;+\infty)$;
d) $(-1;2)$.

39. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $x^4+2x^2<3$?

a) 4;
b) 3;
c) 2;
d) 1.

40. Сколько целочисленных решений имеет система уравнений $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 25 \end{cases}$?

a) Бесконечное множество решений;
b) Не имеет решений;
c) 2 решения;
d) 1 решение.

41. Сколько целочисленных решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 9 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$?

a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) Не имеет решений.

42. Сколько целочисленных решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 27 \\ x^2 - 4y^2 = 9 \end{cases}$?

a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) Не имеет решений.

43. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22 \end{cases}$?

a) 4;

b) 3;
c) 2;
d) Не имеет решений.

44. Сколько целочисленных решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$?

a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) Не имеет решений.

45. Решить систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x+3}{3-x} < 2 \\ x^3 < 16x \\ 4 \geq x^2 \end{cases}$

a) $(0;4)$;
b) $(0;1)$;
c) $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$;
d) Не имеет решений.

46. Указать количество целочисленных решений системы неравенств $\dfrac{5x-7}{x-5} < 4 - \dfrac{x}{5-x} + \dfrac{3x}{x^2-25} < 4$:

a) 5;
b) 4;
c) 3;
d) 2.

47. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{3x-7-8x^2}} + \sqrt{4x^2-1}$:

a) $\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]$;

b) $\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]$;

c) $-1;1$;

d) $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

48. Решить неравенство $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)<0$:

a) $(1;2)$;
b) $(-\infty;2)$;
c) $(-\infty;1)\cup(2;3)$;
d) $(2;+\infty)$.

49. Указать количество целочисленных решений совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>0\\ x^2<16\end{cases}\\ \begin{cases}3x-9<0\\ 100\ge x^2\end{cases}\end{array}\right.$$

a) 13;
b) 14;
c) 15;
d) 16.

50. Указать количество промежутков, составляющих решение системы совокупностей неравенств $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+2)}{x-3}\le 0\\ \dfrac{x-5}{(x-6)^2\cdot(x-8)}<0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x^2-9x+14<0\\ x>x^2\end{array}\right.\end{cases}$.

Ключ к тесту

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
а	б	б	а	а	г	б	5,6	0,5	3

11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
г	а	б	-2	б	а	б	а	б	б
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
г	в	23	2	-1	0	2	2	2	1
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
2	а	б	г	б	в	а	а	г	г
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
б	б	а	б	б	а	б	в	14	3

Учебное пособие

Фирер Анна Владимировна,
Яковлева Елена Николаевна,
Елисова Анна Петровна,
Захарова Татьяна Вячеславовна

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА.
РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Редактор И.А. Вейсиг
Компьютерная верстка авторов

Подписано в печать 25.07.2019. Печать плоская
Формат 60x84/16 Бумага офсетная
Усл. печ. л. 6,7 Тираж 100 экз. Заказ

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391) 206-26-67; http://bik.sfu-kras.ru
E-mail publishing_house@sfu-kras.ru

Отпечатано в типографии «ЛИТЕРА-принт»