Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Сибирский федеральный университет

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (Протокол № 951 от 13.09.2021)

Красноярск-Лесосибирск 2021

УДК 372.851

ББК 22.141я73+22.191я73

Э 456

Рецензенты:

Т.Ю. Войтенко, канд. физ.-мат. наук, доцент (Лесосибирский филиал ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева»);

А.Н. Втюрин, доктор физ.-мат. наук, профессор (ФИЦ «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»)

Э 456 Элементарная математика. Иррациональные уравнения и неравенства: учебное пособие / А.В. Фирер, Е.Н. Яковлева, А.П. Елисова, Т.В. Захарова. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2021. – 114 с.

ISBN 978-5-7638-4571-6

В учебном пособии систематизирована информация о способах и приемах решения иррациональных уравнений, неравенств и их систем. Представлены задания для самостоятельной работы, в том числе интерактивные задания, созданные в LearningApps.org, а также примерный тест для проверки знаний и умений.

Приведенные материалы способствуют формированию у студентов компетенций, определяемых ФГОС ВО.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования, где предусмотрено изучение курса «Математика», а также для обучающихся по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование и 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

ISBN 978-5-7638-4571-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Иррациональные уравнения и неравенства часто вызывают трудности у студентов при изучении соответствующих разделов элементарной математики. Данное учебное пособие содержит материал, направленный на формирование профессиональных компетенций при подготовке бакалавров педагогического образования в соответствии с ФГОС ВО.

Целью данного учебного пособия является применение системного подхода к организации самостоятельной познавательной деятельности студентов в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта и современной парадигмой образования.

Задачи:

– раскрыть основные теоретические разделы курса «Элементарная математика. Иррациональные уравнения и неравенства»;

– сформировать у студентов навыки самостоятельной познавательной деятельности, необходимые для их дальнейшего самообразования;

– развить мотивацию самостоятельности познавательной деятельности как потребности в получении новых знаний;

– раскрыть творческие способности студентов.

Структура пособия определяется его содержанием и дидактическими задачами. Каждый раздел посвящен определенным темам, снабжен интерактивными вопросами для самоконтроля, заданиями, упражнениями. Это позволяет создать единую логику изложения каждой темы, что дает возможность формировать у студентов умение строить относительно логичные и последовательные частные суждения на основе общего подхода.

Вопросы и задания различны по уровню сложности. Часть их связана с репродуктивным усвоением и переработкой информации. Большинство из них нацелено на аналитическую работу студентов на основе активизации многих интеллектуальных функций: сравнения и сопоставления, абстрагирования и конкретизации, классифицирования и обобщения и др. Так, например, метод конкретной ситуации развивает способность анализировать и самостоятельно формулировать познавательные задачи.

Выполнение конкретного задания при знакомстве студента с новым материалом помогает глубже понять изучаемый материал, выделить познавательные задачи и цели учебной деятельности.

При работе над пособием использовалась учебная литература, список которой приведен в конце и может служить основой для последующего самостоятельного изучения данного курса.

1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1.1. Краткие теоретические сведения об иррациональных выражениях. Основные понятия

При решении подавляющего большинства школьных задач приходится выполнять те или иные преобразования. Тождественные преобразования служат аналитическим аппаратом при доказательстве теорем и выводе формул, решении уравнений, неравенств и их систем, упрощении выражений, исследовании функций и др. Нередко успех в решении задачи зависит от того, как учащийся владеет техникой преобразований.

В школьном курсе математики большое практическое значение имеют тождественные преобразования иррациональных выражений. Их изучению будет посвящена первая глава.

Прежде чем рассмотреть конкретные приемы преобразования иррациональных выражений, напомним ряд основополагающих понятий.

Алгебраическое выражение, содержащее операции извлечения корня из переменной или возведения переменной в рациональную степень, не являющуюся целым числом, называется **иррациональным** относительно этой переменной [5].

Из школьного курса математики известно, что любое **рациональное число** $k \in \boldsymbol{Q}$ можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где m принадлежит целым числам, а число n – натуральным.

В процессе выполнения тождественных преобразований иррациональных выражений, а также при решении уравнений и неравенств, содержащих радикалы (корни), используют понятие степени с рациональным показателем и ее свойства.

Напомним определение с**тепени с рациональным показателем**:

1. $a^0 = 1$ при $a \neq 0$;

2. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ при $a \geq 0, m, n \in \boldsymbol{N}, n \geq 2$;

3. $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ при $a > 0$, k – положительное рациональное число;

4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ при $a < 0, m \in \boldsymbol{Z}$.

Если $a = 0$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Например, $8^{\frac{1}{3}} = 2$, $(-3)^{-2} = \frac{1}{9}$, $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25}$, $2^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $621^{\frac{1}{2}} = \sqrt{621}$.

Заметим, что последние три числа являются **иррациональными**, то есть их нельзя представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. Однако всякое иррациональное число представляется в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

В выражениях часто встречаются иррациональные числа $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$, $e = 2{,}7182845\ldots$

Свойства степени с рациональным показателем аналогичны свойствам степени с целым показателем.

Для любых $a, b > 0$ и $m, n \in \boldsymbol{Q}$ справедливы следующие свойства.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Квадратным корнем из неотрицательного действительного числа $\boldsymbol{a}$ называют число b, квадрат которого равен a:

$$b^2 = a.$$

Например, числа 4 и -4 – квадратные корни из 16, так как $4^2 = 16$ и $(-4)^2 = 16$.

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного действительного числа $\boldsymbol{a}$ называют неотрицательное число c, квадрат которого равен a. Обозначается $\sqrt{a}$:

$$c^2 = a \text{ и } c > 0, \text{ следовательно, } c = \sqrt{a}.$$

Например, $\sqrt{49} = 7$, так как $7^2 = 49$ и $7 > 0$, $\sqrt{25} \neq -5$, так как $-5 < 0$.

Нужно помнить, что знак «√» (называемый **радикалом**) всегда означает «арифметический квадратный корень из числа *a*», хотя при чтении слово «арифметический» опускают.

Корнем $\boldsymbol{n}$-й степени ($\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$) из действительного числа $\boldsymbol{a}$ называется число b, n-я степень которого равна a:

$$b^n = a.$$

Например, числа 2 и -2 – корни 4-й степени из 16, так как $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$; число –3 – корень 3-й степени из –27, так как $(-3)^3 = -27$.

Арифметическим корнем $\boldsymbol{n}$-й степени из неотрицательного действительного числа $\boldsymbol{a}$ называется неотрицательное число c, n-я степень которого равна a. Обозначается $\sqrt[n]{a}$:

$$c^n = (\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ где } n \in N, n \geq 2, c \geq 0, a \geq 0.$$

Число a при этом называют **подкоренным числом**, а число n – **показателем корня**.

Например, 3 – арифметический корень 4-й степени из 81, так как $3 > 0$ и $3^4 = 81$; число –3 не является арифметическим корнем 4-й степени из 81, так как – 3<0. Но 3 и –3 – корни 4-й степени из 81.

Если n – нечетное число, $n \geq 3$, $a < 0$, то под $\sqrt[n]{a}$ понимают такое отрицательное число c, что $c^n = a$.

Согласно определению арифметического корня *n*-й степени для любого четного положительного числа n

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \geq 0, \text{ где } |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Например, $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$, $\sqrt{(-3)^2} = 3$.

Пусть $a \geq 0, b \geq 0$, тогда выполняются следующие **свойства арифметического корня:**

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \tag{1.1}$$

Последнее равенство справедливо для любого числа сомножителей.

Например, $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Если $b \neq 0$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{1.2}$$

Свойства (1.1) и (1.2) в случае $a < 0$ и $b < 0$ имеют вид

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}, \tag{1.3}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}. \tag{1.4}$$

Справедливы свойства

$$(\sqrt[n]{a^m})^k = \sqrt[n]{a^{m \cdot k}}, \tag{1.5}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}} = \sqrt[n \cdot k]{a^m}, \tag{1.6}$$

$$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{|a^m|}, \text{ если } k \text{ – четное,} \tag{1.7}$$

$$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ если } k \text{ – нечетное.} \tag{1.8}$$

Заметим, что если показатели корней – нечетные числа, то все приведенные выше свойства выполняются и для $a < 0$, $b < 0$, и для $a \cdot b < 0$.

При $k > 0$ имеют место свойства

$$k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n \cdot a}, \tag{1.9}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}. \tag{1.10}$$

***Пример* 1.1.** Вычислить $64^{0,(3)}$.

Решение. Каждую бесконечную периодическую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби, используя следующее правило:

Правило. Чтобы обратить бесконечную периодическую дробь в обыкновенную, нужно в числителе записать разность числа, стоящего до второго периода, и числа, стоящего до первого периода, а в знаменателе записать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пользуясь данным правилом, запишем число $0,(3)$ в виде обыкновенной дроби:

$$0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, пользуясь свойствами степеней, $64^{0,(3)}=(4^3)^{\frac{1}{3}} = 4.$

Ответ: 4.

***Пример* 1.2.** Сравнить числа .$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$.

Решение. Приведем данные числа к одному показателю степени $\text{НОК}(2,3,4) = 12$, используя свойства степеней:

$$\sqrt{2} = \sqrt[2\cdot 6]{2^6} = \sqrt[12]{64},\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[3\cdot 4]{3^4} = \sqrt[12]{81},\ \sqrt[4]{5} = \sqrt[4\cdot 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}.$$

Так как $64 < 81 < 125$, то $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$.

Ответ: $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$.

***Пример* 1.3.** Вычислить .$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[8]{4}}}{8^{-\frac{1}{8}}}$.

Решение. Используя свойства степеней, получаем

$$\left(2^{-1}\cdot(2^2)^{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} : (2^3)^{-\frac{1}{8}} = \left(2^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{8}} = 2^0 = 1.$$

Ответ: 1.

***Пример* 1.4.** Упростить выражение $A = (\sqrt{48}+\sqrt{27}-\sqrt{45})\cdot(\sqrt{500}-\sqrt{12}-\sqrt{20})$.

Решение. Упростим каждый радикал, содержащийся в выражении A, с помощью свойств арифметического корня:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16\cdot 3} = 4\sqrt{3}, \sqrt{27} = \sqrt{9\cdot 3} = 3\sqrt{3}, \sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = 3\sqrt{5},$$

$$\sqrt{500} = \sqrt{100\cdot 5} = 10\sqrt{5}, \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}, \sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

После этого выражение A примет вид

$$A = \left(4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)\cdot\left(10\sqrt{5}-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right) =$$

$$= \left(7\sqrt{3} - 3\sqrt{5}\right) \cdot \left(8\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\right) = 56\sqrt{15} - 14 \cdot 3 - 24 \cdot 5 + 6\sqrt{15} =$$

$$= 62\sqrt{15} - 162 = 2 \cdot \left(31\sqrt{15} - 81\right).$$

Ответ: $2 \cdot \left(31\sqrt{15} - 81\right)$.

***Пример* 1.5.** Вычислить $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{7}-4\right)^2}$.

Решение. По определению арифметического корня

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{7}-4\right)^2} = \left|2-\sqrt{7}\right| + \left|\sqrt{7}-4\right|.$$

По определению модуля числа

$\left|2-\sqrt{7}\right| = \sqrt{7} - 2$, так как $\sqrt{7} > 2$, $\left|\sqrt{7}-4\right| = 4 - \sqrt{7}$, так как $\sqrt{7} < 4$.

Откуда находим значение исходного выражения

$$\sqrt{7} - 2 + 4 - \sqrt{7} = 2.$$

Ответ: 2.

Если на практике при решении задачи встретится выражение вида $\sqrt{a + b\sqrt{A}}$ или $\sqrt[3]{a + b\sqrt{A}}$, то «извлечь» соответствующий корень могут помочь формулы сокращенного умножения. Методом подбора можно попытаться применить одну из них к подкоренному выражению. При упрощении выражений, содержащих квадратные корни, может быть полезно равенство при $a, b > 0$, известное из старых учебников по алгебре:

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-Ab^2}}{2}} \pm \frac{\sqrt{a-\sqrt{a^2-Ab^2}}}{2} \qquad (1.11)$$

В справедливости приведенного выше равенства читатель может легко убедиться самостоятельно.

***Пример* 1.6.** Упростить выражение А$=\sqrt[4]{67 - 16\sqrt{3}}$.

Решение. Подкоренное выражение $67 - 16\sqrt{3}$ перепишем следующим образом:

$$3 - 16\sqrt{3} + 64 \text{ или } \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{3} + 8^2.$$

Последнее выражение представляет собой квадрат разности $\left(\sqrt{3}-8\right)^2$. Откуда получаем

$$A=\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-8\right)^2}=\sqrt{\left|\sqrt{3}-8\right|}=\sqrt{8-\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{8-\sqrt{3}}$.

***Пример* 1.7.** Упростить выражение $A=\frac{1+\sqrt{13-4\sqrt{3}}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$.

Решение. Пользуясь формулой (1.11) или методом подбора, замечаем, что

$$\sqrt{13-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}=\left|1-2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}-1,$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3},$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left|1-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-1.$$

Выполняя соответствующую замену, получаем выражение A следующего вида:

$$A=\frac{2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}.$$

Преобразуем далее полученное выражение, используя часто встречающийся прием: умножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю. Так как в нашем примере выражение $3+2\sqrt{3}$ является сопряженным к $3-2\sqrt{3}$, то, применяя формулу разности квадратов $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$, избавляемся от иррациональности в знаменателе дроби:

$$A=\frac{2\sqrt{3}\cdot(3+2\sqrt{3})}{(3-2\sqrt{3})\cdot(3+2\sqrt{3})}=\frac{12+6\sqrt{3}}{-3}=-2\sqrt{3}-4.$$

Ответ: $-2\sqrt{3}-4$.

***Пример* 1.8[*].** Вычислить $\sqrt{2^3\sqrt{5^3\sqrt{2^3\sqrt{5^3\ldots}}}}$.

Решение. В данном выражении заменим корни степенями с рациональными показателями:

$$\sqrt{2^3\sqrt{5^3\sqrt{2^3\sqrt{5^3\ldots}}}} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2^2}} \cdot 2^{\frac{3}{2^3}} \cdot 5^{\frac{3}{2^4}} \cdot \ldots$$

Преобразуем последнее выражение, используя свойства степеней:

$$2^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2^2}} \cdot 2^{\frac{3}{2^3}} \cdot 5^{\frac{3}{2^4}} \cdot \ldots = 2^{3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right)} \cdot 5^{3\cdot\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)}.$$

Замечаем, что в показателях полученных степеней стоят суммы убывающих геометрических прогрессий. Найдем эти суммы:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots = \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2^3\sqrt{5^3\sqrt{2^3\sqrt{5^3\ldots}}}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 5^{3\cdot\frac{1}{3}} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Ответ: 20.

***Пример* 1.9*.** Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Решение. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби в данном случае поможет формула разности кубов. Для этого нужно умножить ее числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы чисел $\sqrt[3]{2}$ и 1:

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)} = \frac{2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2.$$

Ответ: $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2$.

***Пример* 1.10*.** Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Решение. Дополним знаменатель дроби до формулы разности квадратов, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1}.$$

Очевидно, далее требуется применить формулу разности квадратов еще раз:

$$\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1}=\frac{(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}+3\sqrt{3}+7}{11}.$$

Ответ:

$$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}+3\sqrt{3}+7}{11}.$$

***Пример* 1.11*.** Упростить выражение $A=\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$.

Решение. Запишем подкоренное выражение в виде куба разности двух чисел. Имеем

$$9\sqrt{3}=3\sqrt{3}+6\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \text{ и}$$

$$11\sqrt{2}=9\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^3.$$

Таким образом,

$$A=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3-3\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{2}+3\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

***Пример* 1.12*.** Вычислить сумму $A=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Решение. Возведем в куб обе части данного равенства:

$A^3=\left(20+\sqrt{392}\right)+3\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\cdot\left(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)^2+\left(20-\sqrt{392}\right)$, или $40+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\cdot\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)=A^3$, где $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=A$.

Таким образом, $40+3\sqrt[3]{20^2-(\sqrt{392})^2}\cdot A=A^3$, $A^3-3\sqrt[3]{20^2-\left(\sqrt{392}\right)^2}\cdot A-40=0$, $A^3-6A-40=0$.

Решим последнее кубическое уравнение разложением на множители:

$$A^3-6A-40=(A^3-4A^2)+(4A^2-16A)+(10A-40)=A^2\cdot(A-4)+$$

$4A \cdot (A-4) + 10 \cdot (A-4) = (A-4) \cdot (A^2 + 4A + 10)$.

Так как $A^2 + 4A + 10 = (A^2 + 4A + 4) + 6 = (A+2)^2 + 6 \neq 0$, то равенство $(A-4) \cdot (A^2 + 4A + 10) = 0$ выполняется только при $A = 4$.

Окончательно имеем $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 4$.

Ответ: 4.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pagztaez321

1.2. Основные виды преобразований иррациональных выражений

В случае преобразования иррациональных выражений, содержащих переменную под знаком корня, используются как общие методы тождественных преобразований алгебраических выражений [13], так и специальные приемы. К общим приемам относятся раскрытие скобок, группировка и приведение подобных слагаемых и т.п. Особую важность здесь играет определение степени с рациональным показателем и его свойства, приведенные выше. Под специальными приемами будем понимать, например, выделение полного квадрата разности или суммы под знаком корня четной степени, использование других формул сокращенного умножения и формулы (1.11), умножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю с целью избавиться от иррациональности в знаменателе, и некоторые другие приемы, рассмотренные на примерах в данном пособии.

Следует заметить, что при преобразовании иррациональных выражений, как и при преобразовании любых других выражений, надо учитывать область допустимых значений (ОДЗ) и не допускать ее сужения.

Иррациональные выражения рассматриваются на множестве действительных чисел, поэтому все корни четной степени нужно рассматривать как арифметические. Условие неотрицательности подкоренного выражения в радикалах четной степени является основным при установлении ОДЗ. Аналогичная ситуация складывается и с уравнениями.

Рассмотрим ряд показательных примеров.

***Пример* 1.13.** Упростить выражение $\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{x^5}}:\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^4}}\right)^{-1}$.

Решение. Используя свойства степеней, получаем

$$\frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}}:\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-2}} = 1 \cdot x^{-2+\frac{1}{2}} = x^{-\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $x^{-\frac{3}{2}}$.

***Пример* 1.14.** Найти значение выражения $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2}$ при $0 \le x \le 2$.

Решение. Из определения арифметического корня следует, что

$$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x, \text{ так как } x \le 2;$$

$$\sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2, \text{ так как } x \ge 0.$$

Следовательно, $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2} = 2-x+x+2 = 4$ при $0 \le x \le 2$.

Ответ: 4.

***Пример* 1.15.** Найти значение выражения $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ при $1 \le x \le 2$.

Решение. Выполним замену $\sqrt{x-1} = t$, тогда $x = t^2+1$. Подставим t в исходное выражение

$$\sqrt{t^2+1-2t}+\sqrt{t^2+1+2t}.$$

Используя формулы квадрата разности и квадрата суммы, преобразуем выражение

$$\sqrt{(t-1)^2}+\sqrt{(t+1)^2} = |t-1|+|t+1|.$$

Найдем пределы изменения переменной t:

$$t = \sqrt{x-1} \;\; => 0 \le \sqrt{x-1} \le 1.$$

Следовательно, $0 \leq t \leq 1$. Отсюда, на основании определения арифметического корня и модуля, получаем

$|t-1| = 1-t$, так как $t \leq 1$, $|t+1| = t+1$.

Значение исходного выражения равно $1 - t + t + 1 = 2$.

Ответ: 2.

***Пример* 1.16*.** Преобразовать выражение

$$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$$

к виду, не содержащему знаков корня и модуля.

Решение.

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|,$$

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|,$$

поэтому $A = |x-2| + |x+3|$. Точки $x = -3$ и $x = 2$ разбивают числовую прямую на промежутки $(-\infty; -3)$, $[-3; 2)$ и $[2; +\infty)$. Рассмотрим значения модулей на каждом из этих промежутков:

При $x < -3$ следует, что $|x-2| = -x+2$, $|x+3| = -x-3$, то есть

$$A = |x-2| + |x+3| = -x + 2 - x - 3 = -2x - 1.$$

При $-3 \leq x < 2$ получаем $|x-2| = -x+2$, $|x+3| = x+3$, значит,

$$A = |x-2| + |x+3| = -x + 2 + x + 3 = 5.$$

При $x \geq 2$ имеем $|x-2| = x-2$, $|x+3| = x+3$, то есть

$$A = |x-2| + |x+3| = x - 2 + x + 3 = 2x + 1.$$

Итак, $A = \begin{cases} -2x - 1 \text{ при } x < -3, \\ 5 \text{ при } -3 \leq x < 2, \\ 2x + 1 \text{ при } x \geq 2. \end{cases}$

***Пример* 1.17.** Упростить выражение

$$A = \left(\frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\right) \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x+y)^2}.$$

Решение. Приведем дроби в первой паре скобок к общему знаменателю. Для этого необходимо найти НОК знаменателей, разложив их на множители:

$$\frac{x}{\sqrt{xy}+y}+\frac{y}{\sqrt{xy}-x}-\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{x}{\sqrt{y}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{y}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)}-\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=$$

$$=\frac{x\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+y\sqrt{y}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-(x+y)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=$$

$$=\frac{x\sqrt{xy}-x^2+y\sqrt{xy}+y^2-(y^2-x^2)}{\sqrt{xy}\cdot(y-x)}=\frac{\sqrt{xy}\cdot(x+y)}{\sqrt{xy}\cdot(y-x)}=\frac{x+y}{y-x}.$$

Последнюю полученную дробь подставим в исходное выражение A и выполним сокращение:

$$\frac{x+y}{y-x}\cdot\frac{y^2-x^2}{(x+y)^2}=\frac{(y-x)\cdot(x+y)}{(y-x)\cdot(x+y)}=1.$$

Ответ: 1.

***Пример* 1.18*.** Упростить выражение

$$A=\sqrt{\frac{x+y^2}{y}+2\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{x+y^2}{y}-2\sqrt{x}}$$

при $x\geq 0$, $y>0$.

Решение. Пользуясь определением арифметического корня, преобразуем исходное выражение

$$A=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}+y\right)^2}{y}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}-y\right)^2}{y}}=\frac{\left|\sqrt{x}+y\right|-\left|\sqrt{x}-y\right|}{\sqrt{y}}.$$

Так как $x\geq 0$, $y>0$, то $\sqrt{x}+y>0$, а значит, и $\left|\sqrt{x}+y\right|=\sqrt{x}+y$. Следовательно,

$$A=\frac{\sqrt{x}+y-\left|\sqrt{x}-y\right|}{\sqrt{y}}.$$

Далее, раскрывая модуль в числителе дроби, рассмотрим два случая.

<u>Случай 1</u>. Пусть $\sqrt{x}-y\geq 0$, тогда $\left|\sqrt{x}-y\right|=\sqrt{x}-y$ и

$$A=\frac{\sqrt{x}+y-\sqrt{x}+y}{\sqrt{y}}=\frac{2y}{\sqrt{y}}=2\sqrt{y}.$$

<u>Случай 2.</u> Пусть $\sqrt{x}-y<0$, поэтому $\left|\sqrt{x}-y\right|=-\sqrt{x}+y$ и

$$A = \frac{\sqrt{x} + y + \sqrt{x} - y}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{xy}}{y}.$$

Итак, $A = \begin{cases} 2\sqrt{y} \text{ при } \sqrt{x} \geq y, \\ \frac{2\sqrt{xy}}{y} \text{ при } \sqrt{x} < y. \end{cases}$

***Пример* 1.19.** Упростить выражение

$$A = \left(\frac{x\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy}} + \frac{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}\right) : \sqrt[3]{x^5}.$$

Решение. Выполним последовательно преобразование первой и второй дроби в скобках:

$$\frac{x\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})} = \frac{\sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} =$$

$= \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right);$

$\frac{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{\sqrt[3]{xy} \cdot (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})} = \sqrt[3]{xy};$

$\sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right) + \sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x^2}.$

Таким образом, при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ выражение А примет вид

$$\sqrt[3]{x^2} : \sqrt[3]{x^5} = \frac{1}{x}.$$

Ответ: $\frac{1}{x}$.

***Пример* 1.20.** Упростить выражение

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}\right) : \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right).$$

Решение. Освободимся от иррациональности в знаменателе сначала первой, а затем второй дроби, домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x - (x+1)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x};$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - (x-1)} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}.$$

Запишем сумму двух полученных выражений:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}.$$

Упростим выражение во второй паре скобок:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}.$$

Окончательно получаем

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right):\ \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}.$$

Ответ: $A=\sqrt{x-1}$ при $x>1$.

Доказывая тождество, содержащее переменную и иррациональности, обычно прибегают к следующим преобразованиям:

1. Одновременное преобразование обеих частей равенства.

2. Преобразование только левой или только правой части равенства.

3. Перенос слагаемых в одну из частей равенства с учетом знаков.

4. Умножение левой и правой частей равенства на одно и то же число.

5. Применение формул сокращенного умножения, свойств степени, правил работы с дробями и т.д.

Далее рассмотрим один из возможных случаев доказательства тождества, перечисленных выше.

***Пример* 1.21.** Доказать тождество

$$\left(\sqrt[3]{(x^2+1)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x^2-1)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^{-2}=\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)}{2}$$

при $x>1$.

Решение. Докажем тождество, преобразуя левую часть равенства. Выполним преобразования по действиям.

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x};$$

$$\sqrt[3]{(x^2+1)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{x}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\sqrt[3]{(x^2-1)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{x}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}};$$

Выражение в скобках в левой части исходного равенства заменяем на сумму последних двух полученных выше дробей:

$$\sqrt[3]{(x^2+1)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x^2-1)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Далее получаем

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-2}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2\cdot(x^2+\sqrt{x^4-1})}.$$

Заметим, что выше $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=|x^2-1|=x^2-1$ благодаря тому, что выражение x^2-1 положительно при любых $x>1$.

Следующим шагом избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2\cdot(x^2+\sqrt{x^4-1})}=\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot(x^2-\sqrt{x^4-1})}{2\cdot(x^2+\sqrt{x^4-1})\cdot(x^2-\sqrt{x^4-1})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot(x^2-\sqrt{x^4-1})}{2\cdot(x^4-(\sqrt{x^4-1})^2)}=\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot(x^2-\sqrt{x^4-1})}{2\cdot(x^4-x^4+1)}=\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot(x^2-\sqrt{x^4-1})}{2}.$$

Полученное выражение есть не что иное, как выражение, стоящее в правой части исходного равенства. Тождество доказано при любых $x>1$.

Пример **1.22.** Построить график функции

$$y=\sqrt[4]{6x\cdot(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}},$$

указав область определения.

Решение. Упростим выражение y, прибегая к свойствам арифметического корня и формулам сокращенного умножения:

$$\sqrt[4]{6x\cdot(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}=\sqrt[4]{6x\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt[4]{\left(3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}\right)^2}=$$

$$=\sqrt[4]{6x\cdot(5+2\sqrt{6})\cdot(18x-12\sqrt{6}x+12x)}=\sqrt[4]{36x^2\cdot(5+2\sqrt{6})\cdot(5-2\sqrt{6})}=$$

$$=\sqrt[4]{36x^2\cdot\left(5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2\right)}=\sqrt{6x}.$$

Мы пользовались лишь тождественными преобразованиями, поэтому функции $y=\sqrt[4]{6x\cdot(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$ и $y=\sqrt{6x}$ равны. Функция y определена при $x\geq 0$ и имеет следующий график, изображенный на рис. 1.1.

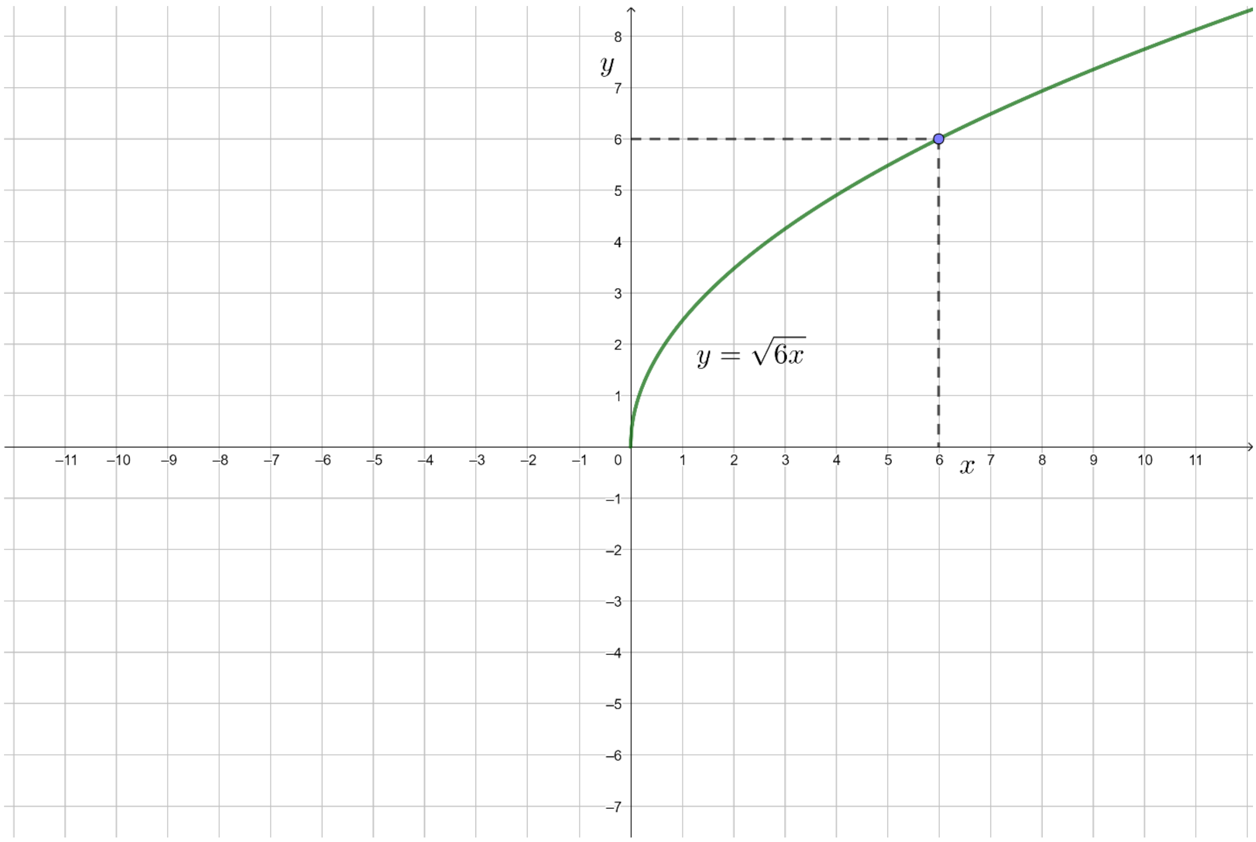

Рис. 1.1. График функции $y=\sqrt[4]{6x\cdot(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}=\sqrt{6x}$

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pb62wuso321

1.3. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислить:

1.1.

а) $\sqrt[3]{(0{,}125)^2}$; **б)** $\sqrt{2\cdot\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{8}}}$; **в)** $\frac{\sqrt[6]{5\sqrt[7]{125\cdot 25}}}{\sqrt[7]{25}}$; **г)** $0{,}25^{\frac{3}{2}}+3\cdot 81^{-0{,}25}+\sqrt[3]{-0{,}027}$;

1.2.

а) $\left|\sqrt{2}+3\right|-\left|\sqrt{2}-3\right|$;

б) $\sqrt{21^2}-\sqrt{(-21)^2}+\sqrt{(-11)^4}$;

в) $\sqrt{(3\sqrt{3}-5)^2}-\sqrt{(3\sqrt{3}+5)^2}$;

г) $\sqrt[6]{(\sqrt[4]{24}-\sqrt{5})^6}-\left(\sqrt[6]{\sqrt[4]{24}+\sqrt{5}}\right)^6$;

д) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{35}-6}}{\sqrt[3]{(\sqrt{35}+6)^2}}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$;

е) $\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{26}+5)^2}}{\sqrt[3]{5-\sqrt{26}}}+\sqrt{26}$.

1.3.

а) $\frac{5\cdot\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\cdot\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}$;

б) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}-\frac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{250}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$;

в) $\frac{\sqrt{28}-\sqrt{7}+\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$;

г*) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+10}$.

1.4.

а) $(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})\cdot(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

б) $(\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{25})\cdot(\sqrt[6]{8}-\sqrt{5})$;

в) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{5}\right)\cdot(\sqrt[4]{7}-\sqrt{\sqrt{5}})$;

г) $\frac{(\sqrt{11}-1)^2+\sqrt{44}}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)}$;

д) $\sqrt{\frac{69^2-169}{24^2-289}}$;

е) $\frac{(4+\sqrt{2})\cdot(8^{\frac{2}{3}}-2^{0,5})}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4})\cdot(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2})}$;

ж) $\frac{(\sqrt[3]{2}+1)\cdot(\sqrt[3]{4}+1-\sqrt[3]{2})}{(3+\sqrt{5})\cdot(9^{0,5}-5^{0,5})}$.

1.5*.

а) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}$;

в) $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$; г) $\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{7-4\sqrt{3}}}$;

д) $\sqrt{\frac{6\sqrt{2}-8}{3\sqrt{2}+4}}$; е) $\frac{\sqrt{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$;

ж) $\frac{\sqrt{4\sqrt{3}+6}-\sqrt{5\sqrt{3}+6\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$; з) $\sqrt[4]{17+\sqrt{288}}$;

и) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$; к) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$;

л) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$; м) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Задание 2*. Сравнить числа:

2.1.

а) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[6]{11}$; **б)** $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[5]{9}$; **в)** $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[6]{110}$; **г)** $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[8]{5}$.

Задание 3. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

3.1.

а) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; **в)** $\frac{2}{\sqrt{50}+7}+\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{18}}$; **г)** $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

д) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}-1}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}+1}$; **е)** $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$; **ж)** $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$.

3.2*.

а) $\frac{3}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$;

б) $\frac{2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$;

в) $\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$;

г) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

Задание 4. Упростить выражение:

4.1.

а) $\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[3]{x^6}+\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$;

б) $x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{x^2}+x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{-x^4}$;

в) $x^{\frac{5}{4}}:\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[7]{-x}:\left((x^2)^{-\frac{3}{7}}\right)$;

г) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}-\sqrt{-\sqrt[3]{-x}}+\sqrt[4]{x^3}x^{\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{(-x)^4}:x$;

д) $x^{-\frac{2}{3}}:x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{12}}+\sqrt{x^{0,2}:x^{3,2}\cdot x^4}$;

е) $\frac{\left((x^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot(x:y)^5\right)^3}{((x^{-2})^2\cdot(y:x)^{-3})^{\frac{1}{4}}}$;

ж) $\frac{(x^2y^{-3})^{-\frac{8}{3}}}{(x^4y^6)^2}\cdot\frac{(x^2y)^{-4}:(x^{-6}y^3)^{\frac{2}{5}}}{(x^3)^{-5}y^{\frac{7}{3}}}$.

4.2*.

а) $\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^2}$;

б) $\sqrt[8]{((-1-x^2)^4)^2}$;

в) $\sqrt{(x-1)^2+4x}+\sqrt{x^2+2+2\sqrt{2}x}$;

г) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-12x+36}$ при $3<x<6$;

д) $\sqrt{x^2-8x+16}-|-x|$ при $1\le x\le 4$;

е) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ при $x=\frac{2021+\sqrt{2020}}{2}$.

4.3.

а) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

б) $\frac{x^{1/2}+9}{x-81}$;

в) $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{x-\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}}$; г) $\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{\sqrt{x}}}+\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{\sqrt{x}}}-2\cdot\frac{1+(\sqrt{x})^2}{1-(\sqrt{x})^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\right)$.

4.4*.

а) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\right):\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)$;

б) $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left((\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^{-1}+(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^{-1}\right)$;

в) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$;

г) $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x^{\frac{3}{2}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y^{\frac{3}{2}}}+3\,\frac{\sqrt{xy}-y}{x-y}$;

д) $\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy^{\frac{1}{2}}-yx^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\frac{x\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$;

е) $\frac{1}{xy}\cdot\left(\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\sqrt{x^{-1}+\sqrt{y^{-1}}}}\cdot\frac{1}{xy}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$;

ж) $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:\left(\frac{x+y}{\sqrt{xy}}+\frac{y}{x-\sqrt{xy}}-\frac{x}{\sqrt{xy}+y}\right)$.

4.5*.

а) $\left(\frac{\sqrt[4]{xy}-\sqrt{xy}}{1-\sqrt{xy}}+\frac{1-\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right):\frac{\sqrt[4]{xy}}{1+\sqrt[4]{x^3y^3}}-\frac{1-\sqrt[4]{xy}-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}$;

б) $\frac{8-x}{\sqrt[3]{x}+2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}$;

в) $\left(\frac{\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(x+1)^3}}+\frac{\sqrt[4]{x+1}\cdot\sqrt[4]{(1-x)^{-3}}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-x}{x+1}}$;

г) $\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}-\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)^{-1}+\sqrt[6]{x}$;

д) $\left(\frac{x-2y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4y^2}}+\frac{\sqrt[3]{2x^2y}+\sqrt[3]{4xy^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{4y^2}+\sqrt[3]{16xy}}\right):\frac{x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{2y}+y\sqrt[3]{x}+x\sqrt[3]{2y}}{x+y}$;

е) $\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+1}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+1}-\frac{2x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}\right)^{-1}-\frac{1}{4}x^{\frac{4}{3}}$;

ж) $\sqrt{\frac{\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})+2\sqrt[4]{xy}}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2}-\left(\sqrt[4]{\frac{y}{x}}+1\right)^{-1}+1}\cdot\sqrt[8]{xy}$;

з) $\left(\frac{4y^2+2xy}{\sqrt{4x^2y^2-8xy^3}}-\frac{8y\sqrt{y}}{\sqrt{4x^2y-8xy^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2xy}-x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2x}{y}}$;

и) $\frac{\sqrt[6]{y^5}-\sqrt[6]{x^2y^3}+\sqrt[6]{x^3y^2}-\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{xy^9}+\sqrt[6]{x^{10}}}{x-\sqrt{xy}+y}\right)^{-1}+1.$

Задание 5. Доказать равенства:

5.1*.

а) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}=1$;

б) $\sqrt{19-8\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2$;

в) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=1$;

г) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2.$

5.2*.

а) $\frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$;

б) $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot(5+2\sqrt{6})\cdot(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1$;

в) $\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2=8$;

г) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$

Задание 6*. Найти значение выражения:

6.1.

а) $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}$ при $4\le x\le 8$;

б) $\sqrt{x-14\sqrt{x-49}}+\sqrt{x+14\sqrt{x-49}}$ при $49\le x\le 98$.

6.2.

а) $2x^2-xy-y^2$ при $x=\sqrt{5}+1$ и $y=\sqrt{5}-1$;

б) $4x^3+2x^2-8x+7$ при $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$;

в) $\frac{x+y-1}{x-y+1}$ при $x=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}$ и $y=\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}$;

г) $\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$ при $x=\frac{2yz}{z^2+1}$.

Задание 7.** Доказать тождества, указав область определения:

7.1.

а) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}{2-x}$

б) $\dfrac{\left(\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)^2-\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2\right)^2-(16x+4y)}{4x-y}+\dfrac{10\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}=1;$

в) $\sqrt{\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)^2-8\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+48}=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2.$

2. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Методы решения иррациональных уравнений

Иррациональным уравнением называют уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень.

При решении иррациональных уравнений часто используются различные преобразования иррациональных выражений:

1) выделение полного квадрата двучлена;

2) разложение на множители;

3) избавление от иррациональности в знаменателе (умножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю);

4) введение одной или двух новых переменных, сведение иррационального уравнения к рациональному и др.

Рассмотрим подробнее основные методы решения иррациональных уравнений.

2.1.1. ***Уединение радикала и возведение в степень***. Смысл таких преобразований – в сведении данного иррационального уравнения к равносильному ему рациональному уравнению.

***Пример* 2.1.** Найти корни уравнения $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

Решение. Область допустимых значений переменной:

$$\begin{cases}15-x\geq 0,\\3-x\geq 0.\end{cases} \tag{2.1}$$

Уединим радикал $\sqrt{15-x}=6-\sqrt{3-x}$, отсюда следует (по определению арифметического корня)

$$6-\sqrt{3-x}\geq 0. \tag{2.2}$$

Возводим в квадрат обе части уравнения, получаем

$$15-x=36-12\sqrt{3-x}+3-x, \text{ то есть}$$

$$12\sqrt{3-x}=24, \text{ то есть}$$

$$\sqrt{3-x}=2.$$

Возводим в квадрат: $3-x=4,\ x=-1$. Найденное значение x удовлетворяет соотношениям (2.1-2.2).

Ответ: {-1}.

Пример 2.2. Найти корни уравнения $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$.

Решение. Область допустимых значений переменной: $x+2\geq 0$. Далее,

$$\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}\ \Rightarrow \begin{cases} x+2\geq 0, \\ 3x+3\geq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Возводим в шестую степень:

$$(x+2)^3=(3x+2)^2, \text{ т.е.}$$

$$x^3+6x^2+12x=9x^2+12x+4, \text{ т.е.}$$

$$x^3-3x^2+4=0, \qquad x^3-3x^2+3+1=0,$$

группируем:

$$(x^3+1)-3(x^2-1)=0,$$

$$(x+1)(x^2-x+1)-3(x-1)(x+1)=0,$$

$$(x+1)(x^2-x+1-3x+3)=0,$$

$$\begin{matrix} x+1=0, \\ x_1=-1. \end{matrix} \qquad \left| \begin{matrix} (x^2-4x+4=0, \\ x_2=x_3=2. \end{matrix} \right.$$

Значение $x_1=-1$ не удовлетворяет соотношению (2.3).

Ответ: {2}.

2.1.2. ***Введение новой переменной (подстановка)***. Сущность метода поясним на примерах.

Пример 2.3. Найти корни уравнения $x^2+3x-18+\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

Решение. Обозначим $x^2+3x-6=t$ (можно $x^2+3x=t$ или $\sqrt{x^2+3x-6}=t\geq 0$). Тогда получаем $t-12+4\sqrt{t}=0$,

$$4\sqrt{t}=12-t \quad \Rightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ 12-t\geq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Возводим в квадрат:

$$16t=144-24t+t^2,$$

$$t^2-40t+144=0,\ \ t_1=36,\ t_2=4.$$

Значение $t_1 = 36$ не удовлетворяет соотношению (2.4). Итак, $x^2 + 3x - 6 = 4$, или $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Ответ: {–5; 2}.

***Пример* 2.4.** Решить уравнение $\sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x + 1 - \sqrt{x+7}} = 4$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+7} = t \geq 0$, отсюда $x + 7 \geq 0$, $x = t^2 - 7$, получаем

$$\sqrt{t^2 - 7 + 8 + 2t} + \sqrt{t^2 - 7 + 1 - t} = 4, \text{ то есть}$$

$$\sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 - t - 6} = 4,$$

$$|t + 1| + \sqrt{t^2 - t - 6} = 4;$$

но $t + 1 > 0$ (так как $t \geq 0$), поэтому $\sqrt{t^2 - t - 6} = 4 - t - 1$, или

$$\sqrt{t^2 - t - 6} = 3 - t \;\Rightarrow \begin{cases} t^2 - t - 6 \geq 0 \\ 3 - t \geq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Возводим в квадрат: $t^2 - t - 6 = 9 - 6t + t^2$, то есть $5t = 15$, или $t = 3$. Найденное значение удовлетворяет неравенствам (2.5).

Значит, $\sqrt{x+7} = 3, x + 7 = 9, x = 2$.

Ответ: {2}.

2.1.3. *Разложение на множители*. Метод разложения на множители используется для решения иррациональных уравнений, в левой части которых находится произведение нескольких выражений с переменной, а в правой – нуль. Для решения таких уравнений следует воспользоваться правилом расщепления: произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из входящих в него сомножителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

***Пример* 2.5.** Найти корни уравнения $(x - 2)(x^2 - x - 12)\sqrt{x - 1} = 0$.

Решение. Это иррациональное уравнение по методу разложения на множители на области допустимых значений переменной *x* для этого уравнения заменяется совокупностью трех уравнений: $\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ x^2 - x - 12 = 0, \\ \sqrt{x - 1} = 0. \end{array}\right.$

Решая каждое уравнение, получим: $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 4, x_4 = 1$. Учитывая ОДЗ ($x - 1 \geq 0, x \geq 1$), $x_2 = -3$ не является корнем уравнения.

Ответ: {1; 2; 4}.

2.1.4. ***Графический метод***. Обычно графическим методом решаются иррациональные уравнения, для которых выполняются два следующих условия:

- не видно другого, более простого метода решения;
- функции, отвечающие частям уравнения, довольно просты в плане построения графиков.

Графический метод решения уравнений предполагает использование графиков функций, отвечающих частям уравнения, для нахождения решения уравнения. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков функций.

Без использования специализированных компьютерных программ сложно достичь высокой точности построения графиков функций. Поэтому все результаты, полученные с использованием графиков, мы можем считать лишь приближенными, нуждающимися в проверке и обосновании (кроме, разве что, самых очевидных). Это главная особенность графического метода.

Согласно графическому методу решения уравнений, нужно:

1. Построить в одной прямоугольной системе координат графики функций, отвечающие левой и правой частям уравнения.

2. По чертежу определить все точки пересечения графиков:

    - если точек пересечения нет, то решаемое уравнение не имеет корней,
    - если точки пересечения имеются, то переходим к следующему шагу алгоритма.

3. По чертежу определить абсциссы всех точек пересечения графиков – это приближенные значения всех корней исходного уравнения.

4. Если есть основания полагать, что некоторые или все определенные на предыдущем шаге значения являются точными значениями корней решаемого уравнения, то осуществить их проверку, например, подстановкой.

***Пример* 2.6**. Решите уравнение $2\sqrt{x+4}-1=\sqrt[3]{2x}$.

Рассмотрим две функции $y=2\sqrt{x+4}-1$ и $y=\sqrt[3]{2x}$, отвечающие, соответственно, левой и правой части решаемого иррационального уравнения. Построение графиков этих функций можно провести через геометрические преобразования графиков основных элементарных функций $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt[3]{x}$. Если понятна конфигурация графиков, то можно осуществить построение по точкам. Для этого удобно составить две таблицы значений аргументов и соответствующих значений функции. При этом необходимо учитывать области определения функций ($x \geq -4$ для функции $y=2\sqrt{x+4}-1$, x – любое для функции $y=\sqrt[3]{2x}$) и целесообразно брать такие значения аргумента, для которых значения функций вычисляются без проблем:

x_i	–4	–3	0	5
$y_i=2\sqrt{x_i+4}-1$	–1	1	3	5

x_i	–4	–0,5	0	0,5	4
$y_i=\sqrt[3]{2x_i}$	–2	–1	0	1	2

Теперь в прямоугольной системе координат отмечаем точки и соединяем их плавными линиями. В результате получаем чертеж (рис. 2.1).

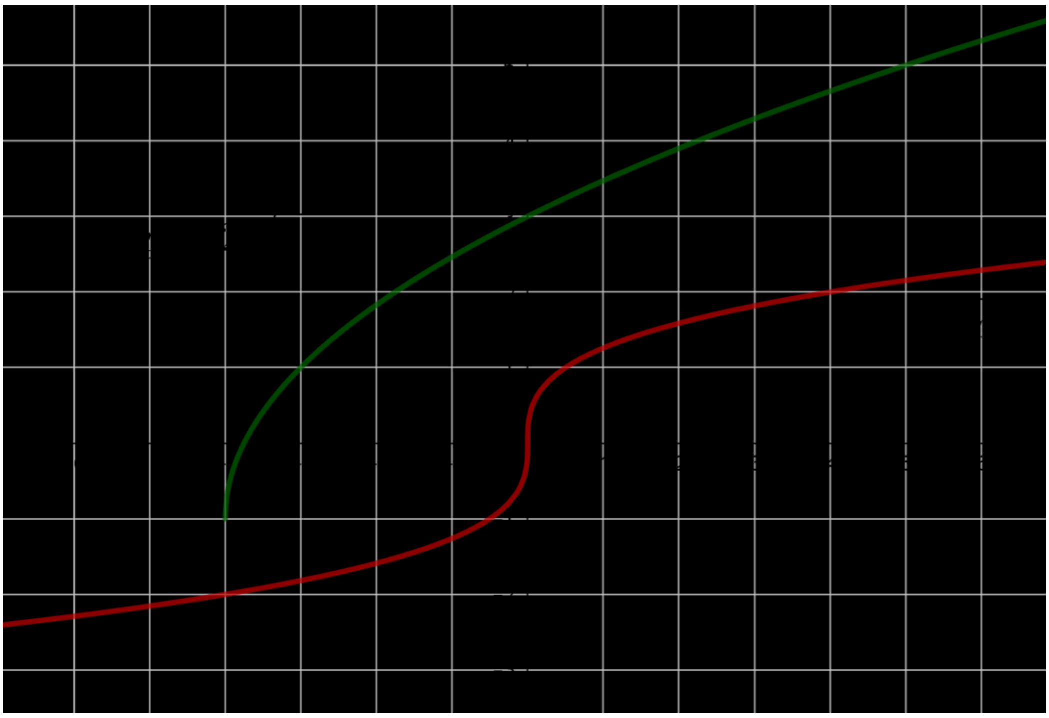

Рис. 2.1. Решение уравнения $2\sqrt{x+4}-1=\sqrt[3]{2x}$

Очевидно, графики функций не пересекаются. За пределами видимой области пересечений тоже нет (на плюс бесконечности функция $y=2\sqrt{x+4}-1$ растет быстрее функции $y=\sqrt[3]{2x}$). Следовательно, иррациональное уравнение $2\sqrt{x+4}-1=\sqrt[3]{2x}$ не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

2.1.5. *Исследование ОДЗ*. Метод решения по ОДЗ позволяет решать иррациональные уравнения, ОДЗ для которых есть пустое множество или состоит из нескольких чисел.

***Пример* 2.7.** Решить уравнение

$$3\sqrt{3x+1}-4\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x-1}=-(2+\sqrt{1-x}).$$

Решение. Найдем ОДЗ: $x=1$. Проверкой убеждаемся, что $x=1$ – корень уравнения.

Ответ: $\{1\}$.

2.1.6. *Метод домножения на сопряженное выражение*. Пусть S – некоторое выражение, содержащее радикалы (корни). **Сопряжённым множителем для *S*** называется всякое выражение K, не равное тождественно нулю, такое, что произведение SK не содержит корней. Домножая обе части уравнения на сопряженный множитель и выполняя преобразования, получим более простое уравнение.

***Пример* 2.8.** Решить уравнение $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$.

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}$: получим $x+3-x-8=5(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8})$.

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}=-1$. Учитывая исходное уравнение, получаем $2\sqrt{x+3}=4, x=1$.

Проверкой убеждаемся, что $x=1$ – корень уравнения.

Ответ: $\{1\}$.

2.1.7. *Выделение полного квадрата*. Название метода говорит само за себя. Если подкоренное выражение представляет собой полный квадрат, то можно в двойном радикале освободиться от внешнего радикала, используя свойство: $\sqrt{(f(x))^2}=|f(x)|$.

***Пример* 2.9.** Решить уравнение

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2.$$

Решение. Заметим, что $x+2+2\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2$,

$x+2-2\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$. Следовательно, имеем уравнение

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}=2,$$

$$\sqrt{x+1}+1+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2.$$

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases}\sqrt{x+1}-1\geq 0,\\ 2\sqrt{x+1}=2.\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{x+1}-1<0,\\ \sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x+1}=2.\end{cases}$

Решением первой системы будет $x=0$, решением второй системы – все числа, удовлетворяющие неравенству $-1\leq x<0$.

Ответ: $[-1;0]$.

2.1.8. *Использование свойств функций*. Решение уравнений и неравенств с использованием свойств монотонности основывается на следующих утверждениях.

1. Пусть $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке Q, тогда уравнение $f(x) = c$, где c – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке Q.
2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на промежутке Q функции, $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает на этом промежутке, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке Q.

***Пример* 2.10.** Решить уравнение

$$\sqrt[4]{18 - x} - \sqrt[4]{x - 2} = 2.$$

Решение. Найдем ОДЗ переменной x.

$$\begin{cases} 18 - x \geq 0, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 18, \\ x \geq 2. \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2 \leq x \leq 18.$$

На ОДЗ функции $f(x) = -\sqrt[4]{x - 2}$ и $g(x) = \sqrt[4]{18 - x}$ непрерывны и строго убывают, тогда непрерывна и убывает функция $h(x) = \sqrt[4]{18 - x} - \sqrt[4]{x - 2}$. Поэтому каждое свое значение функция $h(x)$ принимает только в одной точке. Так как $h(2) = 2$, то 2 является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $\{2\}$.

При решении уравнений можно использовать ограниченность функций.

Если при решении уравнения $f(x) = g(x)$ удается показать, что для всех x из некоторого множества M справедливы неравенства $f(x) \leq A$ и $g(x) \geq A$, то на множестве M уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

***Пример* 2.11.** Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{2x^2 - 8x + 17} = 4.$$

Решение. Оценим подкоренные выражения.

$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1.$

$2x^2 - 8x + 17 = 2(x^2 - 4x + 4) + 9 = 2(x-2)^2 + 9 \geq 9.$

Следовательно, $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 1, \sqrt{2x^2 - 8x + 17} \geq 3.$

Так как первое слагаемое левой части исходного уравнения ограничено снизу единицей, а второе слагаемое – 3, то их сумма ограничена снизу 4. Тогда левая часть уравнения становится равной правой части уравнения при $x = 2$.

Ответ: $\{2\}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=p2dn9orin21

2.2. Основные виды иррациональных уравнений и стандартные схемы их решения

Можно выделить следующие основные виды иррациональных уравнений и методы их решения:

1. Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = a, \sqrt[2n+1]{f(x)} = a$.

***Пример* 2.12.** Решить уравнение $\sqrt{x-2} = 2$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в квадрат. Получим: $x - 2 = 4; x = 6$.

Ответ: $\{6\}$.

***Пример* 2.13.** Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 4x - 3} = -3$.

Решение. В левой части исходного уравнения стоит арифметический квадратный корень – он по определению неотрицателен, а в правой части – отрицательное число. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: $\emptyset$.

Запишем равносильность, с помощью которой решаются уравнения данного вида.

$\sqrt[2n]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^{2n}$, если $a \geq 0$, и не имеет решения, если $a < 0$.

***Пример* 2.14.** Решить уравнение $\sqrt[3]{x-3} = -2$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в куб. Получим: $x - 3 = -8; x = -5$.

Ответ: {-5}.

Запишем равносильность, с помощью которой решаются уравнения данного вида: $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^{2n+1}$.

2. Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$.

Учащиеся при решении уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ часто ограничиваются лишь одним этапом – решением уравнения, получающегося из исходного возведением в квадрат обеих его частей, при этом часто получают неверное решение. Так как в левой части стоит арифметический квадратный корень, а он по определению неотрицателен, то и правая часть уравнения также должна быть неотрицательна. Тогда в решении должен присутствовать еще один этап – проверка или отбор тех корней, которые удовлетворяют условию $g(x) \geq 0$.

***Пример* 2.15.** Решить уравнение $\sqrt{5x-9} = 3 - x$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в квадрат. Получим: $5x - 9 = 9 - 6x + x^2; x^2 - 11x + 18 = 0$. Тогда $x_1 = 2, x_2 = 9$.

Проверка показывает, что 2 является решением исходного уравнения, а 9 – нет. Следовательно, данное уравнение имеет один корень: 2.

Ответ: {2}.

Запишем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного вида: $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = \left(g(x)\right)^{2n}$ с последующей обязательной проверкой корней.

Замечание. В данном уравнении проверка оказалась очень простой. Однако могут встретиться уравнения, корни которых иррациональны, и проверка вызовет технические трудности. В таких случаях можно поступить иначе.

***Пример* 2.16.** Решить уравнение $\sqrt{3x-2}=5-x$.

Решение. Легко видеть, что корнями этого уравнения могут быть только числа, при которых $3x-2\geq 0$ и $5-x\geq 0$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases}3x-2\geq 0,\\ 5-x\geq 0,\\ 3x-2=(5-x)^2.\end{cases}$

Но эту систему можно упростить. В ней неравенство $3x-2\geq 0$ лишнее, так как оно следует из уравнения $3x-2=(5-x)^2$. Учитывая это, систему перепишем в виде $\begin{cases}5-x\geq 0,\\ 3x-2=(5-x)^2;\end{cases}$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{13-\sqrt{61}}{2},\\ x=\dfrac{13+\sqrt{61}}{2};\end{array}\right.\\ x\leq 5.\end{cases}\qquad\qquad \left|\begin{array}{l}3x-2=(5-x)^2,\\ x^2-13x+27=0.\\ D=61.\\ x_1=\dfrac{13-\sqrt{61}}{2}, x_2=\dfrac{13+\sqrt{61}}{2}.\end{array}\right.$$

Оценка корней показывает, что $2{,}5<\frac{13-\sqrt{61}}{2}<3{,}5$, а $9{,}5<\frac{13+\sqrt{61}}{2}<10{,}5$. Поэтому первый корень удовлетворяет системе (неравенству $x\leq 5$), а второй – нет.

Ответ: $\left\{\frac{13-\sqrt{61}}{2}\right\}$.

Запишем равносильность, с помощью которой решаются уравнения данного вида: $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x),\\ g(x)\geq 0.\end{cases}$

***Пример* 2.17.** Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

Решение. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4\Leftrightarrow\begin{cases}6-4x-x^2=(x+4)^2,\\ x+4\geq 0;\end{cases}$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=-1;\end{array}\right.\\ x\geq -4.\end{cases}\qquad\qquad \left|\begin{array}{l}6-4x-x^2=(x+4)^2,\\ x^2+6x+5=0.\\ x_1=-5,\qquad x_2=-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1\}$.

***Пример* 2.18**. Решить уравнение $\frac{1}{2}-x^2=\sqrt{\frac{1}{2}-x}$.

Решение. $\frac{1}{2}-x^2=\sqrt{\frac{1}{2}-x} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^2=\frac{1}{2}-x,\\ \frac{1}{2}-x^2\geq 0.\end{cases}$

Решим уравнение системы:

$\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^2=\frac{1}{2}-x; \frac{1}{4}-x^2+x^4-\frac{1}{2}+x=0; x^4-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=0;$
$x^4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0;$

$$\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x+\frac{1}{2}=0,\\ x^2+x-\frac{1}{2}=0.\end{array}\right.$$

Решим уравнения совокупности.

$x^2-x+\frac{1}{2}=0. D<0$, данное уравнение корней не имеет.

$x^2+x-\frac{1}{2}=0. D=3$. Тогда $x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Вернемся к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\\ x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\\ x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\end{array}\right.\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

Следовательно, $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

***Пример* 2.19.** Решить уравнение $x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в куб и получим:

$(x-1)^3 = x^2 - x - 1; x^3 - 4x^2 + 4x = 0; x(x-2)^2 = 0$. Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Ответ: $\{0; 2\}$.

Запишем равносильность, с помощью которой решаются уравнения данного вида: $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \big(g(x)\big)^{2n+1}$.

3. Уравнения вида $f(x) \cdot \sqrt[2n]{g(x)} = 0$.

Довольно часто при решении уравнений данного вида учащиеся используют следующую формулировку свойства произведения: «Произведение двух сомножителей равно нулю, когда хотя бы один из них равен нулю». Заметим, что формулировка свойства произведения должна выглядеть следующим образом: «Произведение двух сомножителей равно нулю, когда хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом имеет смысл».

***Пример* 2.20.** Решить уравнение $(x^2 - 5x - 6)\sqrt{\frac{x+2}{x-5}} = 0$.

Решение. $(x^2 - 5x - 6)\sqrt{\frac{x+2}{x-5}} = 0 \;\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-5x-6=0, \\ \frac{x+2}{x-5}=0; \end{array}\right. \\ \frac{x+2}{x-5} \geq 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-1, \\ x=6; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\leq-2, \\ x>5. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ: $\{-2; 6\}$.

***Пример* 2.21.** Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 9} = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2}\right)\sqrt{1 + \frac{6}{x-3}}$.

Решение. В данном случае уравнение не имеет вида, указанного в заголовке. Следовательно, его необходимо преобразовать. Но сначала найдем ОДЗ переменной *x*.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, \\ 1 + \frac{6}{x-3} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) \geq 0 \\ \frac{x+3}{x-3} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\geq3, \\ x\leq-3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x\leq-3, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x\leq-3. \end{array}\right.$

Преобразуем уравнение к виду $f(x) \cdot \sqrt[2n]{g(x)} = 0$.

$$\sqrt{x^2 - 9} - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2}\right)\sqrt{1 + \frac{6}{x-3}} = 0;$$

$$\sqrt{(x-3)(x+3)}-\left(\frac{2x^2+3x}{6}\right)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}=0.$$

При решении уравнения учащиеся часто необоснованно делят обе части уравнения на выражение, содержащее неизвестное (в данном случае на $\sqrt{x+3}$), что приводит к потере корня и приобретению «постороннего». Подобные уравнения, содержащие в обеих частях общий множитель, следует решать переносом всех членов в одну часть и разложением полученного выражения на множители.

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\left(\sqrt{(x-3)^2}-\frac{2x^2+3x}{6}\right)=0;$$

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\left(|x-3|-\frac{2x^2+3x}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{x+3}{x-3}=0,\\ |x-3|-\frac{2x^2+3x}{6}=0;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x\le -3.\end{array}\right.\end{cases}$$

Решим каждое из уравнений совокупности. $\frac{x+3}{x-3}=0; x=-3.$

$$|x-3|-\frac{2x^2+3}{6}=0;\ \ 6|x-3|=2x^2+3x. \qquad (2.6)$$

Учитывая, что ОДЗ $\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x\le -3,\end{array}\right.$ получаем, что уравнение (2.6) равносильно

совокупности $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -3,\\ -6(x-3)-2x^2-3x=0;\end{cases}\\ x>3,\\ 6(x-3)-2x^2-3x=0.\end{array}\right.$

$2x^2+9x-18=0.$ Тогда $x_1=-6, x_2=\frac{3}{2}$ не удовлетворяют условию $x\le -3$. $2x^2-3x+18=0, D<0$, данное уравнение не имеет корней.

Следовательно, совокупность примет следующий вид: $\begin{cases}x\le -3,\\ x=-6.\end{cases}$

Вернемся к системе: $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=-6,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x\le -3.\end{array}\right.\end{cases}$

Ответ: {–3; 6}.

Запишем равносильность, с помощью которой решаются уравнения данного вида: $f(x)\cdot\sqrt[2n]{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} f(x)=0,\\ g(x)=0;\end{array}\right.\\ g(x)\geq 0.\end{cases}$

4. Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}, \sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{g(x)}$.

***Пример* 2.22.** Решить уравнение $\sqrt{3x^2-4x-2}=\sqrt{2x^2-2x+1}$.

Решение. Возведем в квадрат обе части исходного уравнения, получим: $3x^2-4x-2=2x^2-2x+1; x^2-2x-3=0$. Тогда $x_1=-1, x_2=3$.

Проверка показывает, что оба этих числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: {–1; 3}.

Запишем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного вида: $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ с последующей обязательной проверкой.

***Пример* 2.23** Решить уравнение $\sqrt{x^2-x+4}=\sqrt{x^2+2}$.

Решение. $\sqrt{x^2-x+4}=\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+4=x^2+2,\\ x^2+2\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=2,\\ x^2\geq -2.\end{cases}$

Ответ: {2}.

Запишем равносильность, с помощью которой решаются уравнения данного вида.

$$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)\geq 0;\end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x)=g(x),\\ g(x)\geq 0.\end{cases}$$

***Пример* 2.24.** Решить уравнение $\sqrt[3]{9x+18}=\sqrt[3]{4-x^2}$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в куб, тогда получим: $9x+18=4-x^2; x^2+9x+14=0$. Тогда $x_1=-7, x_2=-2$.

Ответ: {–7; –2}.

Запишем равносильность, с помощью которой решаются уравнения данного вида: $\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

5. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$, $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \pm \sqrt{t(x)}$

Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a. \qquad (2.7)$$

Пусть x_0 – корень уравнения (2.7). Тогда справедливо числовое равенство $\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)} = a$. Найдем разность чисел $f(x_0)$ и $g(x_0)$, обозначив ее $h(x_0)$, и запишем данное равенство в виде

$$(\sqrt{f(x_0)} - \sqrt{g(x_0)})(\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}) = h(x_0). \qquad (2.8)$$

Используя, что $\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)} = a$, запишем равенство (2.8) в виде $\sqrt{f(x_0)} - \sqrt{g(x_0)} = \frac{h(x_0)}{a}$. Данное равенство означает, что число x_0 есть корень уравнения

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \frac{f(x) - g(x)}{a}. \qquad (2.9)$$

Таким образом, уравнение (2.9) является следствием уравнения (2.7). Складывая эти два уравнения и умножая полученное уравнение на a, запишем уравнение

$$2\sqrt{f(x)} \cdot a = f(x) - g(x) + a^2\,, \qquad (2.10)$$

также являющееся следствием уравнения (2.7). Возведя уравнение (2.10) в квадрат и решив полученное уравнение, надо выполнить проверку найденных корней, то есть проверить, будут ли его корни корнями уравнения (2.7).

Замечание. Отметим, что точно так же доказывается, что уравнение (2.10) есть следствие уравнения $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a$.

***Пример* 2.25.** Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3. \qquad (2.11)$$

Решение. Разность выражений $3x^2 - 5x + 7$ и $3x^2 - 7x + 2$ есть $2x + 5$. Так как $\left(\sqrt{3x^2-5x+7}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2-7x+2}\right)^2 = \left(\sqrt{3x^2-5x+7} - \right.$ $\left. - \sqrt{3x^2-7x+2}\right)\left(\sqrt{3x^2-5x+7} + \sqrt{3x^2-7x+2}\right)$, то уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+7} + \sqrt{3x^2-7x+2} = \frac{2x+14}{3} \qquad (2.12)$$

является следствием исходного уравнения. Тогда складывая уравнения (2.11) и (2.12), получим уравнение

$$2\sqrt{3x^2-5x+7} = \frac{2x+14}{3}, \qquad (2.13)$$

также являющееся следствием исходного уравнения (2.11). Возведем обе части уравнения (2.12) в квадрат, получим уравнение

$$3x^2 - 5x + 7 = \frac{x^2+14x+49}{9}, \qquad (2.14)$$

также являющееся следствием исходного уравнения. Решая уравнение (2.14), получаем, что $x_1 = \frac{7}{26}$, $x_2 = 2$. Проверкой убеждаемся, что оба этих числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: {7/26; 2}.

Замечание. Уравнения вида $\sqrt{f(x)+b} \pm \sqrt{f(x)+c} = a$ можно решать умножением обеих частей уравнения на некоторое выражение, не принимающее значение нуль (на сопряженное левой части уравнения, т.е. на $\sqrt{f(x)+b} \mp \sqrt{f(x)+c}$).

***Пример* 2.26.** Решить уравнение $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$.

Решение. Так как $f(x) = 3x^2 + 5x$, то умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}$, сопряженное левой части уравнения.

$$\left(\sqrt{3x^2+5x+8}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2+5x+1}\right)^2 = \sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}.$$

После приведения подобных слагаемых получаем уравнение

$$7 = \sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}\,, \qquad (2.15)$$

равносильное исходному, так как уравнение $\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}$=0 действительных корней не имеет. Складывая исходное уравнение и (2.15), получаем, что $\sqrt{3x^2+5x+8}=4,\ 3x^2+5x+8=16, 3x^2+5x-8=0.$

Тогда $x_1=-\frac{8}{3},\ x_2=1.$

Ответ: {-8/3; 1}.

Замечание. Также уравнения вида $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=a$ можно решать с помощью ОДЗ уравнения и равносильных переходов от одних уравнений к другим.

***Пример* 2.27.** Решить уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=7.$

Решение. Найдем ОДЗ переменной x.

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq -1. \end{cases}$ Следовательно, $x\geq -1.$

На ОДЗ обе части уравнения положительны, поэтому после возведения в квадрат получим уравнение $x+2+2\sqrt{(x+2)(x+1)}+x+1=49,$ равносильное для $x\geq -1$ уравнению $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=7$; $2\sqrt{(x+2)(x+1)}=$ $=46-2x$; $\sqrt{(x+2)(x+1)}=23-x.$

Иногда решения уравнения можно найти, решая его на разных числовых промежутках.

Для любого $x>23$ имеем $(x+2)(x+1)>0$, а $(23-x)<0$. Значит, среди $x>23$ нет решений уравнения $\sqrt{(x+2)(x+1)}=23-x.$

Для $-1\leq x\leq 23$ имеем $(23-x)\ \geq\ 0$. Следовательно, $\sqrt{(x+2)(x+1)}=$ $=23-x\Leftrightarrow\ (x+2)(x+1)\ =\ (23-x)^2$ для $-1\leq x\leq 23.$

$(x+2)(x+1)=\ (23-x)^2;\qquad x^2\ +\ x\ +2x\ +\ 2\ =\ 529-46x\ +\ x^2;$ $3x\ +\ 46x\ =\ 527.$ Тогда $x\ =\ 527/49.$

Так как $-1\leq 527/49\leq 23$, то $527/49$ является корнем уравнения $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=7$, равносильного уравнению $(x+2)(x+1)\ =\ (23-x)^2$ для этих x.

Ответ: {527/49}.

6. Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = a$, $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = h(x)$, $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{t(x)} \pm \sqrt[3]{h(x)}$, $\sqrt[3]{f^2(x)} - \sqrt[3]{f(x)g(x)} + \sqrt[3]{g^2(x)} = a$.

Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = a$ можно решать следующим методом.

Пусть x_0 – корень уравнения. Тогда справедливо числовое равенство:

$$\sqrt[3]{f(x_0)} + \sqrt[3]{g(x_0)} = a. \tag{2.16}$$

После возведения равенства (2.16) в куб получим равенство

$$f(x_0) + 3\sqrt[3]{f(x_0)}\sqrt[3]{g(x_0)}\left(\sqrt[3]{f(x_0)} + \sqrt[3]{g(x_0)}\right) + g(x_0) = a^3.$$

Откуда в силу (2.16) имеем равенство

$$3\sqrt[3]{f(x_0)}\sqrt[3]{g(x_0)} \cdot a = a^3 - f(x_0) - g(x_0). \tag{2.17}$$

Равенство (2.17) означает, что число x_0 есть корень уравнения

$$3\sqrt[3]{f(x)}\sqrt[3]{g(x)} \cdot a = a^3 - f(x) - g(x). \tag{2.18}$$

Таким образом, уравнение (2.18) есть следствие уравнения

$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = a$.

Возведем уравнение (2.18) в куб и решим его, а также выполним проверку, так как получили не равносильное уравнение, а уравнение-следствие.

***Пример* 2.28.** Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в куб.

$2x - 1 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}\right) + x - 1 = 1$.

Так как $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$, то, подставляя вместо этого выражения единицу, получим уравнение $3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1$, являющееся следствием исходного.

$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 - x$. Возведем обе части полученного уравнения в куб и решим его $(2x-1)(x-1) = (1-x)^3$; $(2x-1)(x-1) + (x-1)^3 = 0$; $(x-1)(2x-1+(x-1)^2) = 0$; $x^2(x-1) = 0$. Тогда $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Проверка показывает, что 1 – корень исходного уравнения, а 0 – не является корнем.

Ответ: $\{1\}$.

***Пример* 2.29.** Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в куб.

$x-1+x-2+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=2x-3;$

$3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=0.$

Учитывая равенство $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$, подставим вместо выражения $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}$ выражение $\sqrt[3]{2x-3}$, получим уравнение $3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3}$=0, являющееся следствием исходного.

Данное уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x-2=0, \\ 2x-3=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3/2. \end{array}\right.$

Проверка показывает, что все числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\{1;1\frac{1}{2};2\}$.

Замечание. Уравнения вида $\sqrt[3]{f^2(x)}-\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}=a$ можно решать следующим образом. Умножая обе части уравнения на выражение $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}$, перейдем к уравнению $f(x)+g(x)=(\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)})a$, являющемуся следствием исходного уравнения. Далее уравнение-следствие можно решать так, как это предлагалось выше. Только надо помнить, что необходимо выполнить проверку полученных корней.

***Пример* 2.30.** Решить уравнение $\sqrt[3]{(x+8)^2}-\sqrt[3]{(x+8)(8-x)}+$ $+\sqrt[3]{(x-8)^2}=4$.

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{8-x}$. Получаем уравнение $16=4\left(\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{8-x}\right)$, являющееся следствием исходного. $4=\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{8-x}$. Возведем обе части данного уравнения в куб.

$x+8+8-x+3\sqrt[3]{x+8}\sqrt[3]{8-x}\left(\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{8-x}\right)=64.$

Так как $4=\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{8-x}$, получим уравнение $64-16=3\sqrt[3]{x+8}\cdot\sqrt[3]{8-x}\cdot 4$, $4=\sqrt[3]{64-x^2}$; $64-x^2=4^3$. Тогда $x=0$.

Проверка показывает, что 0 является корнем данного уравнения.

Ответ: $\{0\}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pfd4f7zdk21

2.3. Примеры решения иррациональных уравнений

***Пример* 2.31.** Решить уравнение $\sqrt{9x^2-6x+1}=1-3x$.

Решение. Решим данное уравнение, выделяя полный квадрат и используя свойства модуля.

$\sqrt{9x^2-6x+1}=1-3x$; $\sqrt{(3x-1)^2}=1-3x$; $|3x-1|=1-3x$;

$$|3x-1|=-(3x-1) \Leftrightarrow x\leq\frac{1}{3}.$$

Ответ: $(-\infty;\frac{1}{3}]$.

***Пример* 2.32.** Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x. \qquad (2.19)$$

Решение. Умножим обе части заданного уравнения на выражение $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$, сопряженное выражению $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}$.

Так как $\left(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)=$ $=(2x^2+3x+5)-(2x^2-3x+5)=6x$, то уравнение (2.19) примет вид

$$6x=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})$$

или $x\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}-2\right)=0$.

Как легко видеть, $x_1=0$ является корнем этого уравнения. Остается решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2. \qquad (2.20)$$

Сложив уравнения (2.19) и (2.20), придем к уравнению

$$2\sqrt{2x^2+3x+5} = 3x+2. \qquad (2.21)$$

Решая уравнение (2.21) методом возведения в квадрат, получим:

$$8x^2 + 12x + 20 = 9x^2 + 12x + 4,$$

и далее $x^2 = 16, x_2 = 4, x_3 = -4$.

Затем делаем проверку и убеждаемся, что $x = 4$ – единственный корень уравнения (2.19).

Ответ: $\{4\}$.

Замечание. При решении различных видов иррациональных уравнений часто используется метод введения новой переменной. Новая переменная в уравнениях иногда действительно очевидна, но иногда ее трудно увидеть, а можно выявить лишь в процессе каких-либо преобразований. Бывает полезно ввести не одну, а две переменные. Рассмотрим примеры типичных случаев введения новых переменных в иррациональных уравнениях.

***Пример* 2.33.** Решить уравнение $\sqrt{9-x} = \frac{3}{\sqrt{9-x}} + 2$.

Решение. Введем новую переменную. Пусть $\sqrt{9-x} = b, b \geq 0$. Получаем, что $b = \frac{3}{b} + 2; b^2 - 2b - 3 = 0$. Тогда $b_1 = -1$ не удовлетворяет условию $b \geq 0, b_2 = 3$.

Выполним обратную замену: $\sqrt{9-x} = 3 \Leftrightarrow 9 - x = 3^2; x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

***Пример* 2.34.** Решить уравнение $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1{,}5(x+4)$.

Решение. Уединение радикала и возведение в степень обеих частей уравнения привело бы к громоздкому уравнению. В то же время, если проявить некоторую наблюдательность, то можно заметить, что данное уравнение сводится к квадратному. Действительно, умножив обе части заданного уравнения на 2, получим, что

$$2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 12;$$

$$2x^2 - 3x - 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 0;$$

$2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 2 - 6 = 0;$

$(2x^2 - 3x + 2) - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 8 = 0.$

Введем новую переменную. Пусть $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = y, y \geq 0$. Получаем, что $y^2 - 2y - 8 = 0$. Тогда $y_1 = -2$ не удовлетворяет условию $y \geq 0, y_2 = 4$.

Выполним обратную замену. $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 16; 2x^2 - 3x - 14 = 0$. Тогда $x_1 = -2, x_2 = 3{,}5$.

Так как исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4$, то проверка полученных корней не нужна.

Ответ: {–2; 3,5}.

***Пример* 2.35.** Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x - 2} = 2$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение.

$\sqrt{2 \cdot (x^2 - 2x) + 3} - \sqrt{x^2 - 2x - 2} = 2.$

Введем новую переменную. Пусть $x^2 - 2x = t$. Тогда уравнение примет вид $\sqrt{2t + 3} - \sqrt{t - 2} = 2$. Найдем ОДЗ переменной t.

ОДЗ: $\begin{cases} 2t + 3 \geq 0, \\ t - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1{,}5. \\ t \geq 2. \end{cases}$ Следовательно, $t \geq 2$.

На ОДЗ обе части уравнения положительны, поэтому после возведения в квадрат обеих частей уравнения получим уравнение

$$\left(\sqrt{2t + 3} - \sqrt{t - 2}\right)^2 = 2^2,$$

равносильное для $t \geq 2$ уравнению $\sqrt{2t + 3} - \sqrt{t - 2} = 2$.

$2t + 3 + t - 2 - 2\sqrt{(2t + 3)(t - 2)} = 4; 3t - 3 = 2\sqrt{2t^2 - 4t + 3t - 6}$ – получили уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$, и оно равносильно смешанной системе: $\begin{cases} t \geq 1, \\ (3t - 3)^2 = 4(2t^2 - t - 6). \end{cases}$

Решим уравнение системы.

$9t^2 - 18t + 9 = 8t^2 - 4t - 24; t^2 - 14t + 33 = 0$. Тогда $t_1 = 3, t_2 = 11$.

Выполним обратную замену. $x^2 - 2x = 3$ или $x^2 - 2x = 11$.

$x^2 - 2x - 3 = 0$. Тогда $x_1 = -1, x_2 = 3$.

$x^2 - 2x - 11 = 0$. Тогда $x_1 = 1 - 2\sqrt{3}, x_2 = 1 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\{1 - 2\sqrt{3};\ -1;\ 3;\ 1 + 2\sqrt{3}\}$.

Замечание. В случае, если $f(x) \pm g(x) = b$, уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = a$ можно решать с помощью введения новых переменных. Пусть $\sqrt[3]{f(x)} = u$, $\sqrt[3]{g(x)} = v$. Тогда переходим к системе уравнений: $\begin{cases} u \pm v = a, \\ u^3 \pm v^3 = b. \end{cases}$

Решив данную систему относительно неизвестных *u* и *v*, выполнив обратную замену, находим корни исходного уравнения.

***Пример* 2.36.** Решить уравнение $\sqrt[3]{\frac{4+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{4-6x}{x}} = 1$.

Решение. Так как $\frac{4+x}{x} - \frac{4-6x}{x} = 7$, то введем новые переменные.

Пусть $\sqrt[3]{\frac{4+x}{x}} = u$, $\sqrt[3]{\frac{4-6x}{x}} = v$. Тогда переходим к системе уравнений: $\begin{cases} u - v = 1, \\ u^3 - v^3 = 7. \end{cases}$

Преобразуем второе уравнение системы:

$u^3 - v^3 = 7;\ (u - v)(u^2 + uv + v^2) = 7;\ (u - v)(u^2 - 2uv + v^2 + 3uv) = 7;$ $(u - v)((u - v)^2 + 3uv) = 7$.

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ (u - v)((u - v)^2 + 3uv) = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1, \\ 1 + 3uv = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1, \\ uv = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ v^2 + v - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} v = -2, \\ v = 1; \end{array} \right. \\ u = v + 1. \end{cases}$$

Выполним обратную замену $\sqrt[3]{\frac{4+x}{x}} = -1$ или $\sqrt[3]{\frac{4+x}{x}} = 2$.

$\sqrt[3]{\frac{4+x}{x}} = -1 \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} = -1$. Тогда $x = -2$.

$\sqrt[3]{\frac{4+x}{x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} = 8$. Тогда $x = \frac{4}{7}$.

Ответ: $\{-2; \frac{4}{7}\}$.

***Пример* 2.37.** Решить уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \sqrt{2x+5} - 2.$$

Решение. Функции $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и $y = \sqrt{2x+5} - 2,$ отвечающие, соответственно, левой и правой части исходного уравнения, довольно простые, и нам не составит большого труда построить их графики. Построить графики функций нам помогут следующие соображения: графики интересующих нас функций можно получить из графиков основных элементарных функций $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \sqrt{x}$ при помощи преобразований параллельного переноса и растяжения-сжатия вдоль координатных осей. Но, когда позволяет воображение, геометрические преобразования удобно проводить мысленно с целью получения представления о конфигурации графиков, а построение осуществлять по точкам. Для удобства составим две таблицы значений функций $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и $y = \sqrt{2x+5} - 2$. Конечно же, будем учитывать области определения этих функций ($x \neq 1$ для $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и $x \geq -5/2$ для $y = \sqrt{2x+5} - 2$) и брать такие значения независимой переменной, для которых легко вычисляются точные значения функций:

x_i	-3	-2	-1	0	1/2	3/2	2	3	4	5
$y_i = \frac{1}{(x_i-1)^2}$	1/16	1/9	1/4	1	4	4	1	1/4	1/9	1/16

x_i	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	2
$y_i = \sqrt{2x_i+5} - 2$	-2	-1	0	1

Отмечаем точки в прямоугольной системе координат и соединяем их плавными линиями, стараясь получить изображения, соответствующие полученному выше представлению об их конфигурации. В результате получаем чертеж (рис. 2.2).

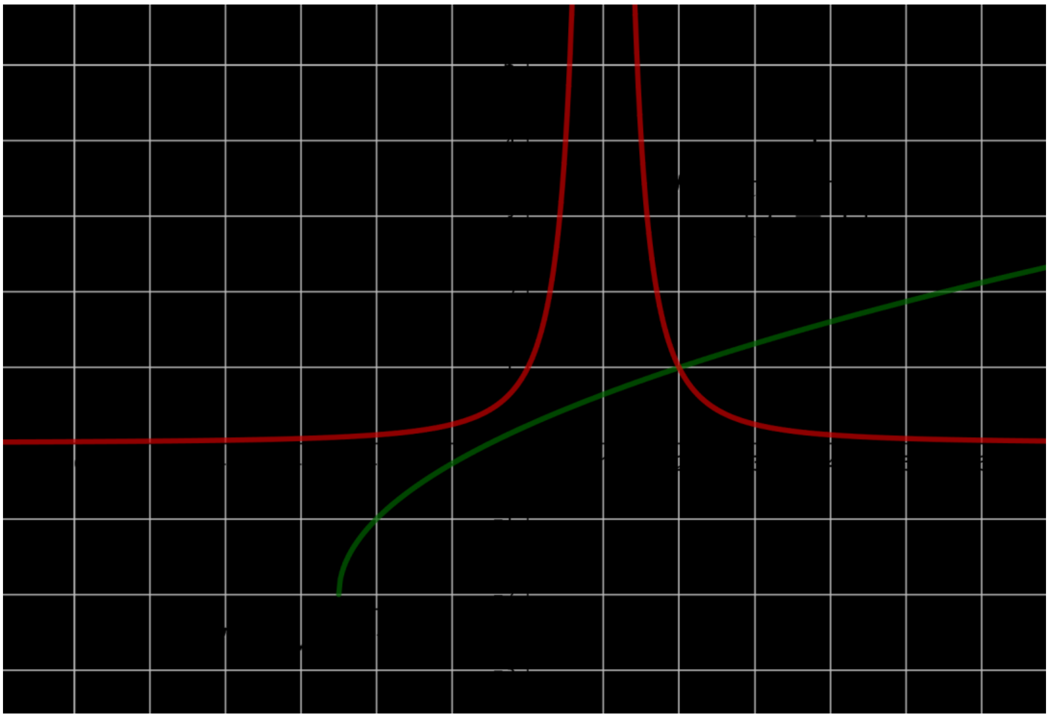

Рис. 2.2. Графическое решение уравнения $\frac{1}{(x-1)^2} = \sqrt{2x+5} - 2$

По чертежу видно, что графики имеют одну единственную точку пересечения. Значит, уравнение имеет единственное решение. Видно, что абсцисса точки равна 2, это и есть интересующее нас решение. Но нужно помнить, что результаты, полученные по графикам, могут быть неточными, приблизительными, то есть при возможности их нужно проверять. Выполним *проверку корня уравнения*: для этого подставим $x = 2$ в исходное уравнение. Имеем

$$\frac{1}{(2-1)^2} = \sqrt{2 \cdot 2 + 5} - 2, \qquad 1 = 1.$$

Подстановка дает верное числовое равенство, следовательно, $x = 2$ – корень уравнения $\frac{1}{(x-1)^2} = \sqrt{2 \cdot x + 5} - 2$. То есть графическим методом мы нашли точный корень.

Ответ: $\{2\}$.

2.4. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решите уравнения, используя свойство корня четной степени $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a\,, a \geq 0.$

1.1. $x^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 = 0.$

1.2. $5x^2 - \left(2\sqrt{x^2 + 3x}\right)^2 = 13.$

1.3. $x^2 - 5\left(\sqrt{x}\right)^2 - 6 = 0.$

1.4. $x^2 + \left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 10 = 0.$

1.5. $x^2 - \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 17 = 0$

1.6. $2x^2 - \left(\sqrt{x^2 - 10x + 9}\right)^2 - 15 = 0.$

1.7. $2x^2 - \left(\sqrt{x^2 - 2x}\right)^2 = 8x - 5.$

1.8. $2x^2 + \left(\sqrt{5 - x^2}\right)^2 = 9x - 9.$

Задание 2. Решите уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$.

2.1. $\sqrt{2x+9} - x = -3.$

2.2. $\sqrt{x+4} - x - 2 = 0.$

2.3. $\sqrt{2x^2 - 4x - 5} = x - 2.$

2.4. $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4.$

2.5. $x = 5 - \sqrt{2x^2 + 13 - 14x}.$

2.6. $\sqrt{1 + 8x + 2x^2} - 3 = x.$

2.7. $\sqrt{x^4 - 2x - 11} = 1 - x.$

2.8. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x - 1.$

Задание 3. Решите уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ (\text{либо } g(x) \geq 0). \end{cases}$

3.1. $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 + 3x}.$

3.2. $\sqrt{2-x}-\sqrt{8-x^2}=0.$

3.3. $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}.$

3.4. $\sqrt{8-5x}=\sqrt{x^2-16}.$

3.5. $\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-2x-7}.$

3.6. $\sqrt{x^2+6x-7}-\sqrt{x-1}=0.$

3.7. $\sqrt{x^2-7x+1}=\sqrt{2x^2-15x+8}.$

3.8. $\sqrt{\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+1}}=\sqrt{\frac{1}{6x}}.$

Задание 4. Решите уравнение вида $\sqrt{f(x)}=-\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{cases}$

4.1. $\sqrt{x^2-16}=-\sqrt{x-4}.$

4.2. $\sqrt{25x^2-1}=-\sqrt{35x+7}.$

4.3. $\sqrt{x^2-4}=-\sqrt{x^2-x-2}.$

4.4. $\sqrt{x^2-1}=-\sqrt{2x^2-x-1}.$

4.5. $\sqrt{9-x^2}=-\sqrt{x^2-4x-21}.$

4.6. $\sqrt{x^2-4x}=-\sqrt{x^2-3x-4}.$

4.7. $\sqrt{x^2+x-6}=-\sqrt{x^2-3x-18}.$

4.8. $\sqrt{2x^2-7x+3}=-\sqrt{2x^2+7x-4}.$

Задание 5. Решите уравнение вида $g(x)\cdot\sqrt{f(x)}=0$. В ответе укажите сумму корней.

5.1. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$

5.2. $(x^2-9)\sqrt{x-2}=0.$

5.3. $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0.$

5.4. $(3x-x^2-2)\sqrt{3-x^2}=0.$

5.5. $(4x-x^2-3)\sqrt{x^2-2x}=0.$

5.6. $(x^2-3x-4)\sqrt{6+x-x^2}=0.$

5.7. $(x^2-x-6)\sqrt{\frac{x^2+1}{2x}}=0.$

5.8. $\sqrt{9-x^2}\sqrt{10-3x-x^2}=0.$

Задание 6*. Решите уравнение методом введения новой переменной (выражение в наименьшей степени обозначьте за новую переменную).

6.1. $2+\frac{3}{\sqrt{5+x}}=\sqrt{5+x}.$

6.2. $\sqrt{5x-x^2}+\frac{6}{\sqrt{5x-x^2}}=5.$

6.3. $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x^2-1}}+\sqrt{3x-\frac{1}{x}}=\frac{9}{2}.$

6.4. $(x+4)(x-1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

6.5. $\sqrt{2x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x-2}=2.$

Задание 7. Решите уравнение.

7.1. $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}.$

7.2. $\sqrt{3x-5}=\frac{x-1}{\sqrt{x-2}}.$

7.3. $\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x+4}.$

7.4. $\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{2x+1}.$

7.5. $\sqrt{4x-3}=\frac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}.$

7.6. $\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+13}.$

7.7. $\sqrt{1-x}+\sqrt{7-x}=\frac{12}{\sqrt{7-x}}.$

7.8. $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}.$

3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1. Виды иррациональных неравенств и стандартные схемы их решения

Иррациональным называется неравенство, в котором переменная содержится под знаком корня (радикала). При решении иррациональных неравенств используются те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень, введение новых (вспомогательных) переменных и т. д. Однако в отличие от уравнений, где часто бывает возможность проверки найденных корней, при решении неравенств, как правило, получается бесконечное множество решений. Проверить их все принципиально невозможно. Поэтому, решая неравенства, нужно тщательно следить за равносильностью всех преобразований.

Осуществлять решение можно, придерживаясь, например, следующего плана:

1) найти область определения заданного неравенства;

2) руководствуясь предложениями о равносильности неравенств, решить заданное неравенство;

3) из найденных решений отобрать значения переменной, принадлежащие области определения заданного неравенства.

Другой путь – это переход к равносильной системе (или совокупности систем).

Рассмотрим основные **виды иррациональных неравенств** и приведем некоторые стандартные схемы для их решения.

В процессе решения иррациональных неравенств часто приходится сравнивать радикалы с нулем и константами различного знака. Поэтому предварительно рассмотрим несколько простейших неравенств подобного типа.

1. К простейшим иррациональным неравенствам относятся неравенства вида

$$\sqrt{f(x)} \vee a, \tag{3.1}$$

где a – некоторое действительное число, а символом $\vee$ обозначен один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq$.

Решение данного неравенства зависит от того, какие значения принимает параметр a.

Если $a = 0$, *получаем следующие неравенства*:

а) $\sqrt{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, так как радикал четной степени неотрицателен при любых x, удовлетворяющих области определения неравенства (ОДЗ);

б) $\sqrt{f(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$, так как радикал четной степени всегда положителен на ОДЗ, но нужно исключить те значения x, при которых он обращается в ноль;

в) $\sqrt{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, так как радикал четной степени не может принимать отрицательные значения, но может обращаться в ноль;

г) неравенство $\sqrt{f(x)} < 0$ содержит заведомо ложное утверждение, поэтому решений не имеет.

Если $a < 0$, *получаем следующие случаи*:

а) неравенства со знаками «$\geq$» и «$>$» выполняются при любых значениях x, удовлетворяющих области определения неравенства, то есть равносильны неравенству $f(x) \geq 0$;

б) неравенства со знаками «$\leq$» и «$<$» содержат заведомо ложные условия и поэтому решений не имеют.

Если $a > 0$, *то неравенство решается возведением обеих частей в квадрат и равносильно системе* $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \vee a^2. \end{cases}$

***Пример* 3.1.** Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}} > -\sqrt{3}.$$

Решение. Так как правая часть неравенства – отрицательное число, получаем:

$$\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}} > -\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3+2x}{4-x} \geq 0.$$

Или

$$\frac{2x+3}{x-4} \le 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим $-1{,}5 \le x < 4$.

Ответ: $[-1{,}5; 4)$.

2. Неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)}, \qquad (3.2)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g(x). \end{cases} \qquad (3.3)$$

Заметим, что условие $f(x) \ge 0$ не является необходимым при решении, так как оно логически следует из неравенств системы (3.3). Аналогично решается неравенство со знаком «>»:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \qquad (3.4)$$

***Пример* 3.2.** Решить неравенство $\sqrt{x+4} < \sqrt{x^2+x+3}$.

Решение. Представим неравенство со знаком «>» и решим его в соответствии с алгоритмом (3.4):

$$\sqrt{x^2+x+3} > \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \ge 0, \\ x^2+x+3 > x+4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4, \\ (x-1)(x+1) > 0. \end{cases}$$

Отметим решение каждого неравенства системы на числовой прямой и запишем в ответе промежутки пересечения множеств (рис. 3.1).

Рис. 3.1. Множество решений неравенства $\sqrt{x+4} < \sqrt{x^2+x+3}$

Ответ: $(-4;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$.

3. Неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} \le g(x), \qquad (3.5)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases} \tag{3.6}$$

Условие $g(x) \geq 0$ появляется ввиду того, что корень, стоящий в левой части неравенства, не может принимать отрицательные значения, а следовательно, и функция $g(x)$ также должна быть неотрицательной. Таким образом, первые два неравенства системы (3.6) определяют область допустимых значений неравенства, а третье неравенство системы получается при возведении обеих частей неравенства (3.5) во вторую степень.

Неравенство со знаком «<» решается аналогичным образом:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases} \tag{3.7}$$

***Пример* 3.3.** Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 3x - 18} < 4 - x$.

Решение. Для решения неравенства воспользуемся алгоритмом (3.7):

$$\sqrt{x^2 - 3x - 18} < 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x > 0, \\ x^2 - 3x - 18 \geq 0, \\ x^2 - 3x - 18 < (4 - x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ (x + 3)(x - 6) \geq 0, \\ x < 6{,}8. \end{cases}$$

Изобразим множество решений каждого неравенства системы на одной числовой прямой и найдем их пересечение (рис. 3.2).

Рис. 3.2. Множество решений неравенства $\sqrt{x^2 - 3x - 18} < 4 - x$

Ответ: $(-\infty;\ -3]$.

4. Неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x), \tag{3.8}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Таким образом, решение неравенства (3.8) разбивается на два случая в зависимости от рассматриваемого знака функции $g(x)$, стоящей в правой части неравенства. Если $g(x) \geq 0$, то согласно теореме о равносильных неравенствах можно возвести обе части неравенства в квадрат. Если же $g(x) < 0$, то неравенство справедливо при всех x из области допустимых значений, то есть при x, удовлетворяющих условию $f(x) \geq 0$.

Неравенство со знаком «>» решается аналогичным образом:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{3.10}$$

***Пример* 3.4.** Решить неравенство $\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3$.

Решение. Для решения неравенства воспользуемся алгоритмом (3.10):

$$\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ x^2+3x-18 > (2x+3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3 < 0, \\ x^2+3x-18 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

После преобразований получаем следующую совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -1{,}5, \\ x^2+3x+9 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1{,}5, \\ (x+6)(x-3) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Заметим, что дискриминант квадратного трехчлена x^2+3x+9 меньше нуля, а следовательно, неравенство $x^2+3x+9 < 0$ не имеет решений. Тогда не имеет решений и вся первая система совокупности (3.11). Множество решений второй системы совокупности изобразим на числовой прямой (рис. 3.3).

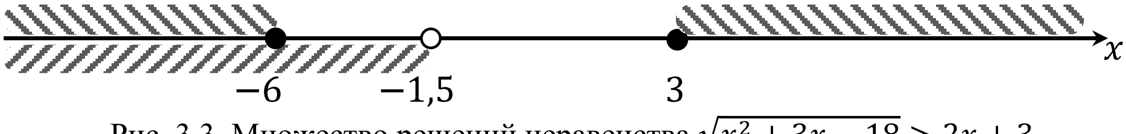

Рис. 3.3. Множество решений неравенства $\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3$

Ответ: $(-\infty;\ -6]$.

5. Неравенство вида

$$f(x) \cdot \sqrt{g(x)} > 0, \qquad (3.12)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

Корень всегда принимает неотрицательные значения, поэтому, он влияет на это неравенство, только если равен нулю. Таким образом, $\sqrt{g(x)} \neq 0$, а следовательно, и $g(x) \neq 0$. Для выполнения неравенства необходимо наложить условие $f(x) > 0$. С учетом ОДЗ и сформулированных рассуждений получаем, что неравенство (3.12) равносильно системе (3.13).

$$f(x) \cdot \sqrt{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases} \qquad (3.13)$$

С помощью аналогичных рассуждений можно вывести алгоритм решения неравенства $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} < 0$:

$$f(x) \cdot \sqrt{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < 0. \end{cases} \qquad (3.14)$$

***Пример* 3.5.** Решить неравенство $(x^2 - x - 2)\sqrt{x-2} < 0$.

Решение. Для решения неравенства воспользуемся алгоритмом (3.14):

$$(x^2 - x - 2)\sqrt{x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ (x-2)(x+1) < 0. \end{cases}$$

Изобразим на числовой прямой множество решений получившейся системы неравенств (рис. 3.4).

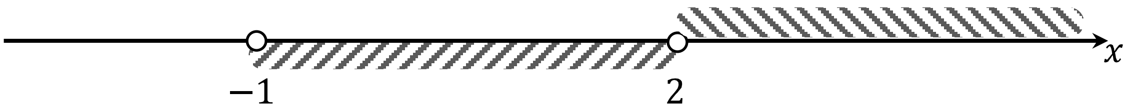

Рис. 3.4. Множество решений неравенства $(x^2 - x - 2)\sqrt{x-2} < 0$

Как видно на рис. 3.4, система неравенств решений не имеет, а значит, и исходное неравенство решений не имеет.

Ответ: нет решений.

6. Неравенство вида

$$f(x) \cdot \sqrt{g(x)} \geq 0, \qquad (3.15)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

Когда неравенство нестрогое, подкоренное выражение $g(x)$ может быть равно нулю. В этом случае неравенство будет справедливо вне зависимости от значения $f(x)$. Поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно. Таким образом, имеем следующую схему решения неравенства (3.15):

$$f(x)\cdot\sqrt{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3.16)$$

С помощью аналогичных рассуждений получается алгоритм решения неравенства со знаком «≤»:

$$f(x)\cdot\sqrt{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3.17)$$

***Пример* 3.6.** Решить неравенство $(x^2-9)\sqrt{x+2} \leq 0$.

Решение. Для решения неравенства воспользуемся алгоритмом (3.17):

$$(x^2-9)\sqrt{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = 0, \\ \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x^2-9 \leq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ \begin{cases} x \geq -2, \\ (x-3)(x+3) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Изобразим на числовой прямой множество решений получившейся совокупности (рис. 3.5).

Рис. 3.5. Множество решений неравенства $(x^2-9)\sqrt{x+2} \leq 0$

На рис. 3.5 видим, что решением неравенства является отрезок $[-2; 3]$.

Ответ: $[-2; 3]$.

Рассмотренные выше примеры касались корней только второй степени. Если же корень в неравенстве не квадратный, то важна четность его степени. Так, корни второй, четвертой, шестой и т. д. степеней очень похожи по своим свойствам. Поэтому и решение неравенств с корнями четной степени имеет общий подход. Дело в том, что корень четной степени можно всегда привести к квадратному, опираясь на свойства корня -й степени:

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}};\ \sqrt[6]{x} = \sqrt{\sqrt[3]{x}};\ \sqrt[2k]{x} = \sqrt{\sqrt[k]{x}}.$$

***Пример* 3.7.** Решить неравенство $\sqrt[4]{2-x^2} \geq x$.

Решение. Так как левая часть неравенства представлена корнем четной (4-й) степени, то алгоритм его решения будет подобен алгоритму 3.9:

$$\sqrt[4]{2-x^2} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x^2 \geq x^4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ 2-x^2 \geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x^4+x^2-2 \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Раскладывая неравенство $x^4+x^2-2 \leq 0$ на множество, приходим к равносильному неравенству $(x^2-1)(x^2+2) \leq 0$. Так как множитель (x^2+2) может принимать только положительные значения, то исходное неравенство равносильно неравенству $x^2-1 \leq 0$ или $(x-1)(x+1) \leq 0$. Таким образом, получаем следующую совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ (x-1)(x+1) \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Изобразив множество решений данной совокупности (рис. 3.6), получаем в качестве ответа отрезок $\left[-\sqrt{2}; 1\right]$.

Рис. 3.6. Множество решений неравенства $\sqrt[4]{2-x^2} \geq x$

Ответ: $\left[-\sqrt{2}; 1\right]$.

Так, корни нечетной степени можно извлекать из любого действительного числа, то ограничение на знак подкоренного выражения не требуется и для решения неравенства $\sqrt[2k+1]{f(x)} \vee g(x)$ достаточно возвести обе части неравенства в соответствующую степень.

***Пример* 3.8.** Решить неравенство $\sqrt[5]{x^5+x^2-4} \leq x$.

Решение. Так как левая является корнем нечетной степени, то можно возвести обе части неравенства в пятую степень. В результате получим:

$$\sqrt[5]{x^5+x^2-4} \leq x \Leftrightarrow x^5+x^2-4 \leq x^5 \Leftrightarrow x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \leq 0.$$

Решая квадратное неравенство, получаем отрезок $[-2; 2]$.

Ответ: $[-2; 2]$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pw40s3sga21

3.2. Методы решения иррациональных неравенств

Рассмотрим решение более сложных иррациональных неравенств, стараясь свести их решение к стандартным ситуациям – к простейшим неравенствам, рассмотренным в предыдущем параграфе. Методы и приемы сведения во многом аналогичны применяемым при решении иррациональных уравнений.

Метод возведения в квадрат

Если в неравенстве встречаются два квадратных радикала, обычно приходится неравенство возводить в квадрат дважды, обеспечивая при этом необходимые для этой операции условия.

***Пример* 3.9.** Решить неравенство $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2$.

Решение. Перенесем второй корень в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными и его можно было возвести в квадрат:

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2$;

$\sqrt{2x+3}>2+\sqrt{x-2}$;

$2x+3>4+4\sqrt{x-2}+x-2$;

$x+1>4\sqrt{x-2}$ или $4\sqrt{x-2}<x+1$.

Таким образом, получаем стандартное неравенство вида (3.7), которое равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x-2\geq 0, \\ 16(x-2)<x^2+2x+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\geq 2, \\ x^2-14x+33>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\geq 2, \\ (x-3)(x-11)>0. \end{cases}$$

Очевидно, что решение первого неравенства системы полностью входит в решение второго неравенства. Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x\geq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>11. \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим множество решений системы неравенств на числовой прямой (рис. 3.7).

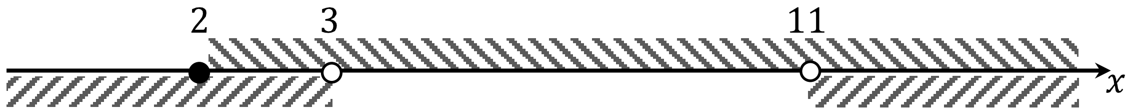

Рис. 3.7. Множество решений неравенства $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2$

Ответ: $[2;3)\cup(11;\,+\infty)$.

***Пример* 3.10.** Решить неравенство $\sqrt{x}\geq\sqrt{10-x}-\sqrt{x-5}$.

Решение. Перенесем $\sqrt{x-5}$ в левую часть неравенства. Тогда при любом значении переменной x из области допустимых значений (ОДЗ) обе части будут неотрицательны, а следовательно, можно решить неравенство методом возведения его частей в квадрат. Таким образом, с учетом ОДЗ получаем:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\geq\sqrt{10-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ x-5\geq 0, \\ 10-x\geq 0, \\ x+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-5}+x-5\geq 10-x. \end{cases}$$

В последнем неравенстве системы перенесем в правую часть выражения, не содержащие корень. Решение первого неравенства системы полностью входит в решение второго неравенства. Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x\geq 5, \\ x\leq 10, \\ 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-5}\geq 15-3x. \end{cases}$$

При решении третьего неравенства системы можно отклониться от стандартной схемы по следующим соображениям. С учетом первых двух неравенств системы неравенство $2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-5}\geq 15-3x$ определено на множестве

$5 \leq x \leq 10$. Правая часть неравенства представляет собой линейную убывающую функцию $f(x) = 15 - 3x$, которая на концах рассматриваемого промежутка принимает значения $f(5) = 0$ и $f(10) = -15$. Следовательно, на множестве $[5; 10]$ функция $f(x) \leq 0$. На этом же множестве правая часть неравенства может принимать только неотрицательные значения. Отсюда можно сделать вывод, что на указанном множестве неравенство $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-5} \geq 15 - 3x$ справедливо для любого $x \in [5; 10]$.

Ответ: $[5; 10]$.

Метод интервалов

Процедура реализации метода интервалов при решении иррациональных неравенств претерпевает некоторые изменения по сравнению с решением рациональных и дробно-рациональных неравенств. Отличие заключается в необходимости учета ОДЗ, которая при наличии радикалов четной степени состоит, как правило, из нескольких интервалов, вне которых мы не имеем права определять знаки левой части неравенства на основном рисунке. В остальном алгоритм аналогичен случаю рациональных и дробно-рациональных неравенств. Таким образом, при решении иррациональных неравенств необходимо придерживаться следующей схемы действий:

1) найти ОДЗ неравенства;
2) перенести все слагаемые в левую часть неравенства;
3) разложить ее на множители;
4) приравнять каждый множитель к нулю и найти его корни;
5) отметить полученные значения на числовой прямой;
6) оставить на числовой прямой только множества, входящие в ОДЗ;
7) расставить на оставшихся интервалах знаки левой части неравенства и сформулировать ответ.

***Пример* 3.11.** Решить неравенство $\frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{\sqrt{2x^2 - 3x - 9}} \geq 0$.

Решение. Поскольку радикал, стоящий в знаменателе дроби, всегда принимает только положительные значения, то можно умножить на него обе части неравенства. Таким образом, с учетом ОДЗ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 4x + 16 \geq 0, \\ 2x^2 - 3x - 9 > 0. \end{cases}$$

Разложим первое и второе неравенства системы на множители:

1) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = x^2(x-4) - 4(x-4) = (x-4)(x-2)(x+2)$.

2) $2x^2 - 3x - 9 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-3)$.

Изобразим множество решений каждого неравенства на одной числовой прямой и найдем их пересечение (рис. 3.8).

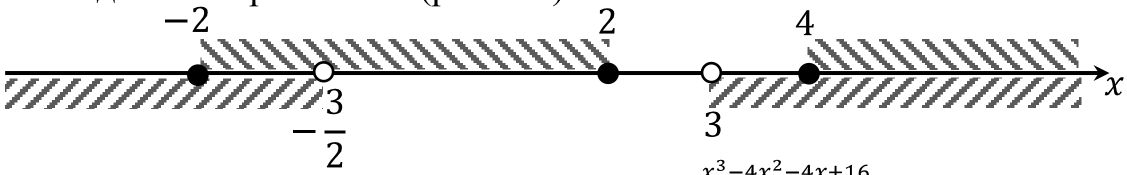

Рис. 3.8. Множество решений неравенства $\frac{x^3-4x^2-4x+16}{\sqrt{2x^2-3x-9}} \geq 0$.

Обратим внимание на то, что точки $-\frac{3}{2}$ и 3 не входят в решение неравенства, так как знаменатель дроби не может быть равен нулю.

Ответ: $\left[-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [4; +\infty)$.

***Пример* 3.12.** Решить неравенство $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$.

Решение. Ограничения на ОДЗ неравенства накладывает радикал (подкоренное выражение должно быть неотрицательным) и знаменатель дроби (должен быть отличен от нуля). Таким образом, ОДЗ данного неравенства определяется двумя условиями: $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0, \\ \sqrt{2x-3} \neq 1. \end{cases}$ Решая полученную систему, получаем $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

Очевидно, что возведение в квадрат обеих частей неравенства не приведет к избавлению от иррациональности, а, напротив, даже усложнит исходное неравенство. Поэтому сначала выполним равносильные преобразования. Для этого перенесем все в левую часть неравенства и приведем полученное выражение к общему знаменателю:

$$\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}-4<0 \Leftrightarrow \frac{x+2-4\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1}<0.$$

Теперь решим полученное неравенство обобщенным методом интервалов. Для этого сначала найдем точки, в которых обращается в ноль числитель или знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства.

Итак, находим нули числителя:

$$x+2-4\sqrt{2x-3}=0;$$

$$x+2=4\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geq 0, \\ x^2+4x+4=32x-48; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ x^2-28x+52=0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2-28x+52=0$ являются $x_1=2$ и $x_2=26$, которые оба удовлетворяют условию $x\geq -2$.

Далее находим нули знаменателя: $\sqrt{2x-3}=1$, откуда $x_3=2$. Таким образом, точка $x=2$ является двойной, следовательно, функция при переходе через нее свой знак не меняет.

Отметим найденные точки на одной числовой прямой, выделив на ней также ОДЗ исходного неравенства (рис. 3.9). Точки $x=2$ и $x=26$ разбивают всю числовую прямую на три части, в каждой из которых определим знак выражения $\frac{x+2-4\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1}$.

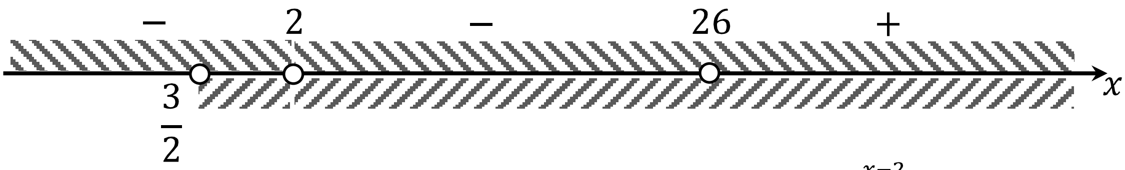

Рис. 3.9. Множество решений неравенства $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}<4$

Таким образом, в соответствии со знаком неравенства и ОДЗ получаем решение $\left[\frac{3}{2};2\right)\cup(2;26)$.

Ответ: $\left[\frac{3}{2};2\right)\cup(2;26)$.

***Пример* 3.13.** Решить неравенство $\sqrt{x^3-7x^2+27x-21}\geq x^2-4x+3$.

Решение. Для определения ОДЗ необходимо решить неравенство

$$x^3-7x^2+27x-21\geq 0.$$

Подбирая делители свободного члена, находим корень кубического многочлена $x = 1$. После деления многочлена $x^3 - 7x^2 + 27x - 21$ на $x - 1$ в частном получим двучлен $x^2 - 6x + 21$, который не раскладывается на множители над полем действительных чисел, так как имеет отрицательный дискриминант. Кроме того, так как старший коэффициент квадратного трехчлена положительный, то $x^2 - 6x + 21$ может принимать только положительные значения при любом x, а следовательно, можно разделить на него обе части неравенства. Поэтому ОДЗ можно переписать в виде

$$x^3 - 7x^2 + 27x - 21 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 6x + 21) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Возведение в квадрат исходного неравенства (естественно, при рассмотрении двух возможных знаков правой части согласно алгоритму (3.9)) приведет к появлению членов с x^4, x^3 и т. д. Поэтому выберем более рациональный путь и разложим многочлены в левой и правой частях неравенства на множители. Тогда исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{(x-1)(x^2 - 6x + 21)} \geq (x-1)(x-3). \qquad (3.18)$$

Так как из-за ОДЗ $x - 1 \geq 0$ и выше было сказано, что $x^2 - 6x + 21 > 0$ при любом x, то справедливы следующие соотношения:

$$x - 1 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2, \sqrt{(x-1)(x^2 - 6x + 21)} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 21},$$

с использованием которых неравенство (3.18) перепишется в виде

$$\sqrt{x-1} \cdot \left(\sqrt{x^2 - 6x + 21} - (x-3) \cdot \sqrt{x-1}\right) \geq 0. \qquad (3.19)$$

Применяем алгоритм метода интервалов и приравниваем к нулю каждый множитель неравенства (3.19). Первый из них обращается в нуль при $x = 1$. Равенство нулю второго множителя приводит к необходимости решения уравнения

$$\sqrt{x^2 - 6x + 21} = (x-3) \cdot \sqrt{x-1}.$$

При дополнительном ограничении $x - 3 \geq 0$, которое не выводит нас за рамки ОДЗ, возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 21} = (x-3) \cdot \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 21 = (x^2 - 6x + 9)(x-1).$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые:

$x^2 - 6x + 21 = x^3 - 7x^2 + 15x - 9;$

$x^3 - 8x^2 + 21x - 30 = 0;$

$(x^3 - 5x^2) - (3x^2 - 21x + 30) = 0;$

$x^2(x-5) - 3(x-5)(x-2) = 0;$

$$(x-5)(x^2 - 3x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 5 = 0, \\ x^2 - 3x + 6 = 0, \end{array}\right. \\ x - 3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ \emptyset\ (D < 0), \end{array}\right. \\ x \geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Итак, правая часть неравенства (3.19) обращается в нуль при $x = 1$ или $x = 5$. Оба корня принадлежат множеству $x \geq 1$, определяющему ОДЗ. Отмечаем эти точки на числовой прямой и указываем внутри ОДЗ знаки левой части неравенства (3.19) (рис. 3.10).

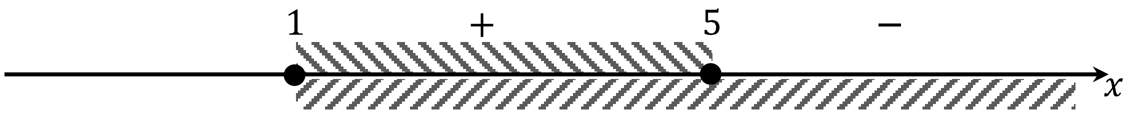

Рис. 3.10. Множество решений неравенства $\sqrt{x^3 - 7x^2 + 27x - 21} \geq x^2 - 4x + 3$

Ответ: $[1; 5]$.

***Пример* 3.14.** Решить неравенство

$$\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{3 - x^2 - 2x} \geq \sqrt[3]{4 - x}.$$

Решение. Так как неравенство содержит радикалы только третьей степени, то ОДЗ неравенства составляет все множество действительных чисел. Возведем обе части неравенства в куб и сгруппируем стандартным образом утроенные произведения:

$x^2 + x + 1 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{3 - x^2 - 2x} + 3\sqrt[3]{x^2 + x + 1} \cdot \left(\sqrt[3]{3 - x^2 - 2x}\right)^2 +$

$+ 3 - x^2 - 2x \geq 4 - x;$

$4 - x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt[3]{3 - x^2 - 2x} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{3 - x^2 - 2x}\right) \geq 4 - x.$

Слагаемые $4 - x$ в левой и правой частях взаимно уничтожаются. Разделив обе части на 3, получим:

$$\sqrt[3]{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt[3]{3 - x^2 - 2x} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{3 - x^2 - 2x}\right) \geq 0. \qquad (3.20)$$

Применим метод интервалов и приравняем к нулю каждый множитель неравенства (3.20). Определим корни каждого уравнения, учитывая возможность возведения в куб.

1) $\sqrt[3]{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \emptyset\ (D<0)$.

2) $\sqrt[3]{3-x^2-2x}=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=-3. \end{array}\right.$

3) $\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt[3]{3-x^2-2x}=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=-(3-x^2-2x) \Leftrightarrow x=4.$

Наносим полученные значения на числовую прямую и определяем знаки левой части неравенства (3.20) на получающихся интервалах. Например, при $x=0$ имеем $1\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\left(1+\sqrt[3]{3}\right)>0$. Далее обычным способом чередуем знаки на полученных интервалах ввиду монотонности рассматриваемых выражений (рис. 3.11).

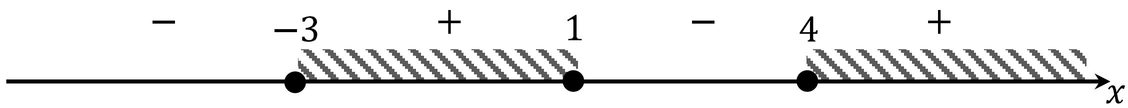

Рис. 3.11. Множество решений неравенства $\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt[3]{3-x^2-2x}\geq\sqrt[3]{4-x}$

Ответ: $[-3;1]\cup[4;+\infty)$.

Рассмотрим примеры решения иррациональных неравенств методом введения новой переменной, предпосылки введения которой примерно такие же, что и в иррациональных уравнениях. Необходимо увидеть в условии некоторое выражение, обозначив которое через новую неизвестную, мы сможем или свести неравенство к стандартному виду (желательно не содержащему радикалов), или, по крайней мере, существенно упростить условие. Однако следует помнить, что возвращение к «старой» переменной в неравенствах не такое простое, как в уравнениях, и требует аккуратности в выкладках.

Чаще всего в качестве новой переменной выбирается радикал, содержащий исходную неизвестную. В этом случае нет необходимости определять ОДЗ перед началом решения. Возможен учет ОДЗ при возвращении к «старой» переменной в том месте, где приходится избавляться от радикала.

***Пример* 3.15.** Решить неравенство $x - \sqrt{x} - 2 \leq 0$ введения новой переменной.

Решение. Данное неравенство можно решить и с помощью стандартной схемы (см. п. 3.1). Но наиболее часто такого вида неравенства решаются методом введения новой переменной с использованием свойства корня четной степени $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$, где $a \geq 0$.

Итак, используем замену $\sqrt{x} = t$. Тогда исходное неравенство примет вид

$$t^2 - t - 2 \leq 0. \tag{3.21}$$

Изобразим решение неравенства (3.21) на числовой прямой (рис. 3.12).

Рис. 3.12. Множество решений неравенства $t^2 - t - 2 \leq 0$

Как видно на рис. 3.12, решением неравенства (3.21) является отрезок $[1; 2]$. Это условие можно записать следующим образом: $-1 \leq t \leq 2$. Или с учетом обратной замены получаем: $-1 \leq \sqrt{x} \leq 2$. Откуда $0 \leq x \leq 4$.

Ответ: $[1; 2]$.

***Пример* 3.16.** Решить неравенство $3x^2 + 2\sqrt{3x^2 + 1} - 7 \leq 0$.

Решение. Решим данное неравенство методом введения новой переменной, обращая внимание на тот факт, что первое слагаемое левой части и одночлен подкоренного выражения имеют одинаковый вид. Тогда в терминах новой переменной $\sqrt{3x^2 + 1} = t \geq 0$, $3x^2 = t^2 - 1$ неравенство перепишется в виде

$$t^2 + 2t - 8 \leq 0. \tag{3.22}$$

Корнями квадратного трехчлена $t^2 + 2t - 8$ являются $t_1 = 2$ и $t_2 = -4$, следовательно, решение квадратного неравенства (3.22) – это отрезок $[-4; 2]$. Это условие можно записать следующим образом: $-4 \leq t \leq 2$. Теперь осуществим обратную замену:

$$-4 \leq \sqrt{3x^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2+1} \leq 2, \\ \sqrt{3x^2+1} \geq -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x^2+1 \leq 4, \\ 3x^2+1 \geq 0, \end{cases} \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Так как неравенство $3x^2 + 1 \geq 0$ справедливо при любом действительном x, то полученная система равносильна неравенству $3x^2 + 1 \leq 4$. Решая его, получаем $-1 \leq x \leq 1$.

Ответ: $[-1; 1]$.

***Пример* 3.17.** Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3-x}{3+x}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{3-x}} \geq \frac{5}{2}. \qquad (3.23)$$

Решение. Приведем подкоренное выражение во втором радикале к общему знаменателю:

$$1 + \frac{2x}{3-x} = \frac{3-x+2x}{3-x} = \frac{3+x}{3-x}.$$

Тогда неравенство перепишется в виде

$$\sqrt{\frac{3-x}{3+x}} + \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} \geq \frac{5}{2}.$$

Теперь понятно, каким образом можно ввести дополнительную переменную:

$$\sqrt{\frac{3-x}{3+x}} = t > 0.$$

Отметим, что переменная t должна быть строго положительна, поскольку в неравенство входят взаимно обратные выражения. Запишем неравенство в терминах новой переменной:

$$t + \frac{1}{t} \geq \frac{5}{2}. \qquad (3.24)$$

Умножим обе части неравенства (3.24) на $2t$ (так как $t > 0$). Получим неравенство $2t^2 - 5t + 2 \geq 0$. Решим его методом интервалов при условии, что $t > 0$ (рис. 3.13):

$$2t^2 - 5t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(t-2)\left(t - \tfrac{1}{2}\right) \geq 0.$$

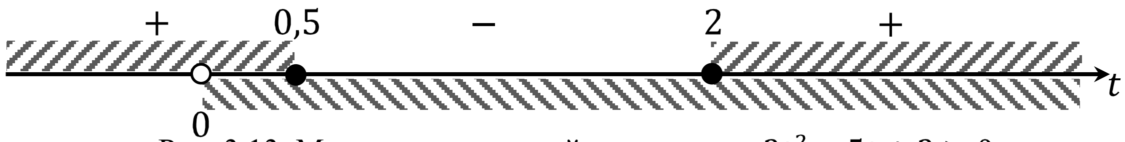

Рис. 3.13. Множество решений неравенства $2t^2 - 5t + 2 \geq 0$

Таким образом, решением неравенства (3.24) является совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t \leq 0{,}5, \\ t \geq 2. \end{array}\right.$$

С учетом обратной замены получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < \sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}} \leq 0{,}5, \\ \sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}} \geq 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < \dfrac{3-x}{3+x} \leq 0{,}25, \\ \dfrac{3-x}{3+x} \geq 4, \end{array}\right. \\ \dfrac{3-x}{3+x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{3-x}{3+x} \leq 0{,}25, \\ \dfrac{3-x}{3+x} \geq 4, \end{array}\right. \\ \dfrac{3-x}{3+x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{3-x}{3+x} - \dfrac{1}{4} \leq 0, \\ \dfrac{3-x}{3+x} - 4 \geq 0, \end{array}\right. \\ \dfrac{3-x}{3+x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{4(3-x)-(3+x)}{3+x} \leq 0, \\ \dfrac{3-x-4(3+x)}{3+x} \geq 0, \end{array}\right. \\ \dfrac{3-x}{3+x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{12-4x-3-x}{3+x} \leq 0, \\ \dfrac{3-x-12-4x}{3+x} \geq 0, \end{array}\right. \\ \dfrac{3-x}{3+x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{9-5x}{3+x} \leq 0, \\ \dfrac{-9-5x}{3+x} \geq 0, \end{array}\right. \\ \dfrac{3-x}{3+x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{5x-9}{x+3} \geq 0, \\ \dfrac{5x+9}{x+3} \leq 0, \end{array}\right. \\ \dfrac{x-3}{x+3} < 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы методом интервалов. Сначала изобразим решения неравенств, входящих в совокупность, на одной числовой прямой и найдем их объединение (рис. 3.14).

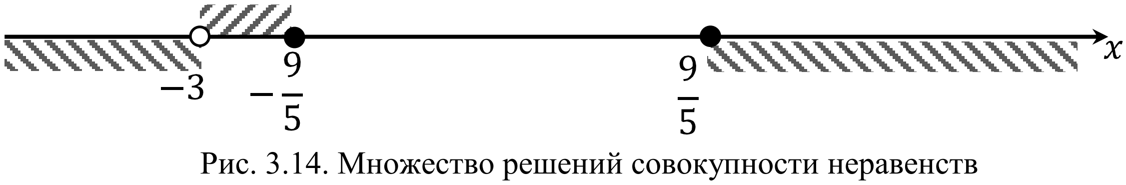

Рис. 3.14. Множество решений совокупности неравенств

Решением неравенства $\frac{x-3}{x+3} < 0$ является множество $(-3; 3)$. Найдем пересечение этого множества со множеством решений совокупности (рис. 3.15). Полученное множество и будет решением исходного неравенства (3.23).

Рис. 3.15. Множество решений неравенства (3.23)

Ответ: $\left(-3; -\frac{9}{5}\right] \cup \left[\frac{9}{5}; 3\right)$.

В задачах повышенной сложности зачастую усмотреть сразу замену переменной достаточно сложно и приходится предварительно применять тождественные преобразования. Особенно осторожно следует производить операции разбиения радикалов на сомножители, сокращения на радикал, внесения функций под знак радикалов и т. п.

***Пример* 3.18.** Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+4}} \geq \frac{7}{x+3}\sqrt{\frac{x+3}{x+4}}\,. \tag{3.25}$$

Решение. Для определения ОДЗ неравенства накладывается требование неотрицательности всех подкоренных выражений и отличие от нуля всех знаменателей дробей:

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x+3} \geq 0, \\ \dfrac{x-3}{x+4} \geq 0, \\ \dfrac{x+3}{x+4} \geq 0, \\ x+3 \neq 0, \\ x+4 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\infty; -3) \cup [4; +\infty) \\ (-\infty; -4) \cup [3; +\infty) \\ (-\infty; -4) \cup (-3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty; -4) \cup [4; +\infty)$$

В этом примере не нужно спешить с сокращением радикалов в правой части неравенства, поскольку эта операция будет происходить по-разному на разных участках ОДЗ.

1. Рассмотрим интервал $(-\infty; -4)$. На этом участке ОДЗ $x - 4 < 0$,

$x-3<0, x+3<0, x+4<0$. Далее учитываем, что если $A<0$ и $B<0$, то

$$\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}}, \sqrt{A\cdot B}=\sqrt{-A}\cdot\sqrt{-B}.$$

Следовательно, при рассматриваемых значениях x будут справедливы следующие соотношения:

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-3}}, \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}=\frac{\sqrt{-x+3}}{\sqrt{-x-4}}, \sqrt{\frac{x+3}{x+4}}=\frac{\sqrt{-x-3}}{\sqrt{-x-4}},$$

$$x+3=-(-x-3)=-\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{-x-3}.$$

Учитывая выписанные формулы при преобразовании обеих частей неравенства, имеем неравенство, равносильное исходному:

$$\frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-3}}+\frac{\sqrt{-x+3}}{\sqrt{-x-4}}\geq-\frac{7}{\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{-x-3}}\cdot\frac{\sqrt{-x-3}}{\sqrt{-x-4}};$$

$$\frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-3}}+\frac{\sqrt{-x+3}}{\sqrt{-x-4}}\geq-\frac{7}{\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{-x-4}}.$$

При $x<-4$ все знаменатели в последнем неравенстве строго положительны, поэтому можем умножить обе части на положительное выражение $\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{-x-4}$ и получим равносильное неравенство:

$$\sqrt{-x+4}\cdot\sqrt{-x-4}+\sqrt{-x+3}\cdot\sqrt{-x-3}\geq-7.$$

Полученное неравенство имеет характер истинного утверждения, поскольку левая часть при всех $x<-4$ всегда положительная, а правая – отрицательная. Следовательно, на первом этапе решением неравенства (3.25) будет интервал $(-\infty;-4)$.

2. Рассмотрим интервал $[4;+\infty)$. При этих значениях аргумента справедливы следующие соотношения:

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+3}}, \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+4}}, \sqrt{\frac{x+3}{x+4}}=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}}, x+3=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x+3}.$$

Преобразованное с учетом этих формул исходное неравенство (3.25) запишется в виде

$$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}\ge 7.$$

Для решения последнего неравенства появилась необходимость ввести дополнительную переменную, поскольку возведение обеих частей в квадрат приведет к усложнению решения: $\sqrt{x^2-16}=t\ge 0$. Тогда

$$x^2-16=t^2, x^2-9=t^2+7, \sqrt{x^2-9}=\sqrt{t^2+7}.$$

В терминах новой переменной неравенство перепишется в виде

$$t+\sqrt{t^2+7}\ge 7,$$

для решения которого перенесем t в правую часть и применим стандартную схему. При этом учтем, что $t^2+7\ge 0$ при всех допустимых значениях $t\ge 0$. Получаем:

$$\sqrt{t^2+7}\ge 7-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}7-t\ge 0,\\ t^2+7\ge 49-14t+t^2,\\ t\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}7-t<0,\\ t\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\le 7,\\ t\ge 3,\\ t\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}t>7,\\ t\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow t\ge 3.$$

Осуществим обратную замену и перейдем к исходной переменной x, учитывая ограничения второго этапа ($x\in[4;+\infty)$):

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-16}\ge 3,\\ x\ge 4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-16\ge 9,\\ x\ge 4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-25\ge 0,\\ x\ge 4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-5)(x+5)\ge 0,\\ x\ge 4.\end{cases}$$

Изобразим множество решений каждого неравенства системы и найдем их пересечение (рис. 3.16).

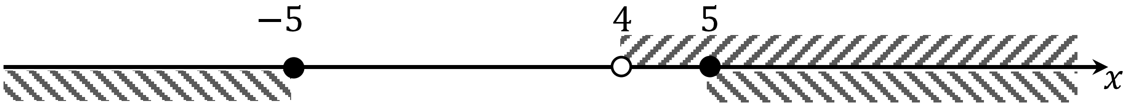

Рис. 3.16. Множество решений системы $\begin{cases}\sqrt{x^2-16}\ge 3,\\ x\ge 4;\end{cases}$

На рис. 3.16 видно, что решением является множество $x\ge 5$. Для формулировки окончательного ответа объединяем решения этапов 1 и 2.

Ответ: $(-\infty;-4)\cup[5;+\infty)$.

Переход к неравенству, содержащему модуль

В большинстве случаев решения иррациональных неравенств избавляться от радикалов четной степени в условии гораздо труднее, чем от модулей.

Поэтому если удается перейти от иррационального неравенства к неравенству, содержащему модули, то процесс решения становится более рациональным. При этом возможно применение известных формул (см. 1.1):

$$\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|, \sqrt[2n]{f^{2n}(x)} = |f(x)|.$$

***Пример* 3.19.** Решить неравенство

$$\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 26 - 10\sqrt{x + 1}} \geq 4\sqrt{|x + 1|}.$$

Решение. Когда под знак внешнего радикала входит еще один радикал, следует попробовать преобразовать подкоренное выражение к полному квадрату суммы или разности некоторых выражений. В нашем случае представим подкоренные выражения в виде полных квадратов разности, воспринимая выражения $2\sqrt{x + 1}$ и $10\sqrt{x + 1}$ как удвоенные произведения. Имеем:

$$\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 26 - 10\sqrt{x + 1}} \geq 4\sqrt{|x + 1|},$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{x + 1} + 1} + \sqrt{\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{x + 1} + 25} \geq 4\sqrt{|x + 1|},$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x + 1} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x + 1} - 5\right)^2} \geq 4\sqrt{|x + 1|}.$$

Учитывая полученную запись неравенства, можем найти его ОДЗ: $x + 1 \geq 0$. Отсюда следует, что, во-первых, $x \geq -1$ и, во-вторых, по определению модуля $|x + 1| = +1$. С учетом указанных выше формул переходим к модульной записи неравенства:

$$\left|\sqrt{x + 1} - 1\right| + \left|\sqrt{x + 1} - 5\right| \geq 4\sqrt{x + 1}\,. \tag{3.26}$$

Далее применим обобщенный метод интервалов (см., например, [15]) и найдем точки, в которых каждый модуль обращается в нуль:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x + 1} - 1 = 0, \\ \sqrt{x + 1} - 5 = 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x + 1} = 1, \\ \sqrt{x + 1} = 5;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0, \\ x = 24.\end{array}\right.$$

Точки $x = 0$ и $x = 24$ разбивают ОДЗ на три интервала (рис. 3.17), на каждом из которых неравенство (3.26) будет иметь различный вид.

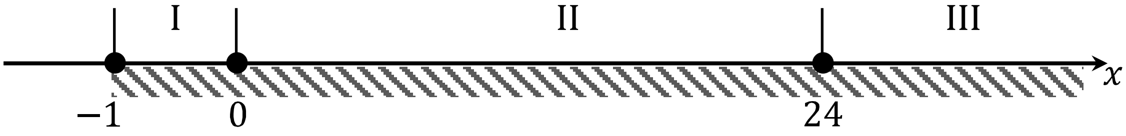

Рис. 3.17. Интервалы ОДЗ для неравенства (3.26)

I. $-1 \le x \le 0$. На этом интервале оба подмодульных выражения отрицательны и неравенство (3.26) запишется в виде

$$\begin{cases} -1 \le x \le 0, \\ \left(1 - \sqrt{x+1}\right) + \left(5 - \sqrt{x+1}\right) \ge 4\sqrt{x+1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 0, \\ \sqrt{x+1} \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 0, \\ x \le 0. \end{cases}$$

Таким образом, на рассматриваемом интервале решением неравенства является отрезок $[-1; 0]$.

II. Рассмотрим неравенство (3.26) на втором интервале. Имеем:

$$\begin{cases} 0 < x \le 24, \\ \left(\sqrt{x+1} - 1\right) + \left(5 - \sqrt{x+1}\right) \ge 4\sqrt{x+1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 24, \\ \sqrt{x+1} \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 24, \\ x \le 0. \end{cases}$$

Очевидно, что на данном интервале неравенство решений не имеет.

III. Рассмотрим неравенство (3.26) на втором интервале. Имеем:

$$\begin{cases} x > 24, \\ \left(\sqrt{x+1} - 1\right) + \left(\sqrt{x+1} - 5\right) \ge 4\sqrt{x+1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 24, \\ \sqrt{x+1} \le -3. \end{cases}$$

Так как второе неравенство системы не имеет решений, то и вся система, а следовательно, и неравенство (3.26) на данном интервале решений не имеют.

Итак, решение неравенства существует только на первом интервале.

Ответ: $[-1; 0]$.

Использование свойств монотонности функций

Напомним утверждения, на которые опирается решение иррациональных неравенств с использованием свойств монотонности функций.

***Теорема* 3.1.** Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $y = f(x)$ и требуется решить неравенство $f(x) < c$ (или $f(x) > c$). Если x_0 – корень уравнения $f(x) = c$, причем $a < x_0 < b$, то решения данного неравенства – весь промежуток $(a; x_0)$ (для неравенства $f(x) > c$ соответственно промежуток $(x_0; b)$).

Единственность корня следует из монотонности функции $y = f(x)$. Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число x_0, а если функция задана на замкнутом или полуоткрытом промежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка.

***Теорема* 3.2.** Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $y = f(x)$ и убывающая функция $y = g(x)$ и требуется решить неравенство $f(x) > g(x)$. Если x_0 – корень уравнения $f(x) = g(x)$, лежащий в рассматриваемом промежутке, то решения данного неравенства – все числа из промежутка $(x_0; b)$.

***Пример* 3.20.** Решить неравенство $\sqrt{x+3} + 3\sqrt{3x-2} < 15$.

Решение. Найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ 3x-2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ x \geq \dfrac{2}{3}; \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Заметим, что левая часть неравенства – возрастающая в ОДЗ функция. Подбором находим, при каком значении x левая часть равна правой. Это будет при $x = 6$ (в сформулированной выше теореме 3.1 $x_0 = 6$). Таким образом, с учетом ОДЗ можно утверждать, что начиная со значения $x = \frac{2}{3}$ и заканчивая значением $x = 6$, левая часть неравенства будет меньше 15 (что и требуется по условию задачи), а после этого значения – больше 15.

Ответ: $\left[\frac{2}{3}; 6\right)$.

***Пример* 3.21.** Решить неравенство $\sqrt{x + \sqrt{x^3} + \sqrt{x^5}} - \sqrt{3} < \sqrt{x} - 1$.

Решение. Очевидно, что ОДЗ неравенства – $x \geq 0$. Обе части неравенства – возрастающие функции. Поэтому пока теорему 3.2 применить нельзя. Преобразуем данное неравенство таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы 3.2. Для этого запишем неравенство следующим образом:

$$\sqrt{x + x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}} - \sqrt{x} < \sqrt{3} - 1.$$

Вынесем общий множитель $\sqrt{x}$ в левой части неравенства за скобки. Получим:

$$\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}-1\right)<\sqrt{3}-1.$$

В полученном неравенстве справа – константа, а слева – возрастающая функция, равная произведению неотрицательных возрастающих функций. Заметим, что при $x=1$ левая часть неравенства равна правой. Поэтому в силу высказанных выше утверждений решением неравенства будет все множество допустимых значений x, меньших 1.

Ответ: $[0;1)$.

***Пример* 3.22.** Решить неравенство $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}$.

Решение. Найдем ОДЗ неравенства. Имеем:

$$\begin{cases}x-2\geq 0,\\3-x\geq 0,\\x-1\geq 0,\\6-x\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2,\\x\leq 3,\\x\geq 1,\\x\leq 6;\end{cases}\Leftrightarrow 2\leq x\leq 3.$$

Прежде чем возводить в квадрат обе части исходного неравенства, необходимо убедиться в том, что обе его части неотрицательны. Однако оказывается это не так.

Действительно, так как $2\leq x\leq 3$, то $1\leq x-1\leq 2$ и $3\leq 6-x\leq 4$. А это значит, что $\sqrt{x-1}<\sqrt{6-x}$ или $\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}<0$. Но $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>0$ для любого x из ОДЗ. Таким образом, при всех значениях x из отрезка $2\leq x\leq 3$ исходное неравенство выполняется.

Ответ: $[2;3]$.

Графический метод

Иногда иррациональные неравенства можно решить графическим методом. Данный способ применим, когда соответствующие графики можно достаточно легко построить и найти точки их пересечения. При этом нужно помним, что графический метод является приближенным и необходимо осуществлять проверку.

***Пример* 3.23.** Решить графическим методом неравенство $\sqrt{7-x} > x-1$.

Решение. Чтобы решить неравенство графическим методом, необходимо в одной координатной плоскости построить графики функций, стоящих в его левой и правой частях, то есть графики $f(x) = \sqrt{7-x}$ и $g(x) = x-1$.

График функции $f(x) = \sqrt{7-x}$ можно построить из графика функции $y = \sqrt{x}$, зеркально отобразив последний относительно оси y, и сместить полученный график на 7 единиц масштаба вправо. Графиком функции $g(x) = x-1$ является прямая, проходящая через точку $(0; 1)$ (рис. 3.18).

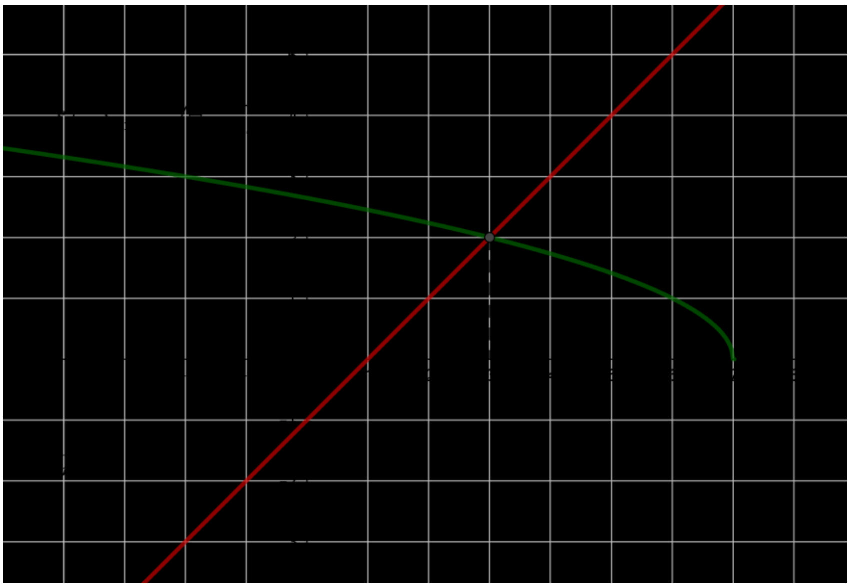

Рис. 3.18. Графическое решение неравенства $\sqrt{7-x} > x-1$

Функция $f(x)$ монотонно убывает, а $g(x)$ монотонно возрастает. Поэтому если функции и имеют точку пересечения, то только одну. На графике видно, что абсцисса точки пересечения равна 3. Решением неравенства будут все значения переменной x, при которых график функции $f(x) = \sqrt{7-x}$ лежит выше графика функции $g(x) = x-1$. Таким образом, решением неравенства является интервал $(-\infty; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 3)$.

Умножение на сопряженное

В некоторых ситуациях полезно бывает умножить и разделить на выражение, сопряженное данному.

***Пример* 3.24.** Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x+1}} \geq 1+\sqrt{x+1}.$$

Решение. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ 1-\sqrt{x+1} \neq 0; \end{cases} \qquad \Leftrightarrow x > 0.$$

Домножим числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, на выражение, сопряженное знаменателю. Имеем:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}-1}+1+\sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}+1+\sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+1}+1)}{x}+\sqrt{x+1}+1 \leq 0$$

Вынесем за скобки общий множитель $\sqrt{x+1}+1$:

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x}+1\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+1\right)\frac{x+\sqrt{x}-2}{x} \leq 0.$$

Так как ОДЗ неравенства есть множество $x > 0$, то мы можем обе части полученного неравенства умножить на $x > 0$. С учетом того, что выражение $\sqrt{x+1}+1$ может принимать только положительные значения, то получим следующее равносильное неравенство:

$$x+\sqrt{x}-2 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; -2 \leq \sqrt{x} \leq 1 \;\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

В пересечении ОДЗ получаем $0 < x \leq 1$.

Ответ: $(0; 1]$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=p2vrkf3xt21

3.3. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решить простейшие неравенства:

1.1.

а) $\sqrt{2x-7} < 3$;

б) $\sqrt{x^2+x+1} < 1$;

в) $\sqrt{x+1} > 4$;

г) $\sqrt{-x^2-3x+4} \geq 2$;

1.2.

а) $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1$;

б) $\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}} > -\sqrt{3}$.

1.3.

а) $\sqrt[3]{-4x} \geq 0$;

б) $\sqrt[5]{2x-5} \leq 2$.

Задание 2. Решить неравенства по алгоритмам (3.3)–(3.4):

2.1.

а) $\sqrt{x^2+2x-3} > \sqrt{x-3}$;

б) $\sqrt{x+4} < \sqrt{x^2+x+3}$;

в) $\sqrt{3x-10} \geq \sqrt{6-x}$;

г) $\sqrt{6-x^2} > \sqrt{-x}$;

д) $\sqrt{x^2-7x+5} \geq \sqrt{3x-4}$;

е) $\sqrt{x^2-4} \leq \sqrt{2x^2-x-6}$.

2.2.

а) $\sqrt{\frac{2x-3}{4x-1}} \geq \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$;

б) $\sqrt{\frac{3x-5}{x-2}} < \sqrt{\frac{4}{x+1}}$.

Задание 3. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x^2-4} > -\sqrt{-3x}$;

б) $\sqrt{x^2-2x-15} \leq -\sqrt{x^2-9}$;

в) $\sqrt{4-x^2} > -\sqrt{1-x}$;

г) $\sqrt{-x^2-x+6} \geq -\sqrt{-6x}$;

д) $\sqrt{x^2-6x} \leq -\sqrt{-x}$;

е) $\sqrt{x^2-x-2} \geq -\sqrt{2x-2}$.

Задание 4. Решить неравенства по алгоритмам (3.6)–(3.7):

4.1.

а) $\sqrt{x^2-9} \leq x-1$;

б) $\sqrt{-x+16} < x+4$;

в) $\sqrt{2x+3} \leq x$;

г) $\sqrt{5x-x^2} < x-2$;

д) $\sqrt{16-x^2} < \sqrt{3}x$;

е) $\sqrt{x^2-x-12} < x$.

4.2.

а) $2x+1 \geq \sqrt{7-x}$; **б)** $3+x > \sqrt{x^2+5x+7}$;

в) $x-2 > \sqrt{x^2-16}$; **г)** $x+7 \geq \sqrt{-x^2-3x}$.

Задание 5. Решить неравенства по алгоритмам (3.9)–(3.10):

5.1.

а) $\sqrt{x+5} > x+3$; **б)** $\sqrt{x+2} > x$;

в) $\sqrt{7+x} \geq 7-2x$; **г)** $\sqrt{4x-x^2} \geq x-5$.

5.2.

а) $\sqrt{x^2+3x-18}-2x > 3$; **б)** $\sqrt{5x-x^2}+2 > x$;

в) $\sqrt{7x+x^2}-x-1 > 0$; **г)** $2-3x < \sqrt{4+9x-9x^2}$;

д) $2-x \leq \sqrt{x^2-3x+2}$; **е)** $8-2x \leq \sqrt{-x^2+6x-5}$.

Задание 6. Решить неравенства:

6.1.

а) $\sqrt[5]{x^5+x^2-4} > x$; **б)** $\sqrt[3]{x^3+4x^2-36} < x$;

в) $\sqrt[7]{x^7-x^2+14x+15} > x$; **г)** $x \leq \sqrt[3]{x^3-x^2-8x+20}$.

6.2.

а) $\sqrt[3]{x^2-8} > x-2$; **б)** $\sqrt[3]{x^3-2} \leq x-2$;

в) $\sqrt[3]{x^3+2x^2+x} \geq x+1$; **г)** $\sqrt[3]{16-x^3} \geq 4-x$.

Задание 7. Решить неравенства по алгоритмам (3.13)–(3.17):

7.1.

а) $(x^2-4)\cdot\sqrt{x-1} \leq 0$; **б)** $(x^2-1)\cdot\sqrt{-x} \leq 0$;

в) $(x^2-4)\sqrt{x-1} \geq 0$; **г)** $(x-1)\cdot\sqrt{-x^2+x+6} \geq 0$;

д) $\sqrt{16-x^2}\cdot(x^2-9) \geq 0$; **е)** $(x+8)\cdot\sqrt{x^2-5x+4} \leq 0$.

7.2.

а) $(x^2-1)(x-3)(x+10)\cdot\sqrt{x-6} \geq 0$;

б) $(x^2+2x-8)\cdot\sqrt{x^2+x-2} \leq 0$;

в) $(x^2-6x+5)\cdot\sqrt{x^2-10x+24} \geq 0$;

г) $\sqrt{-25x^2+15x-2}\cdot(8x^2-6x+1)\geq 0$.

Задание 8. Решить неравенства, в ответе указать количество целых решений:

а) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt[5]{5-x}\geq 0$; **б)** $\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[5]{5-x}\cdot\sqrt{x-2}>0$;

в) $\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt{x+4}\leq 0$; **г)** $\sqrt[3]{x^2-x-72}\cdot\sqrt{x+9}\leq 0$;

д) $\sqrt[3]{x^2-6x-7}\cdot\sqrt{x+2}\leq 0$; **е)** $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt[3]{x-5}\cdot\sqrt[4]{10-x}>0$.

Задание 9. Решить неравенства методом возведения обеих частей в квадрат:

9.1.

а) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}>5$; **б)** $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\leq 4$;

в) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\leq 1$; **г)** $\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\geq 1$.

9.2.

а) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\leq\sqrt{10-x}$; **б)** $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+3}$.

в) $\sqrt{x+4}>\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}$; **г)** $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}>-\sqrt{x-5}$.

9.3.

а) $\sqrt{x+14}-\sqrt{x-2}\geq\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}$;

б) $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-5}\leq\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}$;

в) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x-4}\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}$.

9.4.*

а) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$; **б)** $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x}$.

Задание 10. Решить неравенства:

10.1.

а) $\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2+2x+3}>0$; **б)** $\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$;

в) $\frac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x}\geq 0$; **г)** $\frac{\sqrt{2x^2+5x-7}}{x+6}\leq 0$.

10.2.

а) $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$; **б)** $\frac{6-x}{\sqrt{x^2-8x+7}}\geq 0$;

в) $\frac{(x-2)(x-4)}{\sqrt{x^2+x+1}}<0$; **г)** $\frac{x+5}{\sqrt{(x+5)(x-3)}}\leq 0$.

Задание 11*. Найти наибольшее целое решение неравенства:

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \le \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

Задание 12. Решить неравенства методом интервалов:

12.1.

а) $\left(\sqrt{3+x}+x-3\right)\cdot\left(\sqrt{5+4x}+x-4\right) \le 0;$

б) $(x^2-4x+3)\cdot\sqrt{x+1} \le x^2-2x-3;$

в) $x^2 \ge x\cdot\left(4+\sqrt{24-2x-x^2}\right);$

г) $(x-3)\cdot\sqrt{x^2+4} \le x^2-9.$

12.2.

а) $\frac{\sqrt{5+x^2}+x-5}{x^2-4} < 0;$

б) $\frac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}} \le 0;$

в) $\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \le 3x+2;$

г) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4;$

д) $\frac{4x-3+\sqrt{2-x}}{x} \ge 2;$

е) $\frac{4-x}{1-3\sqrt{x-1}} > 3.$

12.3.*

а) $\sqrt{\frac{25-x^2}{x+4}}+\sqrt{x+4} > \frac{6}{\sqrt{x+4}};$

б) $\sqrt{\frac{16-x^2}{x+3}}+\sqrt{x+3} > \frac{4}{\sqrt{x+3}}.$

12.4.**

а) $\frac{(x^2-1)\cdot\left(\sqrt{3+x^2}+2x\right)}{|x-2|-4x+3} \ge 0;$

б) $\frac{\left(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2\right)\cdot\left(\sqrt{22+x}-x-2\right)\cdot\left(|2x+3|-|3x+2|\right)}{(x^2-5x+4)\cdot\left(\sqrt{5+x}+1-x\right)\cdot(x^{99}-1)} \le 0.$

Задание 13. Решить неравенства методом введения новой переменной:

13.1.

а) $x-4\sqrt{x}-5 \le 0;$

б) $2x-5\sqrt{x}+2 \le 0;$

в) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x} \le 6;$

г) $3\sqrt[6]{x+1}-\sqrt[3]{x+1} \ge 2.$

13.2.

а) $x^2-\sqrt{x^2+4}-8 \le 0;$

б) $2x^2-\sqrt{2x^2+1}-5 \le 0;$

в) $x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+2} \le 0;$

г) $5x-17\sqrt{x+5}+31 < 0.$

13.3.

а) $\sqrt{x}-3 \le \frac{2}{\sqrt{x}-2};$

б) $\frac{2}{5\sqrt{x}-4} \le \frac{1}{x-1};$

в) $\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6} > 0$; г) $\frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \geq 0$.

13.4.*

а) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leq \frac{3}{2}$; б) $\sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}} - \frac{17}{4} + \sqrt{1-\frac{2}{3x+1}} \geq 0$;

в) $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + \sqrt{1-\frac{2x}{2+x}} \geq \frac{10}{3}$; г) $\sqrt{1-\frac{2}{x+1}} \geq \frac{5}{2} - \sqrt{1+\frac{2}{x-1}}$.

Задание 14. Решить неравенства сведением к неравенству с модулем:

14.1.

а) $\sqrt{(2x+1)^2} < x+5$; б) $\sqrt{(3x-2)^2} > x+6$; в) $\sqrt{(x^3-2)^2} > x-\sqrt[3]{2}$.

14.2.

а) $\frac{\sqrt{4x^2-8x+4}+x}{x^2-3x+2} \geq 0$; б) $\frac{2\sqrt{9-18x+9x^2}+x}{x^2-10x+24} \leq 1$; в) $\frac{\sqrt{4x^2-8x+4}-x}{x^2-3x+2} \geq 3$.

14.3.*

а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}$;

б) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \leq 1$;

в) $\sqrt{x+28-10\sqrt{x+3}} + \sqrt{x+67-16\sqrt{x+3}} \geq \frac{5}{3}\sqrt{|x+3|}$.

Задание 15. Решить неравенства, используя свойства функций:

15.1.

а) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} < 6$; б) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt{x-3} > \sqrt{2-\sqrt[4]{x}}$.

15.2.*

а) $x^5 + 2x^4 + \sqrt{x} > 4$; б) $x^{15} + 3 \cdot \sqrt[4]{x-1} \geq 1$.

Задание 16.* Решить неравенства:

а) $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$; б) $\sqrt{x^2-1} + \frac{|x|}{x} \leq 1$;

в) $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} \geq 0$; г) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{|x|-|x-2|} < 0$.

4. СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Приемы решения систем иррациональных уравнений

Переходя к рассмотрению систем иррациональных алгебраических уравнений, нужно учесть, что сохраняются все особенности решения иррациональных уравнений, в частности нужна проверка, если имеются подозрения на нарушение равносильности.

Наиболее распространенные приемы решения иррациональных систем – освобождение от иррациональности с помощью возведения в соответствующую степень и замена переменных.

Следует обратить внимание, что замена переменных является одним из наиболее эффективных приемов решения нелинейных систем, в частности систем иррациональных уравнений. В ряде случаев этот прием позволяет значительно упростить исходную систему и сразу получить ее решение. Часто замена переменных используется в комбинации с другими приемами.

***Пример* 4.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1,\\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3.\end{cases}$$

Решение. Делаем замену $u=\sqrt{11x-y},\ v=\sqrt{y-x}$.

Замечаем при этом, что $6y-26x=4(y-x)-2(11x-y)=4v^2-2u^2$.

Таким образом, система переписывается в виде

$$\begin{cases}u-v=1,\\ 7v+4v^2-2u^2=3.\end{cases}$$

Выражаем u из первого уравнения: $u=v+1$, и подставляем во второе. Приходим к уравнению $2v^2+3v-5=0,\ \ v_1=1, v_2=-\frac{5}{2}$.

Значение v_2 отпадает ввиду условия $v\geq 0$, а значение $v_1=1$ соответствует $u=2$. Обратная замена:

$$\begin{cases}\sqrt{11x-y}=2,\\ \sqrt{y-x}=1,\end{cases}$$

откуда $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$.

Ответ: $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

***Пример* 4.2**.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 6, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Решение. Освободиться от иррациональности можно с помощью замены переменных $\sqrt[3]{x} = t$, $\sqrt[3]{y} = s$. Новые неизвестные должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} ts(t + s) = 6, \\ t^3 + s^3 = 9. \end{cases}$$

Это есть симметрическая система, поэтому полагаем $t + s = u$, $ts = v$. С помощью известных преобразований для симметричных систем получаем

$$\begin{cases} uv = 6, \\ u^3 - 3uv = 9, \end{cases} <=> \begin{cases} uv = 6, \\ u^3 = 27, \end{cases} <=> \begin{cases} u = 3, \\ v = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} t + s = 3, \\ ts = 2, \end{cases} <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 2, \\ s = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} t = 1, \\ s = 2, \end{cases} \end{array} \right.$ откуда получаем $\begin{cases} x_1 = 8, \\ y_1 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 1, \\ y_1 = 8. \end{cases}$

Здесь все преобразования эквивалентны, поэтому проверка не нужна.

Ответ: $\{(8; 1), (1; 8)\}$.

Пример* 4.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + 4y} = \sqrt{2} + 4, \\ \sqrt{x + 2y} - \sqrt{2x + 2y} = 2\sqrt{2} - 2. \end{cases}$$

Решение. Здесь есть ограничения на область допустимых значений $\begin{cases} x + y \geq 0, \\ x + 2y \geq 0. \end{cases}$

Обозначим $\sqrt{x + y} = u \geq 0, \sqrt{x + 2y} = v \geq 0$. Тогда получим

$$\begin{cases} u + \sqrt{2}v = \sqrt{2} + 4, \\ -\sqrt{2}u + v = 2\sqrt{2} - 2, \end{cases} <=> \begin{cases} u = \sqrt{2}, \\ v = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = 8, \end{cases} <=> \begin{cases} x = -4, \\ y = 6. \end{cases}$

Найденные x и у удовлетворяют ОДЗ, все преобразования эквивалентны, значит, это решение системы.

Ответ: $\{(-4; 6)\}$.

***Пример* 4.4.** Найти все значения x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28. \end{cases}$

Решение. Пусть $y = 28 - x$. Тогда $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{28 - x} = 4$. Возводим в куб:

$$x + 28 - x + 3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{28 - x}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{28 - x}\right) = 64, \text{т. е.}$$

$$28 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{28 - x} \cdot 4 = 64, \text{т. е.}$$

$$\sqrt[3]{x(28 - x)} = 3,\ x^2 - 28x + 27 = 0,$$

$$x_1 = 1 \ \Rightarrow\ y_1 = 27,$$

$$x_2 = 27 \ \Rightarrow\ y_2 = 1.$$

Ответ: $\{(1; 27), (27;\ 1)\}$.

***Пример* 4.5.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}. \end{cases}$$

Решение. Перемножим почленно данные уравнения:

$$\sqrt{\frac{20y}{x} \cdot \frac{16x}{5y}} = \left(\sqrt{x + y}\right)^2 - \left(\sqrt{x - y}\right)^2, \text{т. е.}$$

$$8 = x + y - x + y,\ \text{т. е.}\quad 2y = 8,\ y = 4.$$

Теперь сложим почленно данные уравнения:

$$\sqrt{\frac{20y}{x}} + \sqrt{\frac{16x}{5y}} = 2\sqrt{x + y},$$

отсюда, возведя в квадрат, получаем

$$\frac{20y}{x} + 2 \cdot 8 + \frac{16x}{5y} = 4(x + y),$$

$$\frac{5y}{x} + 4 + \frac{4x}{5y} = x + y.$$

Но $y = 4$. Значит, $\frac{20}{x} + 4 + \frac{x}{5} = x + 4$, т.е. $\frac{20}{x} = \frac{4x}{5}$, отсюда $x^2 = 25$, $x_{1,2} = \pm 5$. Проверкой убеждаемся, что решением является $x = 5, y = 4$.

Ответ: $\{(5,4)\}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/display?v=pq4jmc5ta20

4.2. Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Решить систему иррациональных уравнений:

1.1. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3. \end{cases},$

1.3. $\begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3}, \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6}. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12 \\ xy = 64. \end{cases},$

1.5. $\begin{cases} y^2 + \sqrt{3y^2 - 2x + 3} = \frac{2}{3}x + 5, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 2y^2 + y = 21 + 2xy, \\ x^3 \cdot \sqrt{x - y} = 0. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2. \end{cases}$

1.10.* $\begin{cases} 3x-1 = \frac{y}{x} + 2\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{y+\sqrt{x+y}} = y-3x-6. \end{cases}$

1.11.* $\begin{cases} x-100+25y-10\sqrt{xy} = 0, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y} = 2. \end{cases}$

1.12.* $\begin{cases} \sqrt{2x+4y} = 10-\sqrt{4y-2x}, \\ \sqrt{16y^2-4x^2} = 21. \end{cases}$

1.13.* $\begin{cases} \sqrt{2x+4} = 8-\sqrt{y-2}, \\ \frac{1}{\sqrt{2x+4}} + \sqrt{(y-2)^{-1}} = \frac{8}{7}. \end{cases}$

1.14.* $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2+4x+y^2-3y = 0. \end{cases}$

1.15.* $\begin{cases} \sqrt{x^2-1} = \sqrt{1-x}\cdot\sqrt{-x-1}, \\ x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваховский, Е. Б. Задачи по элементарной математике повышенной трудности / Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. – М.: Наука, гл. ред. Физико-математической литературы, 1971. – 360 с.
2. Григорьева, Т. В. Математика: учеб. пособие для подготовки к тестированию / Т. В. Григорьева, Б. К. Дураков. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2001. – 204 с.
3. Дорофеев, Г. В. Математика: Для поступающих в вузы / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – 4-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2001. – 672 с.
4. Жафяров, А. Ж. Математика. ЕГЭ2011. Экспресс-консультация / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2011. – 245 с.
5. Коннова, Е. Г. Математика. ЕГЭ-2015. Экспресс-подготовка: задания с кратким ответом. Все задания и методы их решения / Е. Г. Коннова, А. П. Дремов, С. О. Иванов, В. А. Шеховцов; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014. – 384 с. – (Готовимся к ЕГЭ).
6. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – 2-е изд., перераб. и доп. / В. Н. Литвиненко – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
7. Математика. Весь школьный курс в таблицах / сост. Т. С. Степанова. – Минск: Современная школа: Кузьма, 2010. – 7-е изд. – 304 с.
8. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы: В 2 ч. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.
9. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: В 2 ч. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.
10. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: В 2 ч. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений

(профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 4-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 287 с.

11. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. – 5-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2011. – 264 с.
12. Рыбакин, А. С. Математика. Методические указания к практическим занятиям для подготовки курсов. Иррациональные алгебраические уравнения и неравенства. Нелинейные алгебраические системы уравнений / под ред. Н. Н. Лященко. – Ленинград, 1978. – 32 с.
13. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.
14. Элементарная математика. Рациональные уравнения и неравенства: учеб. пособие / А. В. Фирер, Е. Н. Яковлева, А. П. Елисова, Т. В. Захарова; отв. ред. Н. К. Игнатьева. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2019. – 146 с.
15. Элементарная математика. Уравнения и неравенства с модулем: учеб. пособие / А. В. Фирер, Е. Н. Яковлева, А. П. Елисова, Т. В. Захарова; отв. ред. Н. К. Игнатьева. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2020. – 114 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

1. Вычислить $\sqrt{\sqrt[6]{81}}$:

- **а)** 3,
- **б)** $\sqrt{3}$,
- **в)** $\sqrt[3]{3}$,
- **г)** $\sqrt[3]{9}$.

2. Вычислить $\left(\frac{27^{0,(6)}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^2$:

- **а)** 0,3,
- **б)** 3,
- **в)** 81,
- **г)** 243.

3. Вычислить $\sqrt{216\sqrt{729\sqrt{216\sqrt{729}}}}$:

- **а)** 216,
- **б)** 324,
- **в)** 729,
- **г)** 1458.

4. Вычислить $\sqrt{(4-\sqrt{18})^2}+\sqrt{(\sqrt{18}-11)^2}$:

- **а)** 4,
- **б)** 7,
- **в)** 8,
- **г)** 15.

5. Вычислить $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$:

- **а)** 1,
- **б)** 2,
- **в)** 6,
- **г)** 10.

6. Вычислить $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$.

Ответ: _________

7. Вычислить $\frac{1}{3+\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{12}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{80}+9}$.

Ответ: _________

8. Указать наименьшее среди иррациональных чисел:

а) $\sqrt{8^{0,(2)}}$,

б) $\sqrt[3]{4}$,

в) $\sqrt[6]{16^{0,25}}$,

г) $\sqrt[3]{6}$.

9. Указать наименьшее среди чисел $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[5]{\frac{1}{5}}$.

Ответ: _________

10. Упростить выражение $\left(\sqrt{72}-\sqrt{98}+\sqrt{125}\right)\cdot\left(\sqrt{32}-\sqrt{720}+\sqrt{20}\right)$.

а) $2\cdot(15\sqrt{10}-129)$,

б) $15\sqrt{10}-129$,

в) $2\cdot(87\sqrt{10}-79)$,

г) $79-87\sqrt{10}$.

11. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Ответ: _________

12. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$:

а) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4}$,

б) $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$,

в) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{4}$,

г) $\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5}$,

13. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{7}}$:

а) $\frac{\sqrt[3]{225}-\sqrt[3]{105}-\sqrt[3]{49}}{8}$,

б) $\frac{\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{105}+\sqrt[3]{49}}{8}$,

в) $\frac{\sqrt[3]{225}-\sqrt[3]{105}+\sqrt[3]{49}}{22}$,

г) $\frac{\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{105}+\sqrt[3]{49}}{22}$,

14. Упростить $\frac{\sqrt{x}-4}{x^{\frac{1}{4}}-2}$.

Ответ: _________

15. Найти значение выражения $\sqrt[4]{x^2+2\sqrt{2}x+2}\cdot\sqrt{x-\sqrt{2}}$ при $x=\sqrt{3}$:

- **а)** 0,
- **б)** 1,
- **в)** $\sqrt{7}$,
- **г)** $\sqrt[4]{7}$.

16. Упростить $\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\frac{8\sqrt{x}}{x-4}\right):\frac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}}$.

Ответ: _________

17. Упростить $\left(\frac{x^{1,5}+y^{-1,5}}{x^{0,5}+y^{-0,5}}-x^{0,5}\cdot y^{-0,5}\right)\cdot\left(x-y^{-1}-2\cdot\frac{y^{-0,5}-x^{-0,5}y^{-1}}{x^{-0,5}}\right)^{-1}$.

Ответ: _________

18. Упростить $\left[\left(\frac{1+\left(1-x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{\left(1-x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right)^{-1}\right]:\sqrt{1-x^{-\frac{2}{3}}}$.

Ответ: _________

19. Упростить $\left(\frac{(x+y)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)^{-1}-(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2})\cdot(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x})^{-2}}{(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})\cdot(\sqrt[3]{y}+\sqrt[6]{xy}-2\sqrt[3]{x})}\right)^{-1}+2\sqrt[6]{x}$.

Ответ: _________

20. Вычислить $\frac{\sqrt{x^{-1}}+x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{18}+6\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}}+2\sqrt{2}}{\sqrt{x^{-1}}+2\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}}+x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{8}}$ при $x=\frac{1}{8}$.

Ответ: _________

21. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$:

- **а)** [2; 3],
- **б)** (–2; 1),
- **в)** (–5; 0),
- **г)** (0; 3).

22. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\sqrt{13-2x^2}=x$:

а) [–1; 0],

б) (–2; 1],

в) (–2; 0],

г) (1; +∞).

23. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\sqrt{x-2}=x-4$:

а) (3; 6],

б) (1; 3),

в) [0; 3],

г) (6; +∞).

24. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x^4+x^2-11}=1-x^2$:

а) ни одного,

б) один,

в) два,

г) четыре?

25. Сколько корней имеет уравнение $2x-\sqrt{x^3+2x^2-3x}=0$:

а) ни одного,

б) один,

в) два,

г) три.

26. Сколько корней имеет уравнение $3x-\sqrt{x^3+4x^2-6x}=0$:

а) ни одного,

б) один,

в) два,

г) три.

27.Пусть x_0 – корень уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$. Найдите $2\cdot x_0-1$:

а) –3,

б) –11,

в) 9,

г) уравнение корней не имеет.

28.Пусть x_0 – корень уравнение $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$. Найдите $2\cdot x_0+1$:

а) 7,

б) 1,

в) –5,

г) неположительных корней нет.

29.Решите уравнение $2-x=\sqrt{x+18}$. Укажите верное утверждение о его корнях:

а) корень только один, и он положительный,

б) корень только один, и он отрицательный,

в) корней два, и они разных знаков,

г) корней два, и они отрицательные.

30.Решите уравнение $x-4=\sqrt{31-6x}$. Укажите верное утверждение о его корнях:

а) корней два, и они разных знаков,

б) корней два, и они положительные,

в) корень только один, и он положительный,

г) корень только один, и он отрицательный.

31.Решите уравнение $\sqrt{x^2-x+1}+x=0$. Укажите верное утверждение о его корнях:

а) корень только один, и он положительный,

б) корень только один, и он отрицательный,

в) нет корней,

г) корней два, и они разных знаков.

32. Решите уравнение $\sqrt{(x+1)(2x+3)} = x+3$. Укажите верное утверждение о его корнях:

а) корней два, и они разных знаков,

б) корней два, и они положительные,

в) корень только один, и он положительный,

г) корень только один, и он отрицательный.

33. Решите уравнение $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x+3} = x+3$. Укажите верное утверждение о его корнях:

а) корней два, и они разных знаков,

б) корней два, и они положительные,

в) корень один, и он положительный,

г) корень один, и он отрицательный.

34. Целый корень уравнения $\sqrt{4x^2 + 5x + 4} = 2$:

а) 1,

б) 5,

в) 0,

г) –4.

35. Сумма корней уравнения $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 50} = 3$:

а) –11,

б) 4,

в) 7,

г) –4.

36. Меньший корень уравнения $\sqrt[3]{x^2 + 14x - 16} = -4$:

а) –6,

б) 6,

в) 8,

г) –8.

37. Произведение корней уравнения $\sqrt[5]{x^4 - 49} = 2$:

а) 9,

б) –9,

в) 3,

г) –3.

38. Наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x-4} > 0$:

Ответ: _________

39. Наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x-4} \le 0$:

Ответ: _________

40. Укажите решение неравенства $\sqrt{2x-7} < 3$:

а) $[3{,}5; 8)$,

б) $(-\infty; 8)$,

в) $[3{,}5; 5)$,

г) $(-\infty; 5)$.

41. Укажите решение неравенства $\sqrt{x+1} > 4$:

а) $(3;\ +\infty)$,

б) $(15;\ +\infty)$,

в) $(-\infty; 3)$,

г) $(-\infty; 15)$.

42. Наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{14 - x - 3x^2} < 2$.

Ответ: _________

43. Наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{7-x} \le 2x + 1$.

Ответ: _________

44. Наибольшее целое решение неравенства $x - \sqrt{3-2x} < 0$.

Ответ: _________

45. Наибольшее целое решение неравенства $\sqrt{x-2} > x - 4$.

Ответ: _________

46. Сумма целых решений неравенства $(x^2+2x-8)\cdot\sqrt{x^2+x-2}\le 0$.

Ответ: _________

47. Количество целых решений неравенства $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt[5]{5-x}\ge 0$.

Ответ: _________

48. Количество целых решений неравенства $\frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}}{x-3}\ge 0$.

Ответ: _________

49. Наименьшее целое решение неравенства $\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$.

Ответ: _________

50. Наименьшее целое решение неравенства $\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6}>0$.

Ответ: _________

51. Сумма целых решений неравенства $\sqrt{1-4x+4x^2}\le\frac{x^2-2x-3}{x-3}$.

Ответ: _________

52. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{5}{2},\\ x^2+y^2=34.\end{cases}$

Ответ: _________

53. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2},\\ x+y+xy=9.\end{cases}$

Ответ: _________

54. Решить систему уравнений $\begin{cases}\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}=3{,}5,\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3.\end{cases}$

Ответ: _________

55. Найти $x_0+y_0+z_0$, где (x_0,y_0,z_0) – решение системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3,\\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5,\\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4.\end{cases}$$

Ключ к тесту

1	**2**	**3**	**4**	**5**
в	г	б	б	а
6	**7**	**8**	**9**	**10**
$-\sqrt[3]{3}$	6	в	$\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$	а
11	**12**	**13**	**14**	**15**
0	а	б	$\sqrt[4]{x}+2$	б
16	**17**	**18**	**19**	**20**
$\sqrt{x}$	1	$4\sqrt[3]{x^2}$	$-\sqrt[6]{y}$	2
21	**22**	**23**	**24**	**25**
а	г	а, в	а	в
26	**27**	**28**	**29**	**30**
в	а	а	б	в
31	**32**	**33**	**34**	**35**
в	а	в	в	г
36	**37**	**38**	**39**	**40**
б	б	5	4	а
41	**42**	**43**	**44**	**45**
б	2	1	0	5
46	**47**	**48**	**49**	**50**
–6	3	6	–1	0
51	**52**	**53**	**54**	**55**
3	$(\pm5;\pm3)$	$(4;1)$, $\left(-9;-\frac{9}{4}\right)$	$(216;27)$, $(-27;-216)$	7

Учебное издание

Фирер Анна Владимировна,

Яковлева Елена Николаевна,

Елисова Анна Петровна,

Захарова Татьяна Вячеславовна

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА.
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА**

Редактор И.А. Вейсиг

Компьютерная верстка авторов

Подписано в печать	21.09.2021	Печать плоская
Формат 60x84/16		Бумага офсетная
Усл. печ. л. 6,6	Тираж 50 экз.	Заказ

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а, Тел. (391) 206-26-67;
http://bik.sfu-kras.ru E-mail publishing_house@sfu-kras.ru

Отпечатано в типографии ИП Азарова Н. Н.
(«ЛИТЕРА-принт»), Красноярск, ул. Гладкова, 6,
т. 8-902-924-15-77