Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ Л.Н. Храмова
подпись инициалы, фамилия
«14» 06 2022г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
код-наименование направления

АРИФМЕТИКА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Руководитель _______ 10.06.22 Доцент, канд. пед. наук С.С. Ахтамова
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Студент _______ 10.06.22 В.И. Жданова
подпись, дата инициалы, фамилия

Нормоконтролер _______ 10.06.22 Е.Н. Яковлева
подпись, дата инициалы, фамилия

Лесосибирск 2022

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «АРИФМЕТИКА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ» содержит 93 страницы текстового документа, 25 рисунков, 41 использованный источник.

ФАКУЛЬТАТИВ, КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО, МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ, МНИМАЯ ЕДИНИЦА.

Актуальность темы заключается в том, что благодаря широкому применению комплексных чисел перед учащимися раскрываются большие возможности в решении задач. Однако методика изучения данной темы в общеобразовательной школе не достаточно проработана.

Объект исследования – процесс обучения математики в общеобразовательной школе.

Предмет исследования – методика обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в рамках факультативного курса.

Цель работы – разработать методические рекомендации по изучению темы «Комплексные числа» в рамках факультативного курса для учащихся профильных классов общеобразовательной школы.

Основные задачи исследования:

- ознакомиться с особенностями организации факультативных занятий для старшеклассников в общеобразовательной школе;

- провести анализ содержания учебного материала темы «Комплексные числа» в учебниках разных авторов;

- разработать и организовать факультативный курс «Арифметика комплексных чисел» в профильных классах общеобразовательной школы с использованием онлайн-сервиса WOLFRAM ALPHA.

В результате исследования были разработаны методические рекомендации по изучению темы «Комплексные числа» в рамках факультативного курса «Арифметика комплексных чисел» для учащихся 10-11 классов и дополнительный факультатив для старшеклассников.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современного общества, связанное с научно-техническим прогрессом, требует от выпускников средней общеобразовательной школы иметь достаточно глубокие знания из области математики. Это обусловлено тем, что выпускники входят в новую жизнь, связанную с профессиональным становлением, а для многих современных профессий требуются математические знания и умения. Поэтому одной из основных задач, решаемых основным образованием, является сформировать у учащихся такие математические компетенции, которые необходимы каждому человеку, как в повседневной, так и в профессиональной деятельности [38]. Другая задача системы образования состоит в том, чтобы сформировать и развить у учащихся математическое мышление [38], что позволяет развить у школьников не только математические способности, но и воспитать у них интерес к творческой деятельности в математике. Развитию устойчивого интереса к предмету, профессиональному самоопределению старшеклассников, развитию мышления и математических способностей способствуют также факультативные занятия по математике.

Актуальность темы заявленной в выпускной квалификационной работе заключается в том, что тема «Комплексные числа» завершает формирование понятия числа у школьников в средней общеобразовательной школе и способствует прочному и углубленному освоению математических знаний учащимися и формированию у них научного мировоззрения. Комплексные числа имеют широкое применение не только в самой математике, но и в технике, физике, картографии и других областях.

Несмотря на важность темы «Комплексные числа», методика изучения данной темы в средней общеобразовательной школе не достаточно проработана. Поэтому все выше сказанное, говорит об актуальности выбранной темы исследования.

Цель работы – разработать методические рекомендации по изучению темы «Комплексные числа» в рамках факультативного курса для учащихся профильных классов общеобразовательной школы.

Объект исследования – процесс обучения математики в общеобразовательной школе.

Предмет исследования – методика обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в рамках факультативного курса.

Основные задачи исследования:

- ознакомиться с особенностями организации факультативных занятий для старшеклассников в общеобразовательной школе;

- провести анализ содержания учебного материала темы «Комплексные числа» в учебниках разных авторов;

- разработать и организовать факультативный курс «Арифметика комплексных чисел» в профильных классах общеобразовательной школы с использованием онлайн-сервиса WOLFRAM ALPHA.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина, К. Г. Муравина, С. М. Никольского, И. Я. Виленкина, А. Г. Мерзляка, Г. Д. Петросяна, Н. А. Евсеева, В. Г. Дубровина, Л. В. Бойко, А. В. Тарасенко и других.

Методы исследования:

1. Теоретические: анализ литературы; обобщение, сравнение и систематизация имеющихся представлений по проблеме исследования.

2. Методы сбора эмпирических данных: анкетирование.

3. Методы интерпретации и описания данных: количественный и качественный анализ результатов.

Этапы исследования:

Первый этап (сентябрь – ноябрь 2021) – анализ литературы по теме исследования, определение цели, объекта, предмета, постановка задач. Подготовка экспериментального исследования

Второй этап (декабрь 2021 – февраль 2022) – организация и проведение экспериментального исследования. Анализ и интерпретация результатов констатирующего эксперимента.

Третий этап (март – апрель 2022) – разработка методических рекомендаций по изучению факультативного курса «Арифметика комплексных чисел».

Четвертый этап (май 2022) – подготовка и оформление текста выпускной квалификационной работы.

Экспериментальная база исследования: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Лесоперевалочная средняя общеобразовательная школа №2 села Бельтирское республики Хакасия.

Теоретическая значимость состоит в том, что разработаны методические рекомендации по проведению факультативного занятия по теме: Комплексные числа.

Практическая значимость исследования определяется возможностью применения разработанных методических рекомендаций в учебном процессе в основной школе учителями-предметниками и студентами во время прохождения практики, а также при написании курсовых работ.

По результатам исследования опубликована статья на сайте «Инфоурок» по теме «Особенности организации факультативных занятий по математике на тему: «Комплексные числа» у старшеклассников». Ссылка на статью: https://clck.ru/qCHxv

Выпускная квалификационная работа по теме «Арифметика комплексных чисел на факультативных занятиях в общеобразовательной школе» содержит 93 страницы текстового документа, 25 рисунков, 41 использованный источник.

1 Теоретические основы организации факультативных занятий в общеобразовательной школе

1.1 Факультативные занятия по математике как одна из форм внеклассной работы со школьниками

Внеклассная работа по математике в общеобразовательном учреждении направлена на формирование и развитие личности учащегося и его способностей по предмету. Управление этим процессом означает, что педагог совершенствует и развивает природные математические способности школьника, формирует у него потребность в постоянном саморазвитии в этом направлении.

На постановку целей обучения математике оказывают влияние следующие показатели:

1) возрастные особенности учащихся;

2) общие образовательные цели;

3) концептуальное построение самого предмета;

4) место математики в науке;

5) роль математики в жизнедеятельности общества;

6) инновационные подходы в образовании.

Внеклассная работа по математике с учащимися состоит в проведении необязательных, систематических занятий по предмету во внеурочное время.

К формам внеклассной работы относят:

1) математические школы;

2) математические кружки;

3) факультативные занятия по математике;

4) математические праздники и другие.

Все вышеуказанные формы внеклассной работы направлены на углубление математических знаний обучающихся, определивших свои учебные интересы. Учитывая, что математика занимает важное место в современном обществе, интерес у учащихся к данному предмету необходимо начинать развивать еще в школе.

На уроках математики учитель имеет много возможностей, чтобы развить интерес к этому предмету. Однако знания, умения и навыки, в этом случае, формируются в рамках обязательного учебного материала. Поэтому участие во внеклассной работе по математике может послужить началом углубленного изучения данного предмета. Главными целями внеклассной работы со школьниками являются:

- развитие интереса учащихся к математике,

- привлечение учащихся к факультативным занятиям по данному предмету.

Кроме этого, внеклассная работа по математике:

- позволяет выявить учащихся, которые имеют склонность и интерес к изучению данного предмета,

- способствует их выбору будущей профессиональной деятельности, связанной с математикой.

Существует два вида внеклассной работы по математике (рисунок 1):

Рисунок 1 – Виды внеклассной работы по математики

Второе направление внеклассной работы реализуется в общеобразовательном учреждении для того чтобы:

1) пробудить и развить интерес у школьников к математике;
2) расширить и углубить имеющиеся знания по математике у учащихся;

3) развить математические способности у детей, привить им научно-исследовательские навыки;

4) привить учащимся навыки самостоятельной и творческой работы с учебной и научной литературой;

5) расширить и углубить представления школьников о практическом применении математических знаний в повседневной жизни;

6) расширить и углубить представления «учащихся о культурно-исторической ценности математики» [36];

7) развить у школьников «умения сочетать индивидуальную работу с коллективной работой» [36];

8) установить тесные деловые контакты между учащимися и учителем математики, способствующие глубокому изучению школьниками математики, развитию у них познавательного интереса к изучению данного предмета;

9) создать актив из числа детей, вовлеченных во внеклассную работу по математике, способный оказать помощь в обучении остальных учащихся класса.

Частично вышеуказанные результаты достигаются на уроках математики, но их полное достижение возможно за счет внеклассной работы.

Остановимся более подробно на факультативных занятиях по математике, которые являются одним из видов внеклассной работы. Важность математических факультативов заключается в том, что они вызывают интерес учащихся к математике, расширяют у них математический кругозор, развивают творческие способности.

Впервые факультативные занятия по выбору учащихся были введены в 1967-1968 учебном году в 7-10 классах. Нормативным документом, являющийся основанием введения подобных занятий в школе, стало постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 10.11.1966 «О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы». Факультативные занятия созданы для того чтобы расширить, углубить знания, развить интересы и способности учащихся в избранных ими областях знаний и воспитать у них определенные навыки самостоятельной работы [31].

По мнению Г. М. Чернобольской, создание факультативных занятий было вызвано появлением потребности в дифференциации обучения, которую нельзя было достичь иным путем в условиях стандартизации действующей образовательной системы [21]. Поэтому факультативные занятия должны были удовлетворить интересы учащихся в определенной области знаний. В первые годы своего существования, факультативные занятия были привязаны к определенному предмету. Но в дальнейшем стали возникать самостоятельные факультативы разной направленности (например, экологической, экономической и другой) [21]. Первые факультативы имели хорошее методическое обеспечение, они были интересно продуманы и к ним издавались учебные и методические пособия. В настоящее время их ценность не утрачена.

Термин «факультативный» происходит от французского слова facultative, которое переводится на русский язык как «возможность», и означает «необязательный, представляемый на выбор или действующий от случая к случаю».

Таким образом, факультативный курс (или факультатив) являлся необязательным учебным курсом, изучаемым по желанию учащихся общеобразовательной школы, и служил дополнением к основным знаниям, полученных в рамках школьной программы. Он (факультатив) определялся учебным планом и программой [21].

По мнению А. А. Мельник, факультативные занятия, как форма учебно-воспитательной работы, отличается от урока и внеклассной работы, но, в то же время, имеет с ними общие черты (таблица 1).

Таблица 1 – Общие и отличительные черты факультативных занятий с уроком и внеклассной работой (А. А. Мельник)

	Факультативные занятия	
	общие черты	**отличительные черты**
Урок	Проводятся по утвержденным программам, используют общие формы и методы обучения	Факультатив – добровольный выбор учащихся. Урок – обязательный
внеклассная работа	Добровольный выбор учащихся.	Факультативные занятия не заменяют внеклассную работу по предмету, но

Окончание таблицы 1

	Факультативные занятия	
	общие черты	**отличительные черты**
	Используют некоторые общие формы и методы организации занятий	могут дополняться кружковыми занятиями

Таким образом, А. А. Мельник считает, что факультативные занятия и уроки проводятся по утвержденным программам, используют общие формы и методы обучения. Однако программа факультативных курсов обладает гибкостью и может изменяться в соответствии желаний и возможностей учителя и обучающихся. В то же время, факультативные занятия являются добровольным выбором учащихся в изучении того или иного предмета, что сближает их с внеклассными формами работы. Кроме этого, на факультативных занятиях могут использоваться одинаковые формы и методы внеклассной работы и, в тоже время, факультативные занятия не отождествляются с внеклассной работой по предмету.

Факультативные занятия по математике в общеобразовательном учреждении способствуют:

- углублению и расширению знаний у учащихся по предмету;

- развитию интереса учащихся к данному предмету;

- развивают у детей математические способности;

- привитию учащимся интереса к самостоятельным занятиям математикой;

- развивают у детей инициативу и творчество.

Программа повышенного уровня по математике включает:

1) программу основного курса по данному предмету,

2) программу факультативных занятий по этому предмету.

Программа факультатива по математике составляется таким образом, что все вопросы, изучаемые в рамках курса, могут изучаться не обязательно одновременно с изучением основного курса математики в школе, а могут изучаться небольшими фрагментами (2-4 урока) из различных разделов школьной программы.

В настоящее время существуют четыре типа факультативных занятий по математике (рисунок 2).

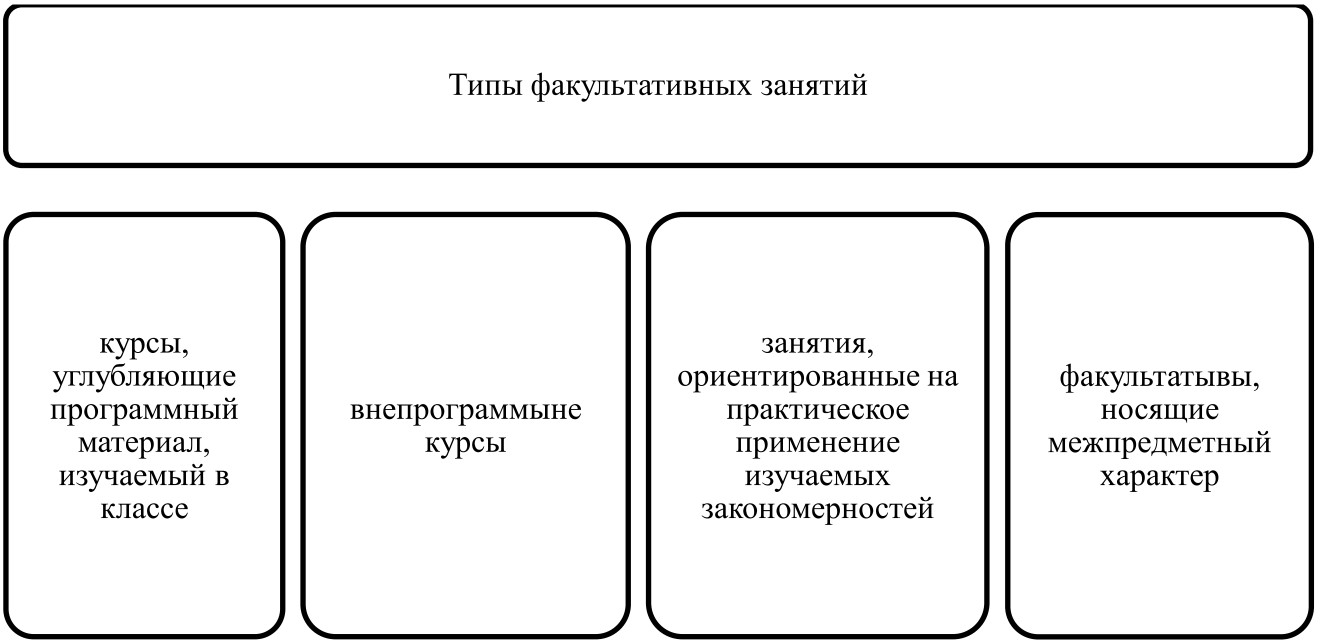

Рисунок 2 – Типы факультативных занятий по математике

Каждое занятие факультативного курса, несмотря на типовую форму, направлено:

- на развитие интереса школьников к математике,
- на знакомство их с новыми идеями и методами в области математики;
- на расширение знаний из основного курса математики;
- на решение интересных задач.

Для изучения факультатива отводится определенное количество часов и его прохождение отражается в журнале для факультативных занятий.

Таким образом, факультативные занятия являются важной частью учебно-воспитательной работы общеобразовательной школы. Они имеют широкие возможности и способствуют расширению кругозора школьников, формированию у них более высокого уровня знаний, помогают им сделать осознанный выбор будущей профессии.

1.2 Основные формы и методы проведения факультативных занятий по математике

Разработка факультативных занятий по математике требует от учителя серьезного подхода. Факультативы должны быть интересны и увлекательны для учащихся, тем самым способствуя развитию у них устойчивого познавательного интереса к предмету.

Для того чтобы факультативные занятия были интересны учащимся, а уровень усвоения ими знаний был высоким, учителю необходимо использовать разнообразные формы и методы обучения. Методы обучения бывают трех типов: по источнику информации, по способу взаимодействия, по формам организации деятельности (рисунок 3).

К основным формам проведения факультативных занятий по математике можно отнести лекцию, семинары, дискуссии, решение задач, рефераты и доклады учащихся, математические сочинения и другие.

Учитель не должен отдавать предпочтение какой-либо одной форме или методу проведения факультативного занятия. Он должен помнить, что на таких занятиях самостоятельная работа учащихся занимает ведущее место, следовательно, на факультативных занятиях необходимо чаще применять формы и методы самостоятельной работы учащихся.

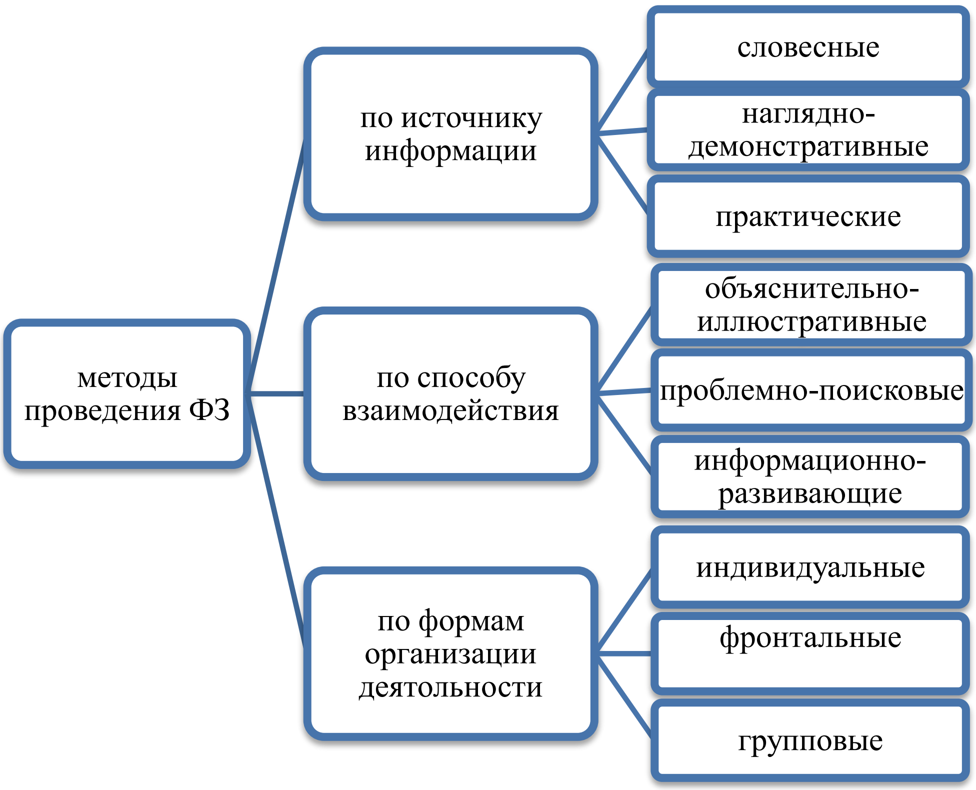

Рисунок 3 – Методы проведения факультативных занятий (ФЗ)

Факультативное занятие по математике состоит из двух частей:

1) изучение нового материала;
2) практическая работа учащихся по изученной теме.

В первой части факультативного занятия учитель объясняет новый материал, допускается самостоятельное изучение материала учащимися. Изложение материала происходит, как правило, в устной форме.

Существует следующие формы устного изложения:

1) рассказ;
2) объяснение;
3) инструктирование;
4) лекция.

Рассмотрим каждую форму отдельно.

Рассказ – это устное повествование учителя. Данная форма устного изложения не достаточно эффективна, так как не предполагает самостоятельную работу учащихся и дает слабое усвоение нового материала.

Лучше такую форму изложения использовать при знакомстве с биографией научного деятеля или исторической справкой.

Объяснение – это передача информации для раскрытия смысла какого-либо явления, примера, события и т.д. Оно связано с рассказом. Лучшее применение объяснения при раскрытии сути теоремы, математического определения и т.д. Данная форма изложения дает возможность остановиться на определенном этапе занятия и заострить внимание учащихся на важную информацию.

Инструктирование дает четкие указания к действиям при изучении нового материала. Такой способ изложения хорошо использовать для инструктажа перед началом выполнения самостоятельной работы школьниками.

Лекция охватывает больше информации, чем рассказ и объяснение, поэтому на ее проведение уходит много времени. Она позволяет осветить все аспекты изучаемой темы и рассмотреть более углубленно новый материал, и, следовательно, является более эффективной формой изложения. Как правило, на факультативных занятиях используется именно такая форма изложения изучаемого материала.

Существуют несколько приемов изложения учебного материала:

1) объяснение;
2) рассуждение;
3) доказательство;
4) проблематизация.

Объяснение используется, когда рассматривается на занятии сложный материал. Оно применяется при изучении теорем, новых формул и определений.

Рассуждение представляет собой диалог между учителем и учащимися и состоит из вопросов, задаваемых учителем, и ответов учеников. Проводя рассуждения, таким образом, учащиеся делают правильные выводы.

Доказательство используется при доказательстве теорем.

Проблематизация представляет собой проблемное изложение изучаемого материала и применяется в самостоятельной работе учащихся: ставится проблема, которую они должны решить.

Вторая часть факультативного занятия представляет собой практическую работу учащихся по изучаемой теме. На этом этапе занятия учащиеся решают математические задачи повышенной сложности, как с небольшой помощью учителя, так и самостоятельно. Они могут работать в небольших группах и парах. Учащиеся на втором этапе занятия работают с научной литературой, делают рефераты, готовят сообщения и т.д. Благодаря такой работе, школьники гораздо лучше усваивают изучаемый материал.

При выборе форм, методов и приемов обучения на факультативных занятиях, учителю необходимо учитывать следующее:

1) содержание факультативного курса;
2) уровень развития школьников;
3) имеющийся интерес учащихся к определенным разделам программы;
4) используемые формы, методы и приемы должны способствовать активизации самостоятельной деятельности учащихся на занятиях;
5) применяемые формы, методы и приемы должны соответствовать цели и задачам данного занятия и факультативного курса в целом.

Методы, используемые на занятиях факультативного курса, занимают важное место в формировании не только знаний, но и умений и навыков у учащихся.

На факультативных занятиях у школьников развиваются следующие умения и навыки:

1) слушать объяснение нового материала;
2) вести конспект занятия;
3) работать с учебником по математике;
4) работать с научной и учебно-методической литературой;
5) написать реферат на заданную тему;
6) подготовить сообщение или доклад по изученной литературе;

7) самостоятельно проводить исследование, поставленной проблемы;

8) решать задачи разной сложности;

9) доказывать теоремы.

Таким образом, при составлении факультативного занятия учитель использует разнообразные формы и методы обучения и тем самым повышает интерес учащихся к изучаемой теме, способствует лучшему изучению нового материала.

1.3 Особенности организации факультативных курсов для старшеклассников в общеобразовательной школе

Факультативные занятия по математике в средней общеобразовательной школе направлены на углубление и расширение математических знаний учащихся, развитию у них активного познавательного интереса к данному предмету, кроме этого, они содействуют профессиональному самоопределению учащихся в области математики.

На факультативные занятия по математике в средней общеобразовательной школе отводится 68 часов в год при занятиях 2 раза в неделю и 34 часа в год при занятиях 1 раз в неделю. Факультативная группа состоит из 10-15 человек, которая формируется из учащихся одного или нескольких параллельных классов, допускается зачисление учащихся из последовательных (10-11) классов. Набор факультативных групп основывается на принципе добровольности.

Знания учащихся, которые посещают факультативные занятия, подлежат обязательному оцениванию. При этом оценивание знаний осуществляется в два этапа: 1) получение текущей оценки знаний - 3, 4, 5 баллов (неудовлетворительные оценки не ставятся); 2) оценивание знаний по итогам четверти и года. Оценка, полученная, за прохождение факультативного курса по математике выставляется в приложение к аттестату о среднем (полном) общем образовании.

Отметим некоторые особенности постановки факультативного курса по математике для учащихся старших классов общеобразовательной школы:

1) факультативный курс способствует формированию математической культуры учащихся;

2) факультативный курс построен таким образом, чтобы обеспечить развитие самостоятельной, творческой и мыслительной деятельности старшеклассников;

3) факультативный курс обеспечивает тесную связь теории и практики;

4) факультативный курс опирается на индивидуальный подход в обучении на всех этапах образовательного процесса;

5) факультативный курс разработывается с учетом возрастных особенностей старшеклассников.

Раскроем каждую особенность более подробно:

Первая особенность.

На современном этапе развития науки, техники и производства перед общеобразовательной школой встает задача на воспитание творческой личности учащихся, способной решать как научные, так и производственные задачи. Наблюдается тенденция математизации области науки. Поэтому современная школа решает задачи на формирование математических способностей учащихся, повышению у них уровня математической культуры. Важным компонентом общей культуры человека выступает владение приемами логического мышления. Именно факультативные занятия по математике способствуют развитию данных умений у старшеклассников. Кроме этого факультативные занятия знакомят их с передовыми достижениями в области математики, идеями и методами данной науки на современном этапе. Поэтому факультативный курс по математике должен включать исторические сведения о математике, поскольку она является частью общей культуры.

Вторая особенность.

На факультативных занятиях основой обучения лежит не запоминание теоретических знаний, даваемое учителем, а активное участие учащихся в самом процессе приобретения знаний, что способствует развитию у учащихся старших классов творческих и познавательных способностей и навыков самостоятельной работы. Именно факультативные занятия дают большие возможности для развития таких способностей благодаря малочисленности учебных групп и добровольного участия в них старшеклассников.

Третья особенность.

На факультативных занятиях практической работе отводится особое место, так как благодаря ей можно определить уровень сознательности усвоения математических знаний. На таких занятиях практика рассматривается в двух аспектах: во – первых, как основа для усвоения теоретической части курса, во-вторых, как практическая деятельность человека. Учащиеся должны четко понимать сферу применения математических знаний в повседневной жизни. Кроме этого факультативный курс направлен на профессиональную ориентацию учащихся в области математики.

Четвертая особенность.

У старшеклассников изучаемый материал должен вызывать интерес, благодаря этому у них в значительной степени активизируются мыслительные процессы. А этот фактор способствует наилучшему усвоению учебного материала.

Пятая особенность.

Особое значение на факультативных занятиях имеет процесс индивидуализации обучения, потому что на занятиях изучается более трудный материал, а учащиеся имеют разные уровни мыслительной деятельности.

Шестая особенность.

В разработке факультативного курса учитель должен учитывать возрастные особенности школьников. Так одни формы и методы хорошо подходят для старшеклассников, другие – для подростков.

Рассмотрим более подробно возрастные особенности старшеклассников.

Учащиеся старших классов (10-11 классы) стоят на пороге вступления во взрослую, самостоятельную жизнь. Поэтому на данном этапе им необходимо выбрать направление своего жизненного пути, определиться со своей будущей профессией. Так у старшеклассников появляется новая социальная позиция, которая в корне меняет их отношение к учебе. Для учащихся данных классов учебный процесс имеет значение в той степени, в которой он отвечает интересам их будущей деятельности. В этом возрасте связь между профессиональными и учебными интересами носит прочный и устойчивый характер. Поэтому для учащихся старших классов выбор профессии влияет на формирование учебных интересов. Школьники начинают интересоваться теми предметами, которые им необходимы в их будущей профессии.

Другой важной особенностью старшеклассников является их склонность к самостоятельной деятельности. Их мышление носит самостоятельный и творческий характер. Старшеклассники стремятся понять разные точки зрения в каком-либо вопросе и формируют свое собственное мнение.

Еще одной чертой старшеклассников, отличающей их от подростков, является развитие у них мышления и научного мировоззрения. У школьников появляется интерес к аргументации своего суждения, доказательству истинных и ложных положений. Они хотят познать окружающий мир, объяснить разные явления, которые в нем существуют.

В этом возрасте у учащихся особое значение имеет развитие личностных качеств. Школьники формируют собственные мнения и суждения, повышают уровень самосознания. В поведении старшеклассников важное место занимают нравственные убеждения и моральные представления, которые оказывают влияние на формирование у них собственной системы ценностей.

Таким образом, старшеклассники имеют все условия для успешного решения задач обучения: образовательных, воспитательных и развивающих.

Факультативные занятия по математике обладают необходимыми возможностями для обеспечения комплексного подхода обучения, воспитания и развития старшеклассников. Наиболее эффективные методы обучения старшеклассников на таких занятиях, являются такие методы, которые направлены на самостоятельную и творческую деятельность учащихся.

Подведя итоги по первой главе, можно отметить следующее:

Факультативные занятия по математике являются одним из видов внеклассной работы и направлены на расширение и углубление знаний по данному предмету, они способствуют профессиональному самоопределению учащихся, развивают у них интерес к математике, как науке.

Некоторые исследователи (А.А. Мельник) относят факультативные занятия к одной из одной форм учебно-воспитательной работы, схожей по некоторым параметрам с уроком и внеклассной работой, но, в то же время, отличной от них.

На факультативных занятиях по математике учитель использует разнообразные формы, методы и приемы обучения, способствующие качественному усвоению изучаемого материала, и повышающие уровень познавательного интереса у школьников к данному предмету.

Факультативные занятия по математике для старшеклассников должны быть направлены на формирование у них математической культуры, развитие самостоятельной, творческой и мыслительной деятельности учащихся, и имеющие тесную связь математической теории с практической деятельностью. Кроме этого, факультативные курсы по математике должны быть интересны для учащихся старших классов. В реализации таких занятий важно использовать дифференцированный подход в обучении. Занятия необходимо строить с учетом возрастных особенностей учащихся.

Вторая глава данной выпускной квалификационной работы будет посвящена описанию факультативного курса по математике «Комплексные числа». Факультативный курс предназначен для учащихся 10-11 классов и разработан с учетом возрастных особенностей старшеклассников, их заинтересованности в изучении данной темы. Курс способствует формированию у них математической культуры и сочетает в себе, как теоретические, так и практические формы работы. Для достижения поставленной цели курса, используются формы, методы и приемы, обеспечивающие развитие самостоятельной, творческой и мыслительной деятельности учащихся старших классов. В основе курса лежит индивидуальный подход в обучении.

2 Методика проведения факультативного курса «Арифметика комплексных чисел» в профильных классах общеобразовательной школы

2.1 Анализ содержания учебной литературы по теме «Комплексные числа»

Первая глава настоящей выпускной квалификационной работы была посвящена теоретическим основам организации факультативных занятий в общеобразовательной школе. Данный вид занятий занимает важное место в развитии интереса к математике, поскольку расширяют и углубляют математические знания у школьников.

Вторая глава посвящена методическим особенностям изучения старшеклассниками факультативного курса «Арифметика комплексных чисел». В основу разработки и построения данного курса нами были взяты основные принципы построения факультативного курса для учащихся старших классов, указанные в параграфе 1.3 настоящей выпускной квалификационной работы, а именно:

- разработанный курс направлен на формирование математической культуры старшеклассников;
- факультативный курс способствует развитию самостоятельной, мыслительной и творческой деятельности учащихся 10-11 классов;
- данный курс обеспечивает тесную связь теоретических знаний с практической деятельностью;
- в основе факультативного курса лежит индивидуальный подход в обучении;
- в разработке данного курса учитываются возрастные особенности старшеклассников.

Кроме этого, факультативный курс включает разнообразные формы и методы обучения, которые представлены в параграфе 1.2 настоящей выпускной квалификационной работы. Благодаря этому у старшеклассников может развиться устойчивый интерес к математике.

Тема «Комплексные числа» занимает важное место в формировании математической культуры учащихся. Несмотря на это данная тема недостаточно исследована методистами. Тема «Комплексные числа» является завершающей в формировании у школьников понятия числа, благодаря ее изучению у школьников формируется целостное представление об этом математическом понятии.

Прежде чем приступить к разработке факультативного курса (ФК) «Арифметика комплексных чисел», мы провели анализ учебников по алгебре 10 - 11 классов, допущенных к использованию общеобразовательными школами при реализации образовательных программ среднего общего образования.

Проведя анализ учебников, мы выяснили, что не все авторы включили изучение темы «Комплексные числа» в учебное пособие. В таблице 2 отражены данные о включенности данной темы в учебнике по алгебры 10-11 классов.

Таблица 2 – Изучение темы «Комплексные числа» в учебниках алгебры 10-11 классов

№	**Учебник, автор**	**Класс**	**Уровень**	**Изучается тема «Комплексные числа» (да, нет)**
1	Алгебра и начала математического анализа. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачева М. В. и другие	10-11	Углубленный	Нет
2	Алгебра и начала математического анализа. Муравин Г. К., Муравина О. В.	10	Углубленный	Нет
3	Алгебра и начала математического анализа. Муравин Г. К., Муравина О. В.	11	Углубленный	Да
4	Алгебра и начала математического анализа. Муравин Г. К., Муравина О. В.	10	Базовый	Нет
5	Алгебра и начала математического анализа. Муравин Г. К., Муравина О. В.	11	Базовый	Да
6	Алгебра и начала математического анализа. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. и другие	10	Базовый и профильный	Нет

Продолжение таблицы 2

№	Учебник, автор	Класс	Уровень	Изучается тема «Комплексные числа» (да, нет)
7	Алгебра и начала математического анализа. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. и другие	11	Базовый и профильный	Да
8	Алгебра и начала математического анализа. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М.; под редакцией Подольского В. Е.	10	Базовый	Нет
9	Алгебра и начала математического анализа. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М.; под редакцией Подольского В. Е.	10	Углубленный	Нет

Таким образом, как видно из таблицы 2, тема «Комплексные числа» в рассмотренных нами учебниках 10 класса, не рассматривается, в учебники 11 класса не все авторы включили изучение данной темы. Из рассмотренных нами учебников 11 класса, тема «Комплексные числа» в основном изучается на профильном уровне изучения алгебры и начала анализа, за исключением учебника базового уровня, авторами которого являются Г. К. Муравин, О. В. Муравина.

Включение данной темы в учебник по математике во многом определяется личным отношением авторов и не является обязательной, так как задания по данной теме не включены в обязательный единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике. Хотя комплексные числа из всех рассматриваемых тем в школьном курсе математики по духу близки к современной математике. Они содержат в себе тригонометрию, теорию многочленов, теорию делимости, геометрические преобразования и другие знания. Поэтому изучение комплексных чисел имеет большое значение для формирования математического мировоззрения учащихся и знакомство с ними на уроках алгебры могло носить хотя бы ознакомительный характер.

Рассмотрим особенность изложения темы «Комплексные числа» в учебниках 11 класса под редакцией разных авторов.

1. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. : учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова [и др.]. – Москва : Просвещение, 2015. – 384 с.

На углубленном уровне изучения алгебры и начала анализа тема «Комплексные числа» изучается в 7 главе после изучения темы: «Элементы теории вероятности и статистики». Данной теме посвящено 4 параграфа (§§21-24).

На базовом уровне тема «Комплексные числа изучается в 6 главе, после изучения темы «Уравнения, неравенства и их системы». Данной теме посвящено 4 параграфа (§§17-20).

Последовательность изучения темы «Комплексные числа» на углубленном и базовом уровне одинаковая: сначала дается формула корней кубического уравнения, затем алгебраическая форма комплексного числа. После рассмотрения этой темы, учащиеся знакомятся с геометрическим представлением комплексного числа. В завершении учащиеся знакомятся с тригонометрической формой комплексного числа.

2. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник в 2-х частях. Базовый и углубленный уровни. / А. Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2019. – 511 с.

В учебнике теме «Комплексные числа» посвящена третья глава. Она является завершающей темой перед повторением. Глава состоит из трех параграфов (§§16-18):

§16 - сначала дается форма комплексного числа, затем раскрывается понятие сопряженных комплексных чисел и в конце дается геометрическая интерпретация комплексного числа;

§17 - раскрывается тригонометрическая форма комплексного числа, рассматриваются корни из комплексных чисел и их свойства;

§18 – рассматриваются корни многочлена и показательная форма комплексного числа.

3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. : учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд [и др.]. – 18-е изд. – Москва : Мнемозина, 2014. – 312 с.

Тема «Комплексные числа» рассматривается в 3 главе после изучения темы «Интеграл и его применение» перед темой «Элементы теории вероятности». Комплексным числам отводится 4 параграфа (§§13-16).

Последовательность изучения данной темы следующая: после знакомства с множеством комплексных чисел, учащиеся изучают комплексную плоскость и тригонометрическую форму комплексных чисел. После этого учащиеся знакомятся с такими вычислительными операциями, как: умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Кроме этого школьникам предлагается узнать корень n-степени из комплексных чисел и рассмотреть применение комплексных чисел. В завершении изучения темы учащиеся знакомятся с решением алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.

4. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Ч. 2. : задачник учащихся для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович. – 6-е изд. – Москва : Мнемозина, 2009. – 343 с.

Тема «Комплексные числа» изучается в XI главе, после изучения тем «Предел и непрерывность функции», «Производная и ее применения», «Определенный интеграл». Данная тема изучается в 11 классе до изучения темы «Теория вероятности».

XI глава состоит из 5 параграфов (§§ 68 - 72):

§ 68 – сначала рассматривается история комплексных чисел, затем дается определение множества комплексных чисел, сложение и вычитание, равенство комплексных чисел, после этого изучаются умножение комплексных чисел, сопряженные комплексные числа и деление комплексных чисел, в завершении рассматривается решение квадратных уравнений;

§ 69 – рассматриваются комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами и две теоремы (основная теорема алгебры и теорема о разложении многочлена с вещественными коэффициентами);

§ 70 – рассматриваются изображение комплексных чисел на координатной плоскости, модуль комплексного числа, модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма записи комплексного числа, умножение и деление комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, формула Муавра;

§ 71 – рассматриваются корни из комплексных чисел и арифметические действия с ними;

§ 72 – рассматривается применение комплексных чисел (доказательство равенств и геометрические преобразования).

Таким образом, в рассмотренных нами учебниках изложение темы «Комплексные числа» носит системный характер. Большинство авторов, рассмотренных нами учебников, на изучение темы выделяют 3-4 параграфа, кроме учебника Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Ч. 2. : задачник учащихся для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович. – 6-е изд. – Москва : Мнемозина, 2009. – 343 с. В данном учебнике отводится 5 параграфов. Все авторы учебников рассматривают алгебраическую и тригонометрическую формы комплексного числа. Корень n-степени рассматривается в учебнике (Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд [и др.]) и учебнике (автор Мордкович А.Г.).Сопряженные комплексные числа рассматриваются в учебнике (авторы Пратусевича М.Л, и др.) и учебнике (авторы С.М. Никольский и другие). Применение комплексных чисел включена в учебник (авторы Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд [и др.]) и учебник (автор А.Г. Мордкович). Каждый автор составляет свою последовательность изучения темы, каждый подход способствует формированию у школьников понимания о комплексных числах.

Во втором параграфе второй главы будет представлено описание факультативного курса «Арифметика комплексных чисел», разработанного с учетом основных принципов построения факультативного курса для старшеклассников профильных классов, изложенных в первой главе настоящей выпускной квалификационной работы. Кроме этого при разработке курса учитывался тот факт, что курс должен углублять или расширять полученные знания по теме «Комплексные числа», полученные на уроках.

2.2 Содержание факультативного курса «Арифметика комплексных чисел»

Факультативный курс «Арифметика комплексных чисел» направлен на углубленное изучение теории чисел и предназначен для учащихся 10-11 классов общеобразовательной школы, имеющих профильный уровень. Данный факультативный курс характеризуется новизной для старшеклассников, поскольку тема «Комплексные числа» в 10-11 классах на уроках алгебры либо не изучается, либо изучение темы носит ознакомительный характер.

Отбор содержания учебного материала для факультативного курса «Арифметика комплексных чисел» отпирался на общие принципы: системность, научность, реалистичность, доступность, целостность. Содержание факультативного курса:

1) является инвариантным, т.е. может быть применимо для разных групп школьников;

2) обладает полнотой, т.е. содержит необходимый материал для достижения целей обучения;

3) имеет практическую направленность, т.е. обеспечивает получение старшеклассниками знаний и умений, необходимых для выполнения вычислительных действий;

4) является системным, т.е. имеет логическое развертывание учебного материала.

На прохождение факультативного курса «Арифметика комплексных чисел» отводится 24 часа. Он является источником получения знаний, так как расширяет и углубляет базовый компонент. Кроме этого, факультативный курс имеет большую значимость для старшеклассников в их профессиональном самоопределении и в подготовке к ЕГЭ.

Цель: сформировать представление старшеклассников о множестве комплексных чисел.

Задачи:

1) образовательные:

- познакомить учащихся 11 классов с понятием комплексного числа, научить их выполнять основные арифметические операции с комплексными числами;

- показать учащимся прикладную значимость комплексных чисел в развитии математики, техники и естествознании;

2) развивающие:

- способствовать развитию критического и логического мышления, интеллектуальных способностей учащихся в области математики;

3) личностные:

- способствовать профессиональному самоопределению учащихся 10-11 классов.

Ожидаемые результаты ФК «Арифметика комплексных чисел» (рисунок 4):

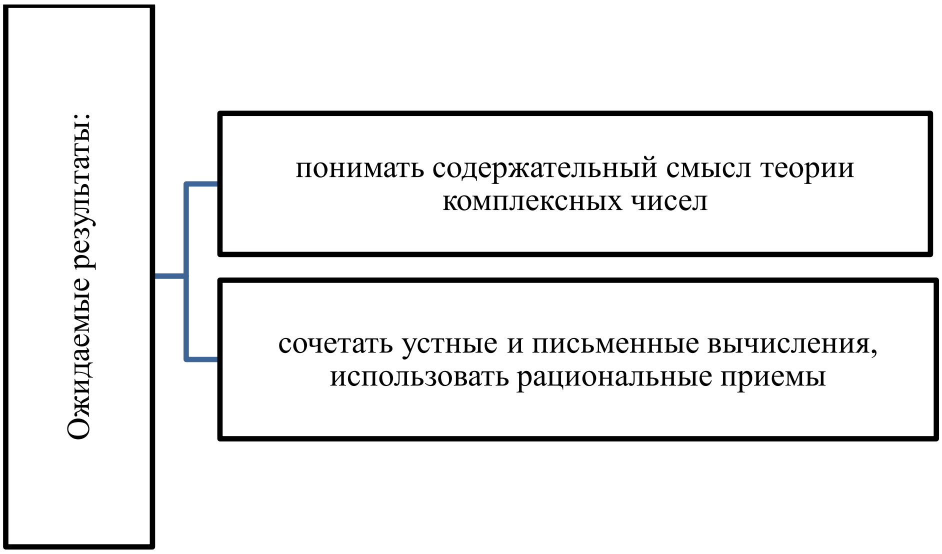

Рисунок 4 – Ожидаемые результаты факультативного курса «Арифметика комплексных чисел»

Учебно-тематический план факультативного курса «Арифметика комплексных чисел» представлен в таблице 3, содержание – в таблице 4.

Таблица 3 – Тематическое планирование факультативного курса «Комплексные числа»

№	Название темы	Общее кол-во часов	Из них:		
			теория	практика	проверочная работа
1	Введение	1	1		
2	Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическое представление комплексного числа	2	1	1	
3	Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме	6	1	4	1
4	Тригонометрическая форма комплексного числа.	2	1	1	
5	Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме	6	1	4	1
6	Показательная форма комплексного числа	6	1	5	
	Итоговая работа	1			1
		24	6	15	3

Таблица 4 – Содержание факультативного курса «Арифметика комплексных чисел»

№	Название темы	Содержание
1	Введение	- общее знакомство с факультативным курсом; - знакомство с новым классом математических объектов – «комплексные числа»
2	Алгебраическая форма комплексного числа (КЧ). Геометрическое представление комплексного числа	- мнимая единица; - действительная и мнимая части КЧ; - равенство комплексных чисел; - геометрическое представление КЧ; - сопряженные КЧ; - модуль КЧ
3	Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме	- сложение и вычитание КЧ; - умножение КЧ; - деление КЧ; - возведение в степень
4	Тригонометрическая форма комплексного числа	- аргумент КЧ; - тригонометрическая форма комплексного числа
5	Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме	Выполнение действий с КЧ, представленных в тригонометрической форме: умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного корня
6	Показательная форма комплексного числа	- формула Эйлера; - действия с числами в показательной форме; - представление КЧ из одной формы в другую; - платформа $Wolfram\ Alpha$
7	Итоговая работа	Самостоятельная проверочная работа

Методические рекомендации по изучению факультативного курса «Арифметика комплексных чисел» даны в параграфе 2.4 настоящей выпускной квалификационной работы.

Кроме этого, нами был разработан дополнительный факультативный курс для сильных детей, конспект одного из занятия представлено в Приложении А. Так же был создан видеоролик для привлечения старшеклассников на факультативный курс, содержание которого представлено в приложении Б.

Таким образом, разработанный факультативный курс «Арифметика комплексных чисел» расширяет и углубляет базовые математические знания учащихся 10-11 классов, помогает им подготовиться к ЕГЭ и определиться с будущей профессиональной деятельностью.

2.3 Использование онлайн-сервиса WOLFRAM ALPHA в рамках прохождения курса «Арифметика комплексных чисел»

Платформа $Wolfram\ Alpha$ представляет собой базу знаний и набор вычислительных алгоритмов и является вопросно-ответной системой. Она была запущена в 2009 году. Данная система не является поисковой. Она служит для выполнения различных вычислений и запросов из разных областей (математика, науки и техника, общество и культура, повседневная жизнь).

Система $Wolfram\ Alpha$ работает следующим образом (рисунок 5):

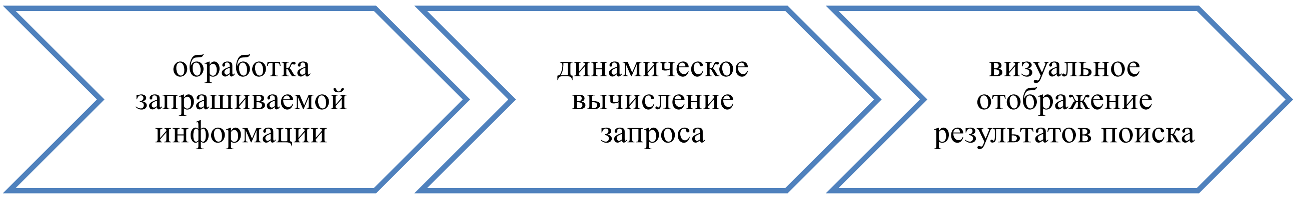

Рисунок 5 – Механизм работы системы Wolfram Alpha

На сайте платформы находится текстовое поле, в которое вводится необходимый запрос (рисунок 6):

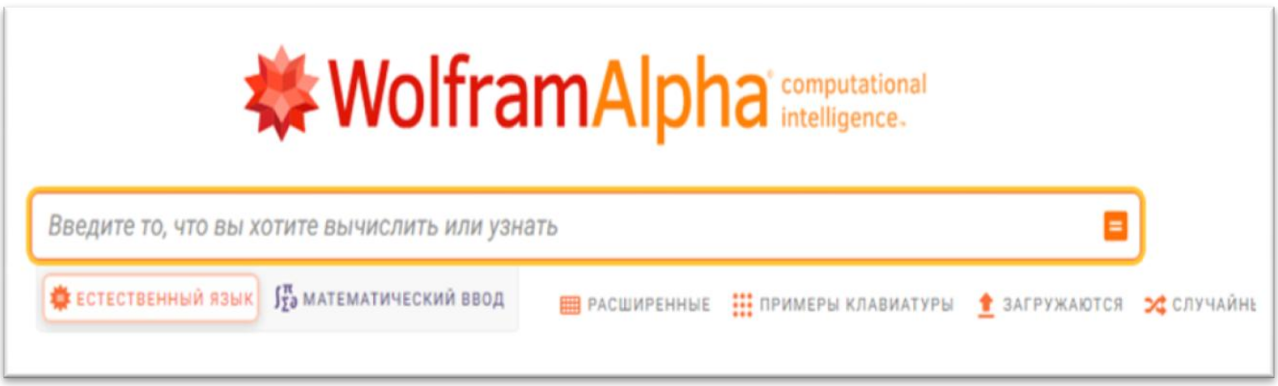

Рисунок 6 – Текстовое поле Wolfram Alpha

Под текстовым полем расположены кнопки, по которым можно выбрать язык ввода (естественный или математический ввод), примеры клавиатур (примеры возможных запросов).

Так, например, $Wolfram\ Alpha$ может выполнить вычисления из следующих областей математики: алгебра, линейная алгебра, геометрия, элементарная или прикладная математика, линейная алгебра, дискретная математика и другие.

Для ввода данных используются определенные обозначения и символы. Примеры некоторых обозначений представлены на рисунке 7.

+	сложение
-	вычитание
*	умножение
/	деление
^	возведение в степень
solve	решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств
expand	раскрытие скобок
factor	разложение на множители
sum	вычисление суммы членов последовательности
derivative	дифференцирование (производная)
integrate	интеграл
lim	предел
inf	бесконечность
plot	построить график функции
log (a, b)	логарифм по основанию a числа b
sin, cos, tg, ctg	синус, косинус, тангенс, котангенс
sqrt	корень квадратный
pi	число "пи" (3,1415926535...)
i	Мнимая единица i

Рисунок 7 – Краткий список обозначений, используемых в $Wolfram\ Alpha$

Приведем примеры записи задач с помощью $Wolfram\ Alpha$ (таблица 5)

Таблица 5 – Примеры записи задач с помощью $Wolfram\ Alpha$

№	Задание	Запись в Wolfram Alpha
1	Решить уравнение: $x^2 + 3x - 4 = 0$.	$solve\ x\^2 + 3x - 4 = 0$
2	Решить уравнение: $log_3 2x = 2$.	$solve\ log(3, 2x) = 2$
3	Решить уравнение: $25^{x-1} = 0.2$.	$solve\ 25\^(x - 1) = 0.2$
4	Решить уравнение: $sin\ x = 0.5$.	$solve\ sin(x) = 0.5$

Продолжение таблицы 5

5	Решите систему неравенств: $x^2 + 3x - 4 < 0$, $2x^2 - x + 8 > 0$.	$solve\ x\verb|^|2 + 3x - 4 < 0$ && $2x\verb|^|2 - x + 8 > 0$ && - логическое «И»
6	Раскрыть скобки и привести подобные: $(c+d)^2(a-c)$.	$expand\ (c+d)\verb|^|2 * (a-c)$
7	Найти производную функции: $f(x) = x^2 + 3x - 4$.	$derivative\ x\verb|^|2 + 3x - 4$

Данную математическую платформу можно использовать на факультативном курсе «Арифметика комплексных чисел», как дополнительный ресурс, обеспечивающий более высокий уровень усвоения математических знаний.

Платформа $Wolfram\ Alpha$ может:

- выполнять любые операции с комплексными числами, достаточно только ввести данные в поисковую строку, система сама выдаст полное решение;

- предоставить любую информацию о комплексных числах.

Несмотря на большие возможности данной платформы, она имеет недостаток – ввод данных осуществляется только на английском языке.

Рассмотрим на примерах дидактические и инструментальные возможности платформы $Wolfram\ Alpha$ при прохождении темы «Комплексные числа».

Сначала посмотрим, примеры действий, которые может выполнять система $Wolfram\ Alpha.$ Для этого на главной странице сайта под текстовым полем нажмем кнопку «Примеры клавиатуры». Отрывается страница «Примеры по темам». Находим раздел «Математика». Чтобы увидеть весь перечень примеров необходимо нажать на кнопку «Еще примеры», тогда система раскрывает весь перечень примеров из области математики. Далее в предложенном перечне находим кнопку «Комплексный анализ», нажав на нее можно увидеть направления, по которым приведены примеры. Находим «Комплексные числа» и, нажав кнопку «Больше примеров», видим все возможности, которые дает $Wolfram\ Alpha,$ при изучении комплексных чисел:

- выполняет любые арифметические вычисления комплексных чисел;

- находит корень комплексного числа;

- находит все комплексные n-корни числа;

- применяет функции к комплексным числам;

- выполняет вычисления, которые в результате дают комплексные числа.

Рассмотрим несколько примеров, предложенных системой $Wolfram$ $Alpha$.

Пример 1.

Вычислите: $(2 + 3i)(5 - i)$.

Вводим выражение в текстовое поле и нажимаем кнопку «$ENTER$», расположенную на клавиатуре. Система выдает ответ (рисунок 8).

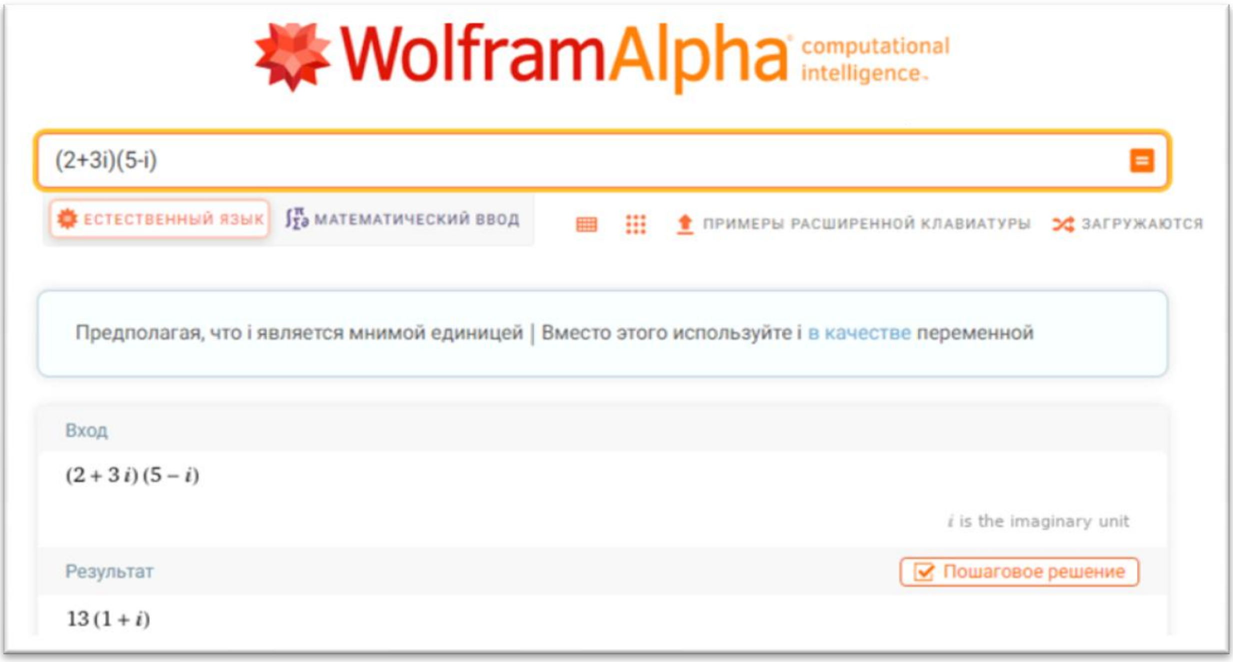

Рисунок 8 – Ввод данных и решение примера 1

Нажав на кнопку «пошаговое решение» раскрывается пошаговое выполнение вычислений.

Кроме этого, $Wolfram$ $Alpha$ предлагает:

- альтернативные сложные формы;

- положение комплексного числа в комплексной плоскости;

- указывает полярные координаты;

- указывает минимальный многочлен.

Страницу с решением можно скачать.

Пример 2.

Найдите значение: $\frac{1}{12+7i}$

$Wolfram\ Alpha$ дает следующее решение (рисунок 9):

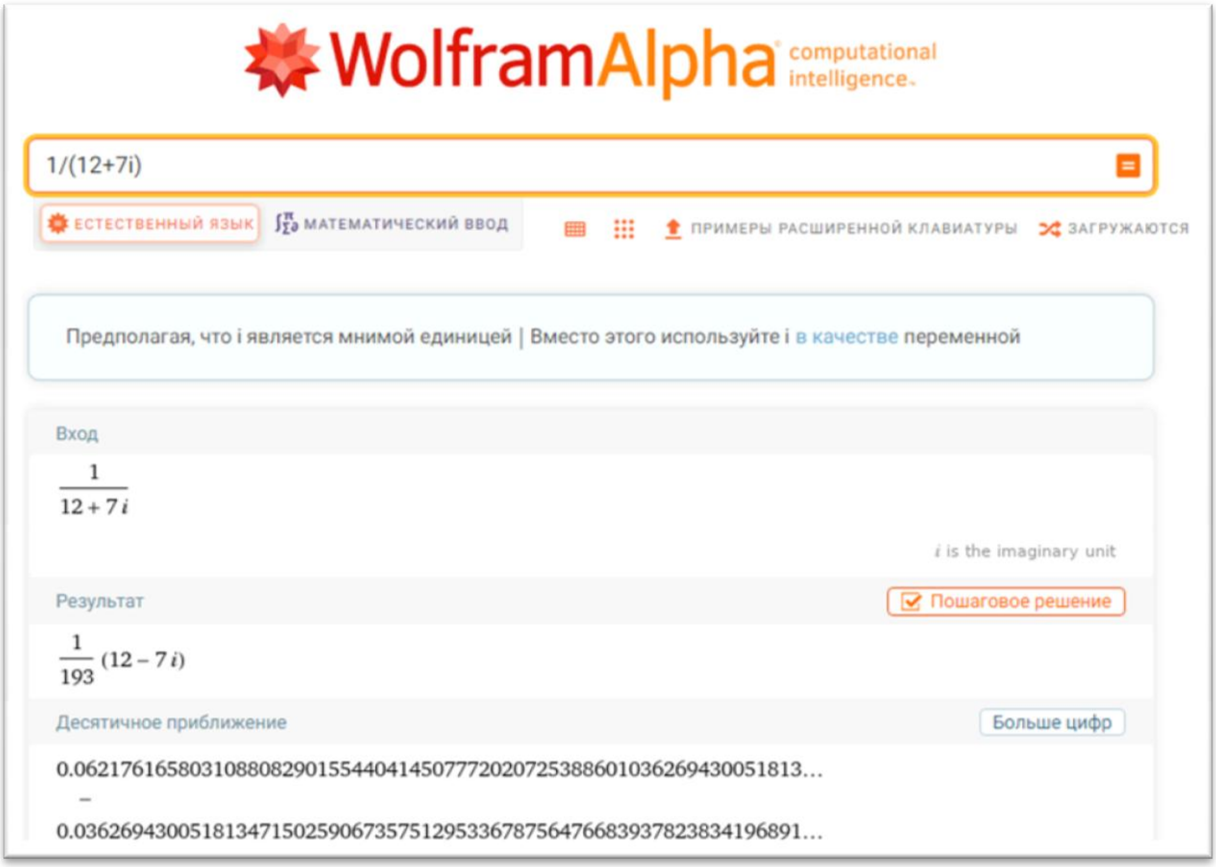

Рисунок 9 – Ввод данных и решение примера 2

Также, $Wolfram\ Alpha$ предлагает:

- десятичное приближение комплексного числа;
- альтернативные сложные формы;
- положение комплексного числа в комплексной плоскости;
- указывает полярные координаты;
- указывает минимальный многочлен.

Страницу с решением можно скачать.

Пример 3.

Вычислите: $\sqrt{i}$

В текстовую строку вносим «$sqrt$(i)» и нажимаем кнопку «$ENTER$», расположенную на клавиатуре, получаем ответ (рисунок 10).

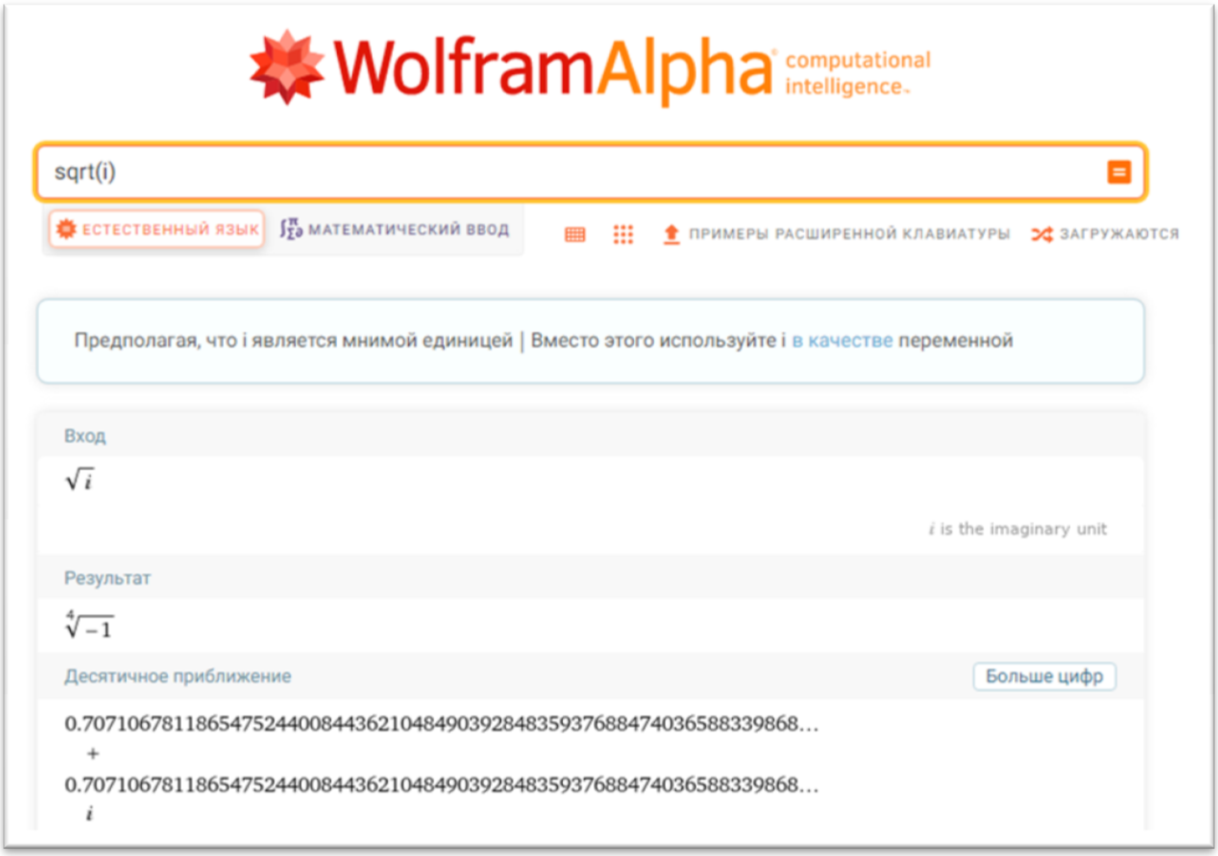

Рисунок 10 – Ввод данных и решение примера 3

Таким образом, $Wolfram\,Alpha$ дает не только ответ на запрос, но и показывает поэтапное выполнение решения. На факультативном курсе «Арифметика комплексных чисел» можно отвести время для ознакомления с особенностями работы в данной системы, вводом данных.

2.4 Методические рекомендации по изучению факультативного курса «Арифметика комплексных чисел»

В данном параграфе представлено поурочное планирование занятий факультативного курса «Арифметика комплексных чисел». Данный методический материал может успешно применяться педагогами при рассмотрении темы «Комплексные числа» на факультативных занятиях.

Занятие 1

Тема: «Введение»

Цель:

- знакомство со структурой факультативного курса;

- знакомство с новым классом математических объектов – «комплексные числа».

Тип занятия: лекция.

Число – одно из основных понятий математики. Оно занимает важное место в жизни человека. Числа окружают нас повсюду.

Вопрос: Известный математик Пифагор утверждал, что «мир построен на силе чисел». Согласны ли вы с его высказыванием или нет? Обоснуйте свой ответ.

Вопрос: С какими числами вы познакомились в школьном курсе математики?

(N, Z, Q, R ...)

Изучение чисел в школе основано на их историческом развитии. На рисунке 11 изображено развитие понятия числа.

Рисунок 11 – Развитие понятия числа

Как видим, самое большое множество, которое включает все ранее изученные числа – это множество действительных чисел. Ученые пришли к выводу, что для решения алгебраических уравнений ограничиваться только множеством действительных чисел недостаточно. Например, решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом во множестве действительных чисел является невозможным. Так обобщив понятие числа, учеными – математиками было введено некоторое множество, включающее действительные числа, и позволяющее выполнять все алгебраические операции. Такое множество получило название «множество комплексных чисел» и оно обозначается буквой C.

Изучению множества комплексных чисел будет посвящен данный факультативный курс. Факультативный курс «Арифметика комплексных чисел» рассматривает следующие темы: (рисунок 12).

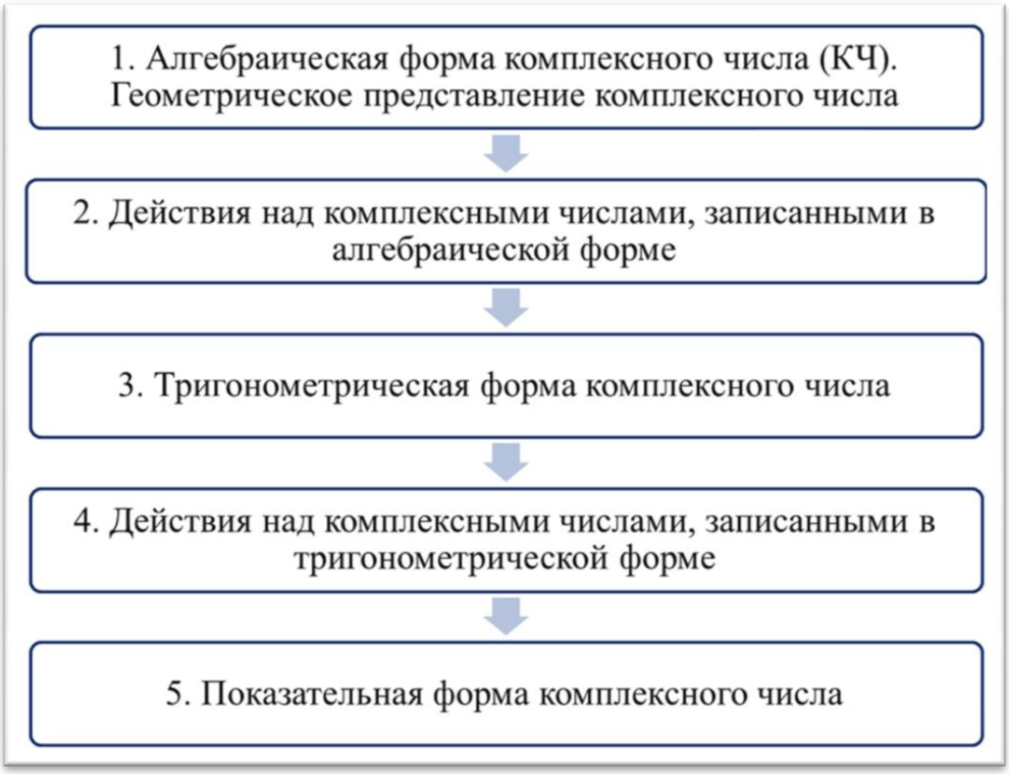

Рисунок 12 – Темы факультативного курса

На прохождение факультативного курса предусмотрено 24 часа, из них 6 часов отводится изучению теоретической части курса, 15 часов – на практические занятия, 3 часа – на проведение проверочных работ.

И так, комплексные числа, с которыми мы познакомимся на факультативном курсе, представляют собой упорядоченную пару действительных чисел $(a\,,b)$. Под словом «упорядоченная» понимается, что в паре строго определено, какое число первое, а какое – второе.

Два комплексных числа $(a;\ b)$ и $(c;\ d)$ равны, если $a = c\,,\, b = d$

На множестве С операции сложения и умножения выполняются по правилам (рисунок 13):

$$(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$$

$$(a;b)*(c;d)=(ac-bd;ad+bc)$$

Рисунок 13 – Сложение и умножение комплексных чисел

Умножение и деление обладают свойствами (рисунок 14):

1) ассоциативность

- $(a;b)+((c;d)+(e;f))=((a;c)+(b;d))+(e;f)$
- $(a;b)*((c;d)*(e;f))=((a;c)*(b;d))*(e;f)$

2) коммутативность

- $(a;b)+(c;d)=(\mathrm{c};d)+(a;b)$
- $(a;b)*(c;d)=(\mathrm{c};d)*(a;b)$

3) дистрибутивность

- $(a;b)*((c;d)+(e;f))=((a;b)*(c;d))+(a;b)*(e;f)$

Рисунок 14 – Свойства сложения и умножения комплексных чисел

Обратным (сопряженным) числом к комплексному числу $(a;\ b)$ является число $(x;\ y)$, для которого верно равенство: $(a;\ b)(x;\ y) = (1; 0)$. Обратное число принято обозначать $(a;\ b)^{-1}$.

Частным, полученным в результате деления двух комплексных чисел (c; d) и $(a;\ b)$ является произведение (c; d) на число сопряженное числу $(a;\ b)$:

$$(c;\ d) / (a;\ b) = (c;\ d) * (a;\ b)^{-1}$$

Задание: докажите коммутативность операции сложения и умножения комплексных чисел.

Комплексные числа могут быть представлены в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. На следующих занятиях данные формы записи комплексных чисел будут рассмотрены более подробно.

Занятие 2

Тема: «Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическое представление комплексного числа»

Цель:

- знакомство с алгебраической формой комплексного числа

- рассмотрение геометрического представления комплексного числа;

Тип занятия: лекция

Алгебраическая форма комплексного числа

Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид: $z = a + bi$, где

z – комплексное число;

a, b – действительные числа;

i – мнимая единица, которая равна $i = \sqrt{-1}$, или $i^2 = -1$.

Число a является действительной частью числа z, b – мнимой частью числа z.

Действительная часть числа z (a) обозначается - $Re\, z$, мнимая часть числа z (a) - $Im\, z$.

Если $a = 0$, то имеем следующее выражение: $z = bi$.

Если $b = 0$, то имеем следующее выражение: $z = a$. В данном случае комплексное число представлено только действительным числом. Таким образом, действительные числа являются частным случаем комплексного числа: $R \subset C$.

Комплексные числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ равны, если у них равны действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Сопряженным к комплексному числу $z = a + bi$ является число $\bar{z} = a - ib$.

Геометрическое представление комплексных чисел

Комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить в плоскости Oxy точкой А $(a; b)$. И наоборот, каждой точке А $(a; b)$ плоскости соответствует комплексное число $z = a + bi$. Комплексная плоскость – это плоскость на которой изображаются комплексные числа. На рисунке 15 изображено геометрическое представление комплексного числа А $(a; b)$.

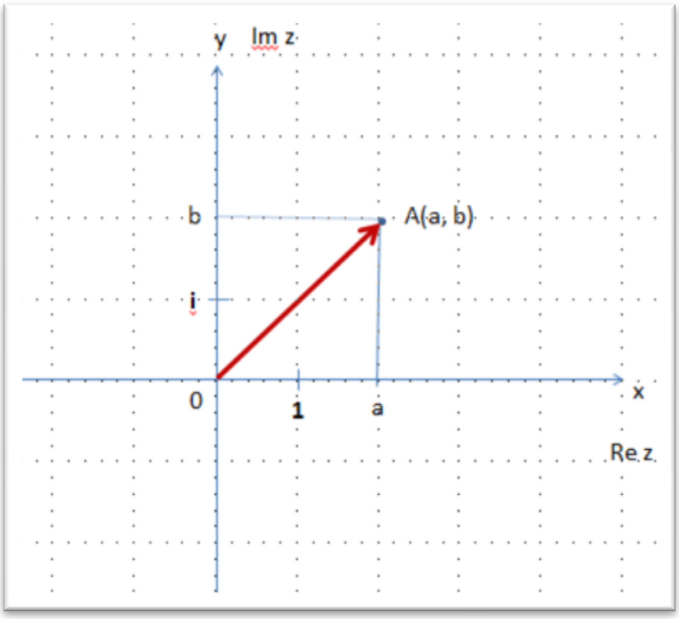

Рисунок 15 – Геометрическое представление комплексного числа

На оси Ox лежат точки, соответствующие действительным числам; на оси Oy – соответствующие мнимым числам. Поэтому, изображая комплексные числа, ось Ox называют действительной осью, ось Oy – мнимой осью.

Соединив точку А $(a; b)$ с началом координат, получаем вектор $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (рисунок 15). $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ – радиус – вектор точки А.

Рассмотрим комплексные числа, которые отличны друг от друга знаком мнимой части (рисунок 16). Если дано число $\mathrm{A} = (a, b)$, то сопряженным ему будет число $\overline{\mathrm{A}} = (a, -b)$.

Модуль комплексного числа – это длина вектора $\overrightarrow{(\mathrm{OA})}$ (рисунок 16). Модуль комплексного числа $a + bi$ обозначают следующим образом: $|a + bi|$;

- r, он равняется $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

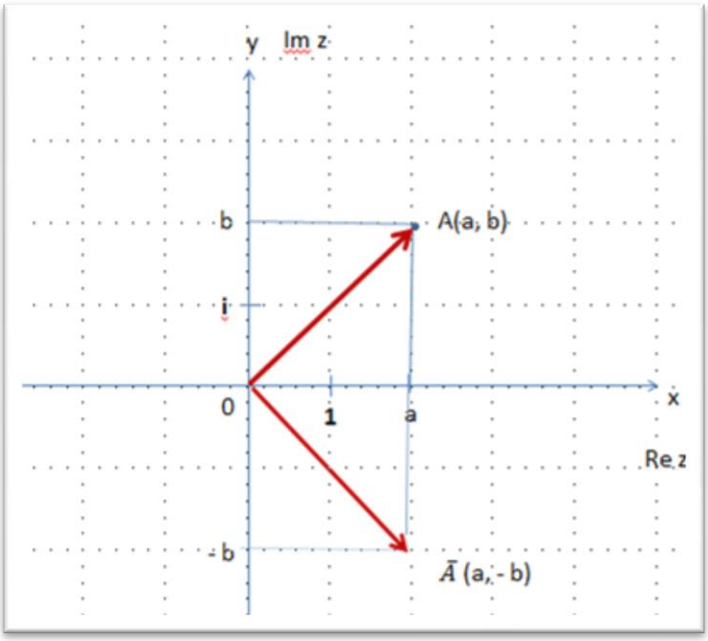

Рисунок 16 – Сопряженные комплексные числа

Задание № 1

Постройте на комплексной плоскости числа:

а) $z_1 = 2 + 2i$,   б) $z_2 = 2i$,   в) $z_3 = 2$.

Задание № 2

Найдите комплексно-сопряженное число для числа $z = 2 + 4i$. Постройте их на комплексной плоскости.

Занятие 3

Тема: «Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическое представление комплексного числа»

Цель:

- научиться представлять комплексные числа в комплексной плоскости;

- научиться записывать точки, изображенные на комплексной плоскости, в виде комплексных чисел;

- научиться находить модуль комплексного числа.

Тип занятия: урок-практикум

Задание № 1

Изобразите комплексные числа в комплексной плоскости:

а) $z_1 = -3 + i$,

б) $z_2 = 4$,

в) $z_3 = -2i$,

г) $z_4 = 0$,

д) $z_5 = -3$,

е) $z_6 = i$,

ж) $z_7 = 3i$,

з) $z_8 = 4i$,

и) $z_9 = 2 + 3i$,

к) $z_{10} = -4 + i$.

Задание № 2

Представьте изображенные на рисунке 17 комплексные числа в виде $a + bi$ и найдите их модули.

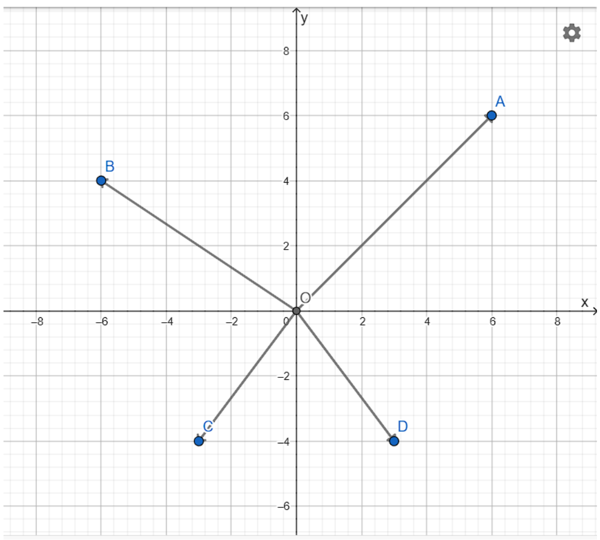

Рисунок 17 – К заданию № 2

Задание № 3

Найдите на комплексной плоскости точку, соответствующую комплексному числу:

а) 2,

б) -2,

в) i,

г) $-i$,

д) $2 + i$,

е) $2 - i$,

ж) $-2 + i$,

з) $-2 - i$.

Задание № 4

Какому комплексному числу соответствует точка комплексной плоскости:

а) $(1;\ 0)$, д) $(-2, 4)$,

б) $(0;\ 1)$, е) $(4;\ -2)$,

в) $(-1, 0)$, ж) $(1;\ 1)$,

г) $(0, -1)$, з) $(-1;\ 1)$.

Задание № 5

Найдите комплексно - сопряженные числа и постройте их на комплексной плоскости.

а) $z_1 = 3 - 2i$, в) $z_3 = 5\,i$,

б) $z_2 = 2 + i$, г) $z_4 = i$.

Занятие 4

Тема: «Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме»

Цель: знакомство с выполнением сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, возведением в степень и извлечением квадратного корня из комплексных чисел

Тип занятия: лекция

Выполнение операций с комплексными числами в алгебраической форме (сложение, вычитание, умножение, деление)

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то сумма чисел z_1 и z_2 равна

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \qquad (1)$$

Пример 1.

Найдите сумму комплексных чисел $z_1 = 2 + 7i$ и $z_2 = 3 + 5i$.

Решение:

пусть $z = z_1 + z_2$, тогда получим

$z = z_1 + z_2 = (2 + 3) + (7 + 5)\, i = 5 + 12\, i$.

Пример 2.

Найдите сумму комплексных чисел $z_1 = 4 + 6i$ и $z_2 = 2 - 11i$.

Решение:

пусть $z = z_1 + \ z_2$, тогда получим $z = z_1 + \ z_2 = (4 \ + \ 2) \ + \ (6 - 11)\, i =$
$= 6 - \ 5\, i.$

Если $z_1 = a_1 \ + b_1 i$ и $z_2 = a_2 \ + b_2 i$, то разность чисел z_1 и z_2 равна

$$z_1 - \ z_2 = (a_1 \ - \ a_2\,) + (b_1 - \ b_2)\, i \tag{2}$$

Пример 3.

Найдите разность комплексных чисел $z_1 = 4 + 8i$ и $z_2 = 2 + 7i.$

Решение:

пусть $z = z_1 - \ z_2$, тогда получим

$z = z_1 - \ z_2 = (4 - \ 2) \ + \ (8 - 7)\, i = 2 \ + \ \ i.$

Пример 4.

Найдите разность комплексных чисел $z_1 = 8 + 9i$ и $z_2 = 4 - \ 5i.$

Решение:

пусть $z = z_1 - \ z_2$, тогда получим

$z = z_1 - \ z_2 = (8 - \ 4) \ + \ (9 - (-5))\, i = 4 \ + \ 14\, i.$

Если $z_1 = a_1 \ + b_1 i$ и $z_2 = a_2 \ + b_2 i$, то произведение чисел z_1 и z_2 равно

$$z_1\, z_2 = (a_1\, a_2 \ - \ b_1\, b_2\,) + (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\, i \tag{3}$$

Пример 5.

Найдите произведение комплексных чисел $z_1 = 3 + 5i$ и $z_2 = 4 + 4i.$

Решение:

пусть $z = z_1\, z_2$, тогда получим

$z = z_1 z_2 = (3 * 4 - \ 5 * 4) \ + \ (3 * 4 + 4 * 5)\, i = (12 - 20) + (12 + 20)i =$
$= -8 \ + \ 32i = 32i - 8.$

Пример 6.

Найдите произведение комплексных чисел $z_1 = 4 + 8i$ и $z_2 = 6 - 2i$.

Решение:

пусть $z = z_1\, z_2$, тогда получим

$z = z_1 z_2 = (4 * 6 - 8 * (-2)) + (4 * (-2) + 6 * 8)\, i = (24 + 16) + (-8 + +48)i = 40 + 40i.$

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то для того чтобы найти частное чисел z_1 и z_2 необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю число:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}, (z_2 \neq 0) \qquad (4)$$

Пример 7.

Найдите частное комплексных чисел $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 2 + 6i$.

Решение:

пусть$z = \frac{z_1}{z_2}$, тогда получим

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+4i)(2-6i)}{2^2 + 6^2} = \frac{(3*2-4*(-6))+(3*(-6)+2*4)i}{4+36} = \frac{(6+24)+(-18+8)i}{40} = \frac{30+(-10)i}{40} = \frac{10*(3-i)}{40} = \frac{3-i}{4} = \frac{3}{4} - \frac{i}{4}.$

Пример 8.

Найдите частное комплексных чисел $z_1 = 4 + 3i$ и $z_2 = 2 - 5i$.

Решение:

пусть $z = \frac{z_1}{z_2}$, тогда получим

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(4+3i)(2-(-5)i)}{2^2 + (-5)^2} = \frac{(4*2-3*(-5)) + (4*(-5)+2*3)i}{4+25} = \frac{(8+15)+(-20+6)i}{29} = \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14i}{29}.$

Возведение в степень комплексных чисел

Возведение в степень комплексных чисел определяется следующим образом:

$$z^n = \underbrace{z + z + z + \cdots + z}_{n \text{ раз}}.$$

Комплексная степень обладает такими же свойствами, как и действительная, поэтому имеем следующее:

$$z^n + z^m = z^{n+m} \tag{5}$$

$$(z^n)^{\mathrm{m}} = z^{nm} \tag{6}$$

$$(z_1 * z_2)^{\mathrm{n}} = {z_1}^{\mathrm{n}} * {z_2}^{\mathrm{n}} \tag{7}$$

Пример 9.

Вычислите: i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2}.

Решение:

$i^2 = -1,$

$i^3 = i^2 * i = -1 * i = -i,$

$i^4 = i^2 * i^2 = (-1) * (-1) = 1,$

$i^5 = i^2 * i^2 i = (-1) * (-1) * i = i,$

$i^6 = i^2 * i^2 * i^2 = (-1) * (-1) * (-1) = -1,$

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 * i}{i * i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i,$

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1.$

Вывод:

$i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, где n – натуральные числа

Пример 10.

Найдите i^{59}.

Решение:

При делении числа 59 на 4 имеем $59 - 4 = 14$ (ост. 3).

Значит 59 = 4*14 + 3.

Следовательно, $i^{59} = i^{4*14+3} = (i^4)^{14+3} = 1^{14} * i^3 = i^3 = -i$.

Пример 11.

Даны комплексно-сопряженные числа: $z = 1 + i$, $\bar{z} = 1 - i$.

Найдите: $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$, $z * \bar{z}$.

Решение:

$z + \bar{z} = (1 + i) + (1 - i) = 2$,

$z - \bar{z} = (1 - i) - (1 - i) = (1 - 1) - (i + i) = 0 - 2i = 2i$,

$z * \bar{z} = (1 + i) * (1 - i) = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$ $(a = 1, b = 1)$.

Пример 12.

Найдите x и y из уравнения $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$, где x, y ∈ R.

Решение:

Представим выражение $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y$ в виде комплексного числа, для этого раскроем скобки и выполним необходимые вычисления:

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = x + 2ix + 3y - 5iy = (x + 3y) + (2x - 5y)i.$$

Используя условие равенства комплексных чисел, можно записать

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}.$$

Решим, полученную систему уравнений. Для этого из первого уравнения найдем x и подставим полученное значение во второе уравнение и решим его.

$x + 3y = 1$,

$x = 1 - 3y$,

$2(1 - 3y) - 5y = -3$,

$2 - 6y - 5y = -3$,

$-6y - 5y = -3 - 2$,

$-11y = -5$,

$y = \frac{5}{11}$.

Теперь найдем x. Для этого в первое уравнение подставим значение y и решим уравнение.

$x + 3 * \frac{5}{11} = 1$,

$x + \frac{15}{11} = 1,$

$x = 1 - \frac{15}{11},$

$x = \frac{11}{11} - \frac{15}{11} = -\frac{4}{11}.$

Ответ: $x = -\frac{4}{11}$; $y = \frac{5}{11}$.

Занятия 5-8

Тема: «Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, решение задач»

Цель: закрепить умения и навыки выполнять сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, возводить в степень комплексные числа.

Тип занятия: урок-практикум.

Задание № 1

Выполните действия:

а) $(3 + i) + (-3 - 8i)$,

б) $(5 - 4i) + (7 + 4i)$,

в) $(-6 + 2i) + (-6 - 2i)$,

г) $(0{,}2 + 0{,}1i) + (0{,}8 - 1{,}1i)$,

д) $(2 - 3i) + (5 + 6i) + (-3 - 4i)$,

е) $(7 + i) - (9 + 2i)$,

ж) $(-2 - 5i) - (2 + 5i)$,

з) $(1 - i) - (7 - 3i) - (2 + i) + (6 - 2i)$.

Задание № 2

Выполните действия:

а) $(5 - 3i)2i$,

б) $(3 + 4i)(3 - 4i)$,

в) $(5 + 3i)(2 - 5i)$,

г) $(-2 - i)(1 + i)$,

д) $(0{,}2 - 0{,}3i)(0{,}5 + 0{,}4i)$.

Задание № 3

Выполните сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел:

а) $z_1 = 2 + 5i,\ z_2 = 4 + i$.

б) $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 2 - 2i$.

в) $z_1 = 2 \ - 4i, \ z_2 = 3 \ + i$.

г) $z_1 = 5 \ - 5i, \ z_2 = 4 \ + 4i.$

Задание № 4

Выполните действия:

а) $\frac{1-i}{1+i}$,

б) $\frac{3-2i}{1+3i}$,

в) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$,

г) $\frac{(1-2i)*(2+i)}{3-2i}$,

д) $\frac{2+3i}{(4+i)*(2-2i)}$,

ж) $\frac{(3+2i)*(2-i)}{(2+3i)*(1+i)}$.

Задание № 5

Найдите:

а)i^{62}, б) i^{83}, в) i^{22}, г) i^{93}, д) i^{108}.

Задание № 6

Выполните действия:

а) $(1-i)^3$,

б) $i^{40} - i^{21}$,

в) i^3-i^{100},

г) $i^{12} + i(1-i)$,

д) $i^5 * (1-i^3)$,

е) $i * (1 \ - \ i^{23})$,

ж) $\frac{i^3 + i^{16}}{2+i^{27}}$,

з) $\frac{i^8 - 3*i^{11}}{1+2*i^{19}}$.

Задание № 7

Вычислите:

а) $\frac{2+i}{3+4i}$,

б) $\frac{1+4i}{2+2i}$,

в) $(11+5i) * (6+3i)$,

г) (10 + 2i) * (8 – 4i),

д) $\frac{2i^4 + 3i^5}{(2+3i)(8+i)} + \frac{(2-i)^4}{(3-4i)(8-i)} * 6$,

е) $\frac{2i^{16}-3i^9}{(2-3i)^2} + \frac{(1+2i)^4}{(3-4i)(24-7i)} + \frac{93-36i}{325}$.

Задание № 8

Вычислите число z^{-1}, сопряженное к числу:

а) $z \ = \ 3 - \ i$,

в) $z \ = \ 6 \ + \ 4i$,

б) $z = 5 + 8i$, г) $z = 4 - 3i$.

Задание № 9

Даны числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$, найдите:

а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 - z_2$, в) $z_1 * z_2$, г) z_1 / z_2.

Задание № 10

Дано: комплексное число $z = 2 + i$. Найдите z^n, если $n = 2, 3, 4$.

Задание № 11

Найдите действительные числа x и у из условия равенства двух комплексных чисел:

а) $9 + 2xi + 4yi = 10i + 5x - 6y$,

б) $(1 + i)x + (2 + i)y = 3i + 1$.

Задание № 12

Разложите на комплексные множители:

а) $m^2 + n^2$, б) $4n^2 + 9m^2$, в) $m + n$, г) $\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{16}$.

Задание № 13

При каких действительных значениях a число z является:

а) действительным,

б) чисто мнимым,

если $z = (2 - ai)^3 - (3 - ai)^2 + 5 + a(1 - a^2 i)$.

Задание № 14

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5z_1 - 3\bar{z}_2 = -9 + 5i, \\ 4\bar{z}_1 + z_2 = 3 - 4i. \end{cases}$$

Задание № 15

Решите уравнение:

а) $x^2 - 6x + 18 = 0$, г) $x^2 + 18 = 0$,

б) $x^2 + 4x + 5 = 0$, д) $x^2 - 6x + 25 = 0$,

в) $5x^2 - 4x + 1 = 0$, е) $x^2 - 10x + 41 = 0$.

Задание № 16

Составьте квадратное уравнение по его корням:

а) $x_1 = \frac{1-3*i}{2}$; $x_2 = \frac{1+3*i}{2}$.

б) $x_1 = -3 + 2 * i$; $x_2 = -3 - 2 * i$.

в) $x_1 = \frac{2}{5} - \frac{3*i}{5}$; $x_2 = \frac{2}{5} + \frac{3*i}{5}$.

г) $x_1 = -\frac{3}{4} + \frac{7*i}{4}$; $x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{7*i}{4}$.

Занятие 9

Тема: «Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, решение задач»

Цель: обобщение и систематизация знаний

Тип занятия: самостоятельная проверочная работа

Самостоятельная проверочная работа № 1

1) Найдите и изобразите на комплексной плоскости комплексно-сопряженное число к числу а) $z = 9 - 6i$; б) $z = -4 + 2i$.

2) Найдите модуль числа $z = -8 - 2i$.

3) Найдите: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 * z_2$; z_1 / z_2 если $z_1 = 5 + 6i$ и $z_2 = -3 - 2i$.

4) Выполните действия: $\frac{3i^{24}-5i^{11}}{2i^{40}+i^{23}}$.

5) Найдите действительные числа x и у из условия равенства двух комплексных чисел: $(3 + i) * x - 2 * (1 + 4i) * y = -2 - 4i$.

6) Решите уравнение: $8x^2 - 12x + 5 = 0$.

7) Составьте квадратное уравнение по его корням:

$x_1 = -0,6 - 0,4 * i$; $x_2 = -0,6 + 0,4 * i$.

Занятие 10

Тема: «Тригонометрическая форма комплексного числа»

Цель: Знакомство с тригонометрической формой записи комплексного числа, аргументом комплексного числа

Тип занятия: лекция

Рассматривая геометрическую интерпретацию комплексного числа, мы говорили, что комплексное число $z = a + bi$ $(z > 0)$ на комплексной плоскости изображается радиус-вектором $\overrightarrow{OA}$, длина которого есть модуль комплексного числа $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргумент комплексного числа – это угол φ между положительным направлением Ox и вектором $\overrightarrow{OA}$ (рисунок 16). Угол φ принято отсчитывать от оси Ox к вектору $\overrightarrow{OA}$.

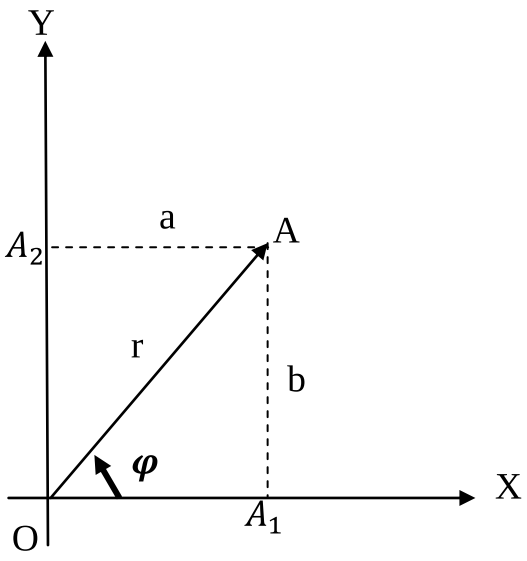

Рисунок 18 – Аргумент комплексного числа

Если комплексное число $z = 0$, то вектор $\overrightarrow{OA}$ обращается в точку (ноль - вектор). Следовательно, число 0 (ноль) не имеет аргумента. Каждое комплексное число $(z \neq 0)$ имеет бесконечное множество значений аргумента, которые друг от друга на целое число оборотов (т.е. на величину $2\pi k,$ где $k -$ это любое целое число).

Приведем пример. Аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$ являются углы вида: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$.

Значение аргумента, взятое в пределах первой окружности (от 0 до 2π), называется главным.

Приведем пример. Для комплексного числа $z = 2 + 2i$ главное значение аргумента будет равно $\frac{\pi}{4}$. Для комплексного числа $z = -2 + 2i$ главное значение аргумента будет равняться $\frac{3\pi}{4}$. Для чисел $3, -3, i, -i$ главные значения аргумента будут равняться соответственно $0,\ \pi,\ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Согласно рисунку 16, имеем, что $a = r\ \cos\varphi$, $b = r\ \sin\varphi$.

Тогда комплексное число можно записать следующим образом:

$$z = a + bi = r\ \cos\varphi + i\, r\ \sin\varphi = \mathrm{r}(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$$

Запись комплексного числа $z = \mathrm{r}(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$считается тригонометрической формой комплексного числа.

Для определения значения аргумента φ применяют следующие формулы: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ при $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

Представьте в тригонометрической форме число $-1 + i\sqrt{3}$.

Решение:

$a = -1, b = \sqrt{3}$.

Используя формулу $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, имеем следующее выражение для нашего случая: $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$,

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$; $(\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2})$,

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то φ следует взять $\frac{2\pi}{3}$.

Значит, комплексное число можно записать в тригонометрической форме следующим образом:

$-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3})$.

Пример 2.

Представьте в тригонометрической форме число $-1 - i$.

Решение:

$a = -1, b = 1, r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2},$

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$

$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}},$

Значит $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Комплексное число будет иметь следующий вид:

$-1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4})$.

Пример 3.

Представьте в тригонометрической форме число 1 .

Решение:

$r = 1, \quad \varphi = 0.$

Следовательно, $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ или $1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k$.

Занятие 11

Тема: «Тригонометрическая форма комплексного числа»

Цель: Научиться переводить комплексное число, представленное в алгебраической форме, в тригонометрическую форму и наоборот.

Тип занятия: урок практикум

Задание № 1

Для данных комплексных чисел необходимо найти их модуль и аргумент:

а) $-5 + 8i$,

б) $10 - 2i$,

в) $1 - 2i$,

г) $3 + 2i$,

д) $11 + i$,

е) $-4 - 3i$,

ж) 3,

з) $7i$,

и) $6 + 9i$,

к) $-2i$.

Задание № 2

Перед вами алгебраическая форма комплексного числа, необходимо перевести ее в тригонометрическую форму числа:

а) $-1 + 3i$,

е) $-1 - i$,

б) $4-\ 3i$,

в) $1-\ 3i$,

г) $3\ +\ 3i$,

д) $1-\ i$,

ж) $-11\ +\ i$,

з) $1\ +\ i$,

и) $3\ +\ 9i$,

к) $-2i$.

Задание № 3

Представьте комплексные числа в алгебраической форме

а) $(\cos\frac{5\pi}{3}+\ i\ \sin\frac{5\pi}{3})$,

б) $5(\cos\pi+\ i\ \sin\pi)$,

в) $0{,}5(\cos\frac{\pi}{2}+\ i\ \sin\frac{\pi}{2})$,

г) $6(\cos\frac{5\pi}{4}+\ i\ \sin\frac{5\pi}{4})$,

д) $4(\cos\frac{2\pi}{3}+\ i\ \sin\frac{2\pi}{3})$,

е) $3(\cos\frac{5\pi}{6}+\ i\ \sin\frac{5\pi}{6})$.

Задание № 4

Какому комплексному числу, записанному в алгебраической форме, соответствует тригонометрическая форма $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+\ i\ \sin\frac{7\pi}{4})$:

а) $-1-i$,

б) $1+i$,

в) $1-i$,

г) $-1+i$.

Задание № 5

Какому комплексному числу, записанному в алгебраической форме, соответствует тригонометрическая форма $2(\cos\frac{3\pi}{2}+\ i\ \sin\frac{3\pi}{2})$:

а) $-1-2i$,

б) $-2i$,

в) $2i$,

г) -1.

Задание № 6

Какому комплексному числу, записанному в тригонометрической форме, соответствует алгебраическая форма $\sqrt{3}-i$:

а) $1(\cos\frac{11\pi}{6}+\ i\ \sin\frac{11\pi}{6})$,

б) $-\ 2(\cos\frac{11\pi}{6}+\ i\ \sin\frac{11\pi}{6})$,

в) $-\ 1(\cos\frac{11\pi}{6}+\ i\ \sin\frac{11\pi}{6})$,

г) $2(\cos\frac{11\pi}{6}+\ i\ \sin\frac{11\pi}{6})$.

Задание № 7

Какому комплексному числу, записанному в тригонометрической форме, соответствует алгебраическая форма $1 - i\sqrt{3}$:

а) $4(\cos\frac{7\pi}{5} + i\ \sin\frac{7\pi}{5})$,

б) $-2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\ \sin\frac{5\pi}{3})$,

в) $2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\ \sin\frac{5\pi}{3})$,

г) $-4(\cos\frac{7\pi}{5} + i\ \sin\frac{7\pi}{5})$.

Занятие 12

Тема: «Действия с числами, записанными в тригонометрической форме»

Цель: Знакомство с действиями с комплексными числами, записанными в тригонометрической форме

Тип занятия: лекция

Даны два комплексных числа:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2)$.

Найдем $z_1 * z_2$:

$z_1 * z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1) * r_2(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) = r_1r_2 * (\cos\varphi_1 +$
$+i\ \sin\varphi_1) * (\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) = r_1r_2 * (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_1\ \cos\varphi_2 +$
$+i\ \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1r_2 * ((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) +$
$+ i\ (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2\cos\varphi_1) = r_1r_2 * (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ (\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Получаем, что:

$$z_1 * z_2 = r_1r_2 * (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ (\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \qquad (1)$$

При умножении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, их модули переумножаются, а аргументы складываются.

Пример 1.

Найдите произведение чисел z_1 и z_2, если $z_1 = 2(\cos 60^\circ + i\ \sin 60^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 120^\circ + i\ \sin 120^\circ)$.

Решение:

Найдем произведение чисел по формуле (1):

$z_1 * z_2 = 2 * 3\ (\cos(60^\circ + \ 120^\circ) + i\ \sin(60^\circ + \ 120^\circ)) = 6(\cos 180^\circ + i\ \sin 180^\circ)$=- 6

Выполним деление двух комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = \ r_1(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1)$ и $z_2 = \ r_2(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2)$,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1)\ (\cos\varphi_2 - i\ \sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\ \sin\varphi_2)} = \ \frac{r_1}{r_2} * \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$

$= \frac{r_1}{r_2} * \ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.

$$\frac{z_1}{z_2} \ = \frac{r_1}{r_2} * \ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (2)$$

Вывод: Чтобы найти частное двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, нужно модули разделить, а аргументы вычесть.

Пример 2.

Дано: $z_1 = 3(\cos 30^\circ + i\ \sin 30^\circ)$, $z_2 = \ 2(\cos 60^\circ + i\ \sin 60^\circ)$.

Найти: $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение:

$\frac{z_1}{z_2} = \ \frac{3(\cos 30^\circ + i\ \sin 30^\circ)}{2(\cos 60^\circ + i\ \sin 60^\circ)} = 1{,}5\ (\cos(30^\circ - 60^\circ) + i\ \sin(30^\circ - 60^\circ)) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i.$

Возведение комплексного числа $z\ = \mathrm{r}(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$ в натуральную степень n рассматривается как n – кратное умножение z на самого себя:

$z^n = zz \ldots z = rr \ldots r(\cos(\varphi + \varphi + \cdots + \varphi) + i\ \sin(\varphi + \varphi + \cdots + \varphi)$.

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\ \sin n\varphi) \qquad (3)$$

Вывод: чтобы возвести комплексное число в степень n, нужно модуль этого числа возвести в степень n, а аргумент умножить на n.

Формулу (3) можно записать следующим образом:

$$(\mathrm{r}(\cos\varphi + i\ \sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\ \sin n\varphi) \qquad (4)$$

Данная формула называется формулой Муавра, она имеет широкое применение в математике. Рассморим частный случай, вытекающий из формулы (4). Если $r = 0$, то получаем, что $(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\ \sin n\varphi$.

Извлечение корня из комплексного числа

Корнем из n- й степени ($n \in N\ n \geq 2$) из числа z называют любое комплексное число u, для которого справедливо $u^n = \mathrm{z}$.

Результат извлечения корня n- й степени из числа z обозначается следующим образом: $\sqrt[n]{\mathrm{z}}$.

Теорема: Для любого числа z ($z \neq 0$) извлечение корня n- й степени ($n \geq 2$) из числа z всегда возможно и имеет n различных значений.

Следовательно:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\ \sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \qquad (5)$$

$k = 0, 1, 2 \ldots n-1$.

Пример 3.

Найдите все значения $\sqrt[5]{1}$.

Решение:

Так как $1 = 1(\cos 0 + i\ \sin 0)$, то, воспользовавшись формулой (5) получим:

$\sqrt[5]{1(\cos 0 + i\ \sin 0)} = 1(\cos\frac{0+2\pi k}{5} + i\ \sin\frac{0+2\pi k}{5})$,

$k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Получим:

$k = 0,\ z_1 = 0$;

$k = 1, z_2 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\ \sin\frac{2\pi}{5}$;

$k = 2, z_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\ \sin\frac{4\pi}{5}$;

$k = 3, z_4 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\ \sin\frac{6\pi}{5}$;

$k = 1, z_5 = \cos\frac{10\pi}{5} + i\ \sin\frac{10\pi}{5}$.

Пример 4.

Вычислить $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{60}$.

Решение:

Представим числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ и $z_{12} = 1 - i$ в тригонометрической форме, получим, что $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3})$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4})$, тогда

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{60} = \frac{2^{60}(cos\frac{60\pi}{3} + isin\frac{60\pi}{3})}{\left(\sqrt{2}\right)^{60}(cos\frac{60\pi}{4} + isin\frac{60\pi}{4})} = 2^{30}\,\frac{1 + i * 0}{-1 + i * 0} = -2^{30}\,.$$

Ответ: -2^{30}.

Занятия 13-16

Тема: «Действия с числами, записанными в тригонометрической форме»

Цель: Закрепить умения и навыки выполнять умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, возводить числа в степень и извлекать корень из комплексных чисел

Тип занятия: урок-практикум

Задание № 1

Дано: $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3})$ и $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Найдите: а) $z_1 z_2$, б) $\frac{z_1}{z_2}$, в) ${z_1}^3$, г) $\sqrt{z_1}$.

Задание № 2

Докажите, что $\left(1 + i\sqrt{3}\right) * (1 + i) * \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

Задание № 3

Вычислите: $(1 + i)^6$.

Задание № 4

Извлеките корни:

а) $\sqrt[3]{i}$,

б) $\sqrt[3]{(2-2i)}$,

в) $\sqrt[4]{-4}$,

г) $\sqrt[6]{1}$.

Задание № 5

Выполните действия:

а) $0{,}5*(\cos 215^{\circ}+i\ \sin 215^{\circ})*4*(\cos 208^{\circ}+i\ \sin 208^{\circ})$,

б) $2*(\cos 198^{\circ}+i\ \sin 198^{\circ})*0{,}8*(\cos 300^{\circ}+i\ \sin 300^{\circ})$,

в) $0{,}3*(\cos 118^{\circ}+i\ \sin 118^{\circ})*15*(\cos 282^{\circ}+i\ \sin 282^{\circ})$,

г) $2*\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\ \sin\frac{3\pi}{10}\right)*0{,}5*(\cos\frac{2\pi}{5}+i\ \sin\frac{2\pi}{5})$.

Задание № 6

Выполните действия:

а) $\frac{4*(\cos 208^{\circ}+i\ \sin 208^{\circ})}{16*(\cos 100^{\circ}+i\ \sin 100^{\circ})}$,

б) $\frac{18*(\cos 72^{\circ}+i\ \sin 72^{\circ})}{48*(\cos 203^{\circ}+i\ \sin 203^{\circ})}$,

в) $\frac{25*\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\ \sin\frac{7\pi}{15}\right)}{40*\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\ \sin\frac{2\pi}{5}\right)}$,

г) $\frac{35*\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\ \sin\frac{4\pi}{5}\right)}{15*\left(\cos\frac{7\pi}{20}+i\ \sin\frac{7\pi}{20}\right)}$.

Задание № 7

Возведите в степень:

а) $(2*(\cos 138^{\circ}+i\ \sin 138^{\circ})^4)$,

б) $\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\ \sin\frac{3\pi}{8}\right)^{16}$,

в) $0{,}1*\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\ \sin\frac{3\pi}{5}\right)^{5}$,

г) $\left(\cos\frac{9\pi}{20}+i\ \sin\frac{9\pi}{20}\right)^{40}$.

Задание № 8

Найдите произведение комплексных чисел u и v, если

$u=3\ (\cos 16+i\ \sin 16)$, v=2$(\cos 74+i\ \sin 74)$.

Занятие 17

Тема: «Действия с числами, записанными в тригонометрической форме»

Цель: обобщение и систематизация знаний

Тип занятия: самостоятельная проверочная работа

Самостоятельная проверочная работа № 2

1) Записать число $z = -3 + 3i$ в тригонометрической форме.

2) Записать комплексное число $z = 3 * (\cos\frac{5\pi}{6} + i * \sin\frac{5\pi}{6})$ в алгебраической форме.

3)Даны комплексные числа: $z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{5} + i\ \sin\frac{3\pi}{5})$ и $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4})$. Найдите: а) $z_1 z_2$, б) $\frac{z_1}{z_2}$, в) ${z_1}^4$, г) $\sqrt{z_2}$.

4) Дано число $z = 1 - i\sqrt{3}$. Выберите число, которое является тригонометрической формой числа z:

а) $-2 * (\cos\frac{5\pi}{3} + i * \sin\frac{5\pi}{3})$,

б) $2 * (\cos\frac{5\pi}{3} + i * \sin\frac{5\pi}{3})$,

в) $\frac{1}{2} * (\cos\frac{5\pi}{3} + i * \sin\frac{5\pi}{3})$,

г) $-\frac{1}{2} * (\cos\frac{5\pi}{3} + i * \sin\frac{5\pi}{3})$.

5) Вычислите:

а) $(\cos 60^{\circ} + i\ \sin 60^{\circ})^4$,

б) $(\cos 30^{\circ} + i\ \sin 30^{\circ})^6$,

в) $\sqrt[3]{1-i}$,

г) $\sqrt[6]{1}$.

Занятие 18

Тема: «Показательная форма комплексного числа»

Цель: знакомство с показательной формой комплексного числа, формулами Эйлерами, выполнением действий с числами в показательной форме

Тип занятия: лекция

Показательная форма комплексного числа имеет применение в различных разделах математики. В ее основе лежит формула Эйлера, которая устанавливает связь между тригонометрическими функциями действительного аргумента и показательной функцией мнимого аргумента:

Первая формула Эйлера:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\ \sin\varphi \qquad (1)$$

Вторая формула Эйлера:

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i \sin\varphi \qquad (2)$$

Пример 1.

Представьте в показательной форме комплексное число $z = 3 + 4i$.

Решение:

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Найдем аргумент φ:

Так как $tg\varphi = \frac{4}{3}$, то $\varphi = artg\frac{4}{3} \approx 0{,}93$. Значит $3 + 4i = 5e^{0{,}93i}$.

Пример 2.

Представьте в показательной форме комплексное число $z = \sqrt{3} - i$.

Решение:

$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.

Найдем аргумент φ из соотношения $tg\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, тогда $\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{-\pi}{6}i}$.

Пример 3.

Вычислите: e^{2+i}.

Решение:

$e^{2+i} = e^2 e^i = e^2(\cos 1 + i \sin 1) = e^2(0{,}540 + i * 0{,}842) = 7{,}39\ (0{,}54 + i * 0{,}84 \approx$
$\approx 3{,}99 + 6.22i$.

Следствия из формул Эйлера:

Сложим равенства:

$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$,

$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i \sin\varphi$.

Получим $e^{\varphi i} + e^{-\varphi i} = 2 \cos\varphi$.

Теперь вычтем из первого равенства втрое, получим: $e^{\varphi i} - e^{-\varphi i} = 2i \sin\varphi$.

Получаем следствия из формул Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}}{2} \quad (3)$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2} \quad (4)$$

Эти равенства также называются формулами Эйлера. Они принимаются за определение косинуса и синуса комплексного аргумента.

Пример 4.

Представьте комплексное число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в показательной форме.

Решение:

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$

$\varphi = argz = arct\frac{x}{y} = arct\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$

Теперь запишем показательную форму комплексного числа:

$z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$

Выполнение операция с числами в комплексной форме в показательной форме:

1) Умножение

Даны числа: $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$.

Найдем: $z_1 * z_2$.

$z_1 * z_2 = r_1e^{i\varphi_1} * r_2e^{i\varphi_2} = r_1 * r_2e^{i\varphi_1+i\varphi_2} = r_1 * r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Получим, что

$$z_1 * z_2 = r_1 * r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \quad (5)$$

Т.е., чтобы умножить два комплексных числа в показательной форме необходимо перемножить их модули, а аргументы сложить.

2) Деление

Даны числа: $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$.

Найдем: $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (6)$$

Т.е., чтобы разделить комплексное число в показательной форме, необходимо разделит их модули, а аргументы вычесть.

3) Возведение в степень

Дано число: $z = r * \ e^{i\varphi}$.

Найдем: z^n

$$z^n = \ r^n * e^{in\varphi} \quad (7)$$

Т. е, чтобы возвести в степень комплексное число в показательной форме, необходимо модуль числа возвести в n - степень, а аргумент умножить на n.

4) Извлечение корня n-й степени

Дано число: $z = r * \ e^{i\varphi}$.

Найдем $\sqrt[n]{z}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi - 2\pi k}{n}} \quad (8)$$

Где $k \ = \ 0, 1\ 2\ \dots\ n - 1.$

Пример 5.

Даны комплексные числа: $z_1 = \ 5e^{i\frac{2\pi}{3}}$ и $z_2 = \ 25e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Найдите: $z_1 * \ z_2, \frac{z_1}{z_2}, {z_1}^3, \sqrt{z_2}.$

Решение:

а) $z_1 * \ z_2$ находим по формуле (5) $z_1 * \ z_2 = 5e^{i\frac{2\pi}{3}} * 25e^{i\frac{\pi}{3}} = 125e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = 125e^{i\pi}$.

б) $\frac{z_1}{z_2}$ находим по формуле (6)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i\frac{2\pi}{3}}}{25e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{5}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{5}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

в) ${z_1}^3$ находим по формуле (7)

$$z_1^3 = 5^3 e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 3} = 125e^{i2\pi}.$$

г) $\sqrt{z_2}$ выполняем по формуле (8), получаем:

$$\sqrt{z} = \sqrt{25}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}}.$$

Параметры $k = 0, 1$.

При $k = 0$ $w_1 = \sqrt{25}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}} = 5e^{i\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 5e^{i\frac{\pi}{6}}$.

При $k = 0$ $w_1 = \sqrt{25}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}} = 5e^{i\frac{7\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 5e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Занятие 19-21

Тема: «Показательная форма комплексного числа»

Цель: Закрепление умений и навыков выполнения действий с комплексными числами в показательной форме

Тип занятия: практикум

Упражнение № 1

Представьте комплексные числа в показательной форме:

а) $2 + 2i$,

б) $1 + \sqrt{3}i$,

в) $-1 - \sqrt{3}i$,

г) $-1 + \sqrt{2}i$,

д) $3 - 2i$,

е) $1 + 3i$,

ж) $2 + 4i$,

з) $\sqrt[3]{i}$,

и) $\sqrt[3]{-1 + i}$.

Упражнение № 2

Представьте комплексные числа в алгебраической форме:

а) $5e^{1,5i}$,

б) $2e^{0,5i}$,

д) $10e^{-\frac{2\pi}{3}i}$,

е) $0,4\ e^{\pi i}$,

в) $3e^{-i}$,

ж) $0{,}32e^{\frac{\pi}{2}i}$.

г) $4e^{\frac{7\pi}{4}i}$,

Упражнение № 3

Выполните действия:

а) $0{,}5e^{\frac{4\pi}{5}i} * 4e^{\frac{\pi}{15}i}$,

г) $\sqrt[3]{0{,}001e^{\frac{\pi}{6}i}}$,

б) $0{,}2e^{\frac{7\pi}{10}i}/4e^{\frac{4\pi}{5}i}$,

д) $\sqrt[4]{81e^{\frac{4\pi}{3}i}}$.

в) $(2e^{\frac{2\pi}{3}i})^6$,

Упражнение № 4

Выполните действия и результат запишите в показательной форме:

а) $\frac{1+i}{\sqrt{2*e^{i\frac{\pi}{3}}}}$,

г) $\frac{(1+i)^{15}}{2^7*e^{i\frac{\pi}{2}}}$,

б) $\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{(-\sqrt{3}+i)^5}$,

д) $(\frac{\sqrt{2}*e^{i\frac{3\pi}{4}}}{-1+i})^{10}$.

в) $\frac{\sqrt{2}*e^{i\frac{\pi}{4}i}}{(-1+i)^3}$,

Задание № 5

Решите уравнения:

а) $z^5 = 243e^{\frac{\pi}{3}i}$,

б)$z^3 = 0{,}008e^{\frac{11\pi}{6}i}$,

в)$z^4 = 625e^{\frac{5\pi}{4}}$.

Задание № 6

Вычислите:

а) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^{12}$,

б) $(\frac{2i^9}{1+i^{15}})^{10}$.

Задание № 7

Найдите тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

а) $z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$,

б) $z = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$,

в) $z = 3e^{\pi i}$,

г) $z = e^{i}$.

Задание № 8

Найдите $z_1 * \ z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, результат напишите в алгебраической форме:

а) $z_1 = 1{,}5e^{0{,}7i},\ z_2 = 0{,}7e^{1{,}7i}$.

б) $z_1 = e^{-0{,}7+3i},\ z_2 = e^{1{,}5+2i}$.

Задание № 9

Вычислите z^6 и $\sqrt[4]{z}$ результаты представьте в алгебраической форме:

а) $z = 4{,}2e^{2{,}3i}$,

б) $z = 0{,}4e^{\pi i}$,

в) $z = 3{,}5e^{5i}$,

г) $z = \ -16$,

Задание № 10

Вычислите корни:

а) $\sqrt[4]{1}$,

б) $\sqrt[4]{i}$,

в) $\sqrt[3]{-1+i}$.

Задание № 11

Упростите выражение:

$\frac{\cos\varphi + i\ \sin\varphi}{\cos\varphi - i\ \sin\varphi}$.

Занятия 22

Тема: «Онлайн-сервиса WOLFRAM ALPHA»

Цель: Знакомство с онлайн-сервисом WOLFRAM ALPHA и практическое его применение в решение задач с комплексными числами.

Тип занятия: практикум.

На занятии учащиеся знакомятся с онлайн-сервисом WOLFRAM ALPHA, учатся правильно вводить задание в текстовое поле сервиса, выполнять действия с комплексными числами, используя данную платформу.

Условие для проведения данного занятия: наличие одного или нескольких компьютеров с выходом в Интернет.

Особенности работы с данной платформой представлены в параграфе 2.3 настоящей выпускной квалификационной работы.

Занятие 23

Тема: «Обобщение по теме комплексные числа»

Цель: Обобщение знаний о комплексных числах и их практическое значение

Тип занятия: семинар-практикум

Занятие предполагает презентацию исследовательских работ учащихся. Исследовательские работы могут быть как индивидуальные, так и групповые с учетом уровня подготовки учащихся.

Примерные темы исследовательских работ:

1) история появления комплексных чисел;

2) комплексные числа и их применение;

3) комплексные числа и их свойства;

4) пары чисел и действия с ними;

5) комплексные числа и кривые второго порядка;

6) умножение точек на плоскости.

Занятие 24

Тема: «Итоговая работа»

Цель: Проверка усвоения знаний по факультативному курсу «Арифметика комплексных чисел»

Тип занятия: Самостоятельная проверочная работа № 3

1) Запишите число $z = 2e^{\frac{5\pi}{6}}$ в алгебраической форме.

2) Пользуясь равенством:

$$a^x = e^{xlna}\,, a > 0\,, a \neq 1$$

представьте в показательной форме числа:

а) 2^{3i},

б) $3^{-\frac{1}{2}}$,

в) 5^{1+i},

г) 10^{1-i}.

3) Выполните действия:

а) $0{,}02e^{\frac{13\pi}{20}i} \cdot 5e^{\frac{4\pi}{5}i}$,

б) $\frac{36(cos185° + isin185°)}{108(cos215° + isin215°)}$,

в)$\left(0{,}1e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^4$.

4) Решите уравнение: $z^5 = 32e^{\frac{\pi}{2}i}$.

5) Вычислите:

$\left(\frac{5-i^7}{2-3i^{19}}\right)^8$.

Таким образом, методические материалы представляют собой разработку занятий факультативного курса «Арифметика комплексных чисел» и включают в себя: лекционный материал, упражнения для закрепления пройденного материала и контрольные проверочные работы. Методические разработки занятий факультативного курса «Арифметика комплексных чисел» были использованы педагогами при изучении темы «Комплексные числа».

2.5 Апробирование факультативного курса «Арифметика комплексных чисел»

Создание условий для раскрытия задатков и развития способностей всех учащихся, сохраняя индивидуальность и личностный подход на уроках и во внеклассной деятельности – одна из задач современной школы. По новым стандартам, каждое общеобразовательное учреждение разрабатывает Основную образовательную программу основного общего образования, содержащую обязательную часть, которая составляет 70% программы, и часть, формируемую участниками образовательного процесса – 30% от общего объёма основной образовательной программы основного общего образования. В рамках этих 30% предусматриваются учебные курсы, обеспечивающие различные интересы обучающихся и внеурочная деятельность, которые направлены на обеспечение индивидуальных потребностей обучающихся. Занятия по свободному выбору – факультативные и особенно организация малых групп – в большей степени, чем работа в классе, позволяют реализовать дифференциацию обучения, предполагающую применение разных методов работы. Это помогает учесть различные потребности и возможности детей [37].

Факультативный курс прошли 12 учащихся МБОУ Лесоперевалочная СОШ №1 что сотавило 35% от общего числа учащихся в 10-11 классах.

После окончания факультативного курса учащимися предлагалось ответить на вопрос: считаете ли Вы нужным участие школьников в работе факультативов такого плана по разным предметам? Результаты ответов преведоно на рисунке 19.

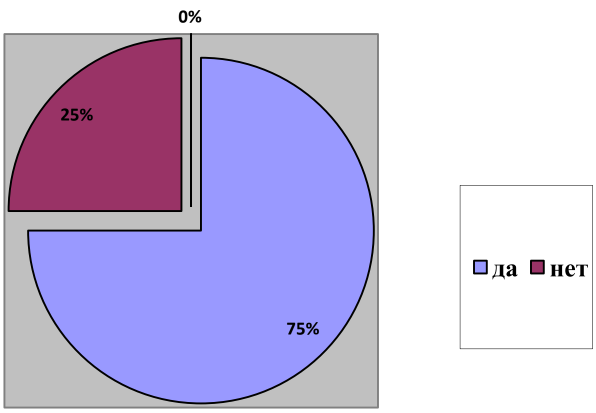

Рисунок 19 – Результаты ответов учащихся

После прохождения ФК учителя по математике отметили у учащихся повышение уровня знаний, проявление интереса к предмету и владение онлайн-сервисом WOLFRAM ALPHA, что в свою очередь привлекло внимание других учеников(рисунок 20).

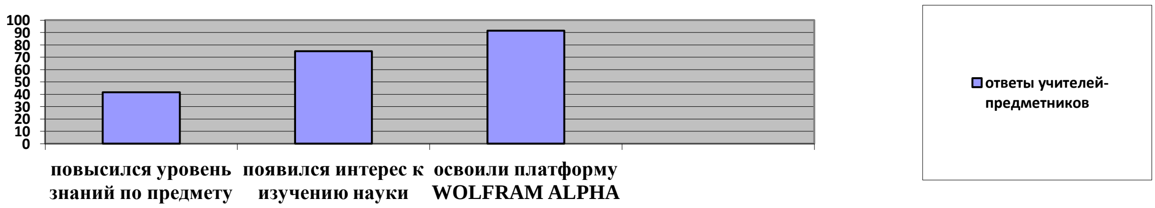

Рисунок 20 – Результаты ответов учителей-предметников на вопрос: какие изменения в процессе обучения были выявлены у учащихся после прохождения факультатива «Арифметика комлексных чисел».

На факультативе учащиеся углубили свои знания в теме «Комплексные числа», повысился интерес и мотивация к предмету матемитика, а также научились работать с платформой WOLFRAM ALPHA.

По оканчанию факультатива 4 учащихся (что в свою очередь составило 33,3% отчисла детей которые посещали ФК) смогли посетить дополнительный факультативный курс «Комплексные числа и их приложения». На данном курсе уровень знаний немного отличался от школьной программы, но это не помешало ученикам попробывать свои силы и успешно пройти этот факультатив.

Подводя итоги отметим, применительно не только к профильному классу образовательного учреждения, ведущими и основными являются такие методы как самостоятельная, индивидуальная и групповая работы. Данные методы удачно реализуются при организации работы такого рода факультатива. У учащихся наблюдается потребность в исследовательской и поисковой активности – это одно из условий, которое позволяет учащимся погрузиться в творческий процесс обучения и воспитывает в них жажду знаний, стремление к открытиям, активному умственному труду, самопознанию.

Таким образом:

- при посещении факультативного курса реализуется реализуется дифференциация обучения, что позволяет учесть различные потребности и возможности детей;

- посещение занятий факультатива «Арифметика комплексных чисел» способствовало повышению мотивации у учащихся к изучению предмету, формированию новых знаний и умений, помогло с определением будущей профессии.

Подведя итоги по второй главе, можно отметить следующее:

Изучив учебники 10-11 классов по алгебре, было выявлено, что тема «Комплексные числа» во всех рассмотренных нами учебниках 10 класса не изучается, в некоторых учебниках 11 класса, в основном профильного уровня, данная тема рассматривается, одноко ее изучение носит ознакомительный характер. В учебниках, содержащих тему «Комплексные числа», изложение материала носит системный характер и способствует формированию у старшеклассников понятия комплексного числа.

Формирвания понятия числа у школьников явялется важным в изучении матаматки. Большую роль в этом играют комплексные числа, изучение которых завершает представление у старшеклассников о числе. Учитывая это нами был разработан факультативный курс «Арифметика комплексных чисел», прохождение которого способсвует углублению и расширению понятия числа у школьников. Факультативный курс расчитан для учащихся 10-11 классов, изучающих математику на базовом урвне и состоит из лекционных и практических занятий. Для проверки уровня усвоения темы зпаланированы три проверочных самостоятельных работы. Подробное описание факультативного курса представлено во втором параграфе второй главы данной выпускной квалификационной работы.

Новизной факультативного курса является то, что в учебный план было включено знакомство с платформой $Wolfram\,Alpha$, являющейся вопросно-ответной системой. В рамках факультативного курса учащиеся познакомятся с особенностями работы данной системы и возможностью ее использования при изучении комплексных чисел. Необходимым условием для включения данной темы в учебный план курса является обязательное наличие одного или нескольких компьютеров и доступ к сети Интернет.

Кроме этого нами были разработаны поурочные занятия факультативного курса «Арифметика комплексных чисел». Данный материал может быть использован в педагической практике при изучении темы «комплексные числа» в профильных классах средней общеобразовательной школы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе нами была рассмотрена проблема изучения темы «Комплексные числа» на факультативных занятиях по математике в старших классах средней общеобразовательной школы.

Одним из базовых понятий математики является понятие числа. На начальном этапе школьники знакомятся с натуральными числами, но по мере решения учебных задач, они расширяют свое представление о числе. Как правило, формирование понятия числа заканчивается изучением действительных чисел. Однако такое представление не является полным. Так как существуют такие задачи, которые не имеют решение на множестве действительных чисел. Поэтому рассмотрение темы «комплексные числа» в школе является актуальным, так как позволяет у школьников сформировать полное представление о числе, а также способствует развитию у них научного мировоззрения и целостного восприятия окружающего мира, что является одной из главных задач системы образования на современном этапе.

Первая глава выпускной квалификационной работы была посвящена теоретическим основам организации факультативных занятий в общеобразовательной школе. Нами была изучена научно-методическая и педагогическая литература по данной теме. Так факультативные занятия, являясь частью внеклассной работы по математике, занимают важное место в профессиональном самоопределении учащихся, поскольку расширяют и углубляют знания учащихся по данному предмету. Некоторые ученные, в частности А. А. Мельник, считают, что факультативные занятия являются самостоятельным видом учебно-воспитательной работы со школьниками, имеющим сходство, как с уроками, так и с формами внеклассной работы, но в то же время отличающейся от них. В первом параграфе нами были рассмотрены теоретические основы организации факультативных занятий по математике как одной из форм внеклассной работы со школьниками. Второй параграф был посвящен рассмотрению форм и методов, используемых на факультативных занятиях по математике. В третьем параграфе нами были раскрыты особенности организации факультативных занятий по математике для старшеклассников. Так нами было отмечено, что факультативные занятия для школьников данного возраста должны быть интересны, направлены на развитие навыков самостоятельной работы, творческой и мыслительной деятельности. Занятия должны способствовать формированию математической культуры у старшеклассников. Для этого педагог, организуя факультативные занятия, использует дифференцированный подход в обучении и учитывает возрастные особенности учащихся.

Вторая глава выпускной квалификационной работы посвящена методическим особенностям изучения факультативного курса «Арифметика комплексных чисел в старших классах общеобразовательной школы. В первом параграфе второй главы мы рассмотрели содержание учебников по алгебре и началу анализа в 10-11 классах. Проведенный анализ учебного материала позволил сделать следующие выводы:

- тема «комплексные числа» в 10 классе не рассматривается;

- тема «комплексные числа» включена в некоторые учебники 11 класса в основном углубленного профиля;

- учебный материал по теме «комплексные числа» в учебниках излагается системно, но носит ознакомительный характер.

Учитывая важность изучения темы «комплексные числа» в формировании научного мировоззрения учащихся и математической культуры школьников, нами был разработан факультативный курс «Арифметика комплексных чисел», который был изложен во втором параграфе второй главы. Факультативный курс рассчитан для учащихся 10-11 классов, изучающих алгебру на базовом уровне. На реализацию курса отведено 24 часа, из них 6 часов на теоретическое рассмотрение учебного материала, 15 часов на практику, 3 часа на проверку знаний учащихся по данной теме в виде проверочных самостоятельных работ. В рамках факультативного курса учащиеся знакомятся с алгебраической, тригонометрической и показательной формой комплексного числа. А также учатся выполнять вычислительные операции с комплексными числами.

В четвертом параграфе второй главы нами были представлены разработки занятий данного факультативного курса. Теоретические занятия проводятся в форме лекций. Практические занятия – в виде практикумов. Для проведения практикумов нами были подобраны упражнения по теме, которые могут быть использованы как для групповой работы учащихся, так и для самостоятельной работы. Для проверки уровня усвоения знаний учащихся по изучаемой теме в методических разработках представлено три проверочных самостоятельных работы. Новизной на наш взгляд можно считать то, что в программу факультативного курса была включено знакомство с платформой $Wolfram\ Alpha$, что делает курс интересным для учащихся. Особенности работы с данной системой в рамках факультативного курса подробно описан в третьем параграфе второй главы. Однако, использование платформы $Wolfram\ Alpha$ на факультативном курсе требует определенных технических условий. Так, для того чтобы работать с данной платфомой, требуется один или несколько компьютеров с выходом в Интернет. Также в рамках курса учащимся предлагается выполнить исследовательские проекты по теме «комплексные числа». Проекты могут быть, как индивидуальные, так и групповые. Нами был разработан дополнительный факультатив для сильных детей, содержание которого представлено в приложении А и видеоматериал для привлечения старшеклассников на факультативный курс, содержание которого представлено в приложении Б.

В пятом параграфе второй главы мы апробировали факультативное занятие «Арифметика комплксного числа». Выяснили, что старшеклассники выявили для себя важного и нового из данного факультатива.

Таким образом, при разработке факультативного курса мы учли полученные теретические знания, изложенные в первой главе выпускной квалификационной работе. А именно, факультативный курс был разработан с учетом возрастных особенностей учащихся. Курс помогает расширить или углубить, имеющиеся представления у старшеклассников о числе и развить у них математическую культуру. Для того, чтобы курс был интересен для старшеклассников нами были использованы разнообразные формы работы. Задания подобраны таким образом, что могут быть использованы в работе с учащимися разного уровня подготовки.

Факультативный курс «Арифметика комплексных чисел» может быть использован в работе с учащимися 10-11 классов, изучающих алгебру на профильном уровне, как дополнительный материал или как материал для самостоятельной работы.

Считаем, что цель и задачи, поставленные в начале работы, были достигнуты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и математический анализ для 10 класса. : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / И. Я. Виленкин, О. С. Иванов - Мусутов, В. И. Шварцбурд [и др.]. – Москва : Просвещение, 2006. – 328 с.

2. Алгебра и математический анализ для 11 класса : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / И. Я. Виленкин, О. С. Иванов - Мусутов, В. И. Шварцбурд [и др.]. – Москва : Просвещение, 2010. – 314 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый уровень / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. – Москва : Просвещение, 2012. – 464 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. : учебник для учащихся общеобразовательных организаций : углубленный уровень / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд [и др.]. – 18-е изд. – Москва : Мнемозина, 2014. – 312 с.

5. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. : учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова [и др.]. – Москва : Просвещение, 2015. – 384 с.

6. Ахмедова, Ж. М. Виды и формы внеклассной работы по математике в школе / Ж. М. Ахмедова // Современная наука и молодые учёные – 2020. – С. 187 – 190

7. Балашова, И. Э. Межшкольный факультатив по математике как средство развития интеллектуально одаренных учащихся / И. Э. Балашова // Современное образование Витебщины. – 2015. – № 2 (8). – С. 45 – 47.

8. Боженкова, Л. И. Введение понятия комплексных чисел при обучении учащихся классов естественно-математического профиля курсу

алгебры и началам математического анализа / Л. И. Боженкова, Д. В. Капитонов // Проблемы и перспективы физико-математического и технического образования. – 2014. – С. 84 – 95

9. Бойко, Л. В. Факультативные занятия и другие формы внеклассной работы / Л. В. Бойко, И. В. Василенко, Е. М. Лобанова // Символ науки : международный научный журнал. – 2019. – № 9. – С. 80 – 82.

10. Бурмистрова, Т. А. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10–11 классы : учебное пособие для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Т. А. Бурмистрова. – 2-е изд. – Москва : Просвещение, 2018. – 143 с.

11. Виноградова, Л. В. Методика преподавания математики в средней школе (общая методика) : учебное пособие / Л. В. Виноградова. – Петрозаводск, 2003. – 228 с.

12. Войтенко, Т. Ю. Методические особенности изучения темы «Комплексные числа» в профильных классах старшей школы / Т. Ю. Войтенко, А. С. Цыганкова // Современные проблемы науки и образования. – 2019. – №4. – С. 134.

13. Гончарова, И. В. О развитии математических способностей учащихся на факультативных занятиях / И. В. Гончарова // Актуальные проблемы математического образования в школе и вузе. – 2019. – С. 3 – 9.

14. Гончарова, И. В. Управление эвристической деятельностью учащихся на факультативных занятиях по математике средствами эвристико-дидактических конструкций / И. В. Гончарова, Т. А. Божедарная // Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2010. – С. 91 – 99.

15. Данилова, Н. А. К вопросу введения комплексных чисел в школьный курс математики / Н. А. Данилова, И. Л. Мирошниченко // Фундаментальные проблемы науки. – 2016. – С. 108 – 110.

16. Дубровин, В. Г. Теория функций комплексного переменного (теория и практика) : учебное пособие / В. Г. Дубровин ; Государственный университет. – Казань, 2010. – 102 с.

17. Дугарова, В. Б. К вопросу о формировании социокультурной компетенции на факультативных занятиях в старшей школе / В. Б. Дугарова // Иностранные языки: лингвистические и лингводидактические аспекты. – 2020. – С. 74 – 78.

18. Евсеев, Н. А. Комплексные числа и функции : учебно-методическое пособие / Н. А. Евсеев. – Новосибирск, 2015. – 118 с.

19. Жмурова, И. Ю. Изучение комплексных чисел в общеобразовательной школе / И. Ю. Жмурова, С. В. Баринова // Молодой учёный. – 2020. – № 5(295). – С. 312 – 314.

20. Литвиненко, М. В. Некоторые вопросы преподавания темы «Комплексные числа» в старшей школе / М. В. Литвиненко, А. И. Мельникова // Физико-математическое и естественное образование: наука и школа. – 2018. – С. 120 – 123.

21. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень : задачник для 10-11 классов. / М. И. Шабунин, А. А. Прокофьев, Т. А. Олейник [и др.]. – Москва : БИНОМ . Лаборатория знаний, 2009. – 477 с.

22. Мельник, А. А. Из истории факультативного обучения / А. А Мельник // Актуальные вопросы психологии и педагогики. – 2011. – С. 191 – 201. – URL: https://clck.ru/b4tyU (дата обращения: 08.11.2021).

23. Миронов, А. Н. К вопросу о содержании факультативных занятий по математике в школе / А. Н. Миронов, Г. Ф. Хайртдинова // Азимут научных исследований: педагогика и психология. – 2019. – № 2(27). – С. 162 – 164

24. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Ч. 2. : задачник учащихся для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович. – 6-е изд. – Москва : Мнемозина, 2009. – 343 с.

25. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник в 2-х частях. Базовый и углубленный уровни. / А. Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2019. – 511 с.

26. Петросян, Г. Д. Рассмотрение комплексных чисел на факультативных занятиях в школе / Г. Д. Петросян, А. А. Аветисян // Инновации. Наука. Образование. – 2021. – № 26. – С. 1121 – 1125.

27. Приказ Минпросвещения России «О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, сформированный приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 28 декабря 2018 г. № 345 от 22.11.2019 № 623 // Российская газета. – URL: https://goo.su/bjo0.

28. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования: Решение федерального учебно-методического объединения по общему образованию от 28 июня 2016 г. № 2/16-3. – URL: https://clck.ru/b4uAP / (дата обращения 25.12.2021).

29. Рябинина, В. А. Факультативная работа по математике в школе / А. В. Рябинина // Актуальные вопросы развития профессионализма педагогов в современных условиях. – 2017. – С. 122 – 126.

30. Рябухо, Е. Н. Формирование познавательной компетентности учащихся на факультативных занятиях по математике / Е. Н. Рябухо, В. П. Батунина // Инновационные тенденции развития системы образования. – 2016. – С. 57 – 61.

31. Седова, Е. А. Комплексные числа в школьном математическом образовании: алгебра комплексных чисел (базовый уровень) / Е. А. Седова, С. В. Пчелинцев // Математика в школе. – 2018. – № 8. – С. 43 – 56.

32. Сиводина, О. С. Изучение комплексных чисел на факультативном курсе по математике : специальность 44.03.01 «Педагогическое образование», направленность (профиль) программы бакалавриата «Математика» : выпускная квалификационная работа / Сиводина Ольга Сергеевна. – Белгород, 2019. – 36 с.

33. Симоновская, Г. А. Факультативный курс «Комплексные числа и их приложения» для старших классов средней школы : диссертация кандидата педагогических наук / Галина Александровна Симоновская. – Москва, 1997. – 172 с.

34. Синкевич, Г. И. История геометрических представлений комплексных чисел / Г. И. Синкевич // История науки и техники. – 2017. –№ 4. – С. 15 – 30.

35. Тарасенко, А. В. Введение понятия комплексных чисел при обучении учащихся старших классов естественно-математического профиля курсу алгебры и началам математического анализа / А. В. Тарасенко // Студенческий: научный журнал. – 2019. – № 33. – С. 25 – 27. – URL: https://sibac.info/journal/student/77/154888 (последнее обновление 04.12.2019).

36. Тарасенко, А. В. Методика обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики : специальность 44.04.01 «Педагогическое образование», направленность (профиль) «Математическое образование» : выпускная квалификационная работа (магистерская диссертация) / Тарасенко Алексей Васильевич. – Тольятти, 2020. – 93 с.

37. Фадеева, Т. А. О роли внеклассной работы по математике в школе (из опыта работы) / Т.А. Фадеева // Совершенствование математического образования в школе : сборник научно-методических статей / под ред. М. Г. Суминой. – Комсомольск-на-Амуре : АмГПГУ – 2019. – С. 183 – 190.

38. Феданова, Л. В. Внеклассная работа по математике в основной и старшей школе : специальность 44.03.01 «Педагогическое образование», направленность (профиль) программы бакалавриата «Математика» : выпускная квалификационная работа / Феданова Лидия Владимировна. – Челябинск, 2017. – 71 с.

39. Федеральный государственный стандарт среднего (полного) общего образования / Министерство образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 г. № 1897. – URL: https://goo.su/bw5e.

40. Шадрина, А. В. Основные аспекты разработки факультативного курса «Задачи на построение» для учащихся 7–8 классов / А. В. Шадрина. – 2020. – С. 210 – 214.

41. Юрченко, В. А. Методика проведения факультативного курса «цепные дроби» в условиях применения информационных технологий обучения : специальность 44.03.05 «Педагогическое образование», направленность (профиль) программы бакалавриата «Математика» и «Информатика» : выпускная квалификационная работа / Юрченко Владимир Александрович. – Белгород, 2017. – 59 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Факультативный курс «Комплексные числа и их приложения»

Комплексные числа обобщают понятие числа в математике, их применение гораздо шире, чем действительных чисел, поскольку действительные числа являются подмножеством комплексных чисел.

Некоторые возможности применения комплексных чисел могут быть рассмотрены на факультативных занятиях в школе, благодаря чему представление школьников о комплексных числах расширится.

Применение комплексных чисел позволяет:

1) гораздо легче решать многие задачи;

2) обнаружить новые факты и сделать обобщение;

3) установить межпредметные связи между математикой и физикой.

Таким образом, изучая комплексные числа на факультативных занятиях в старших классах с математическим профилем, учащиеся повышают свой уровень математической подготовки, получают новые знания, которые будут полезны им в дальнейшем не только при изучении смежных дисциплин, но и в практической деятельности в будущем.

Факультативный курс «Комплексные числа и их приложения» разработан с учетом психолого-педагогических особенностей старшеклассников, их уровня подготовки.

Данный курс предназначен для учащихся 11 классов с математическим профилем.

Необходимый базовый уровень знаний для прохождения курса:

1) из области алгебры:

- учащиеся знакомы с основными понятиями комплексных чисел;

- старшеклассники умеют выполнять действия с комплексными числами;

- школьники знают и умеют пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел;

- учащиеся умеют в простых случаях находить комплексные корни уравнений с действительными коэффициентами;

2) из области физики:

- учащиеся знакомы с темами, которые связаны с рассмотрением действий сил;

3) из области геометрии:

- старшеклассники знакомы с учебным материалом из раздела «Планиметрия».

Данный факультативный курс способствует расширению и углублению знаний о комплексных числах, полученных в основном курсе математики.

Цели курса представлены на рисунке А.1:

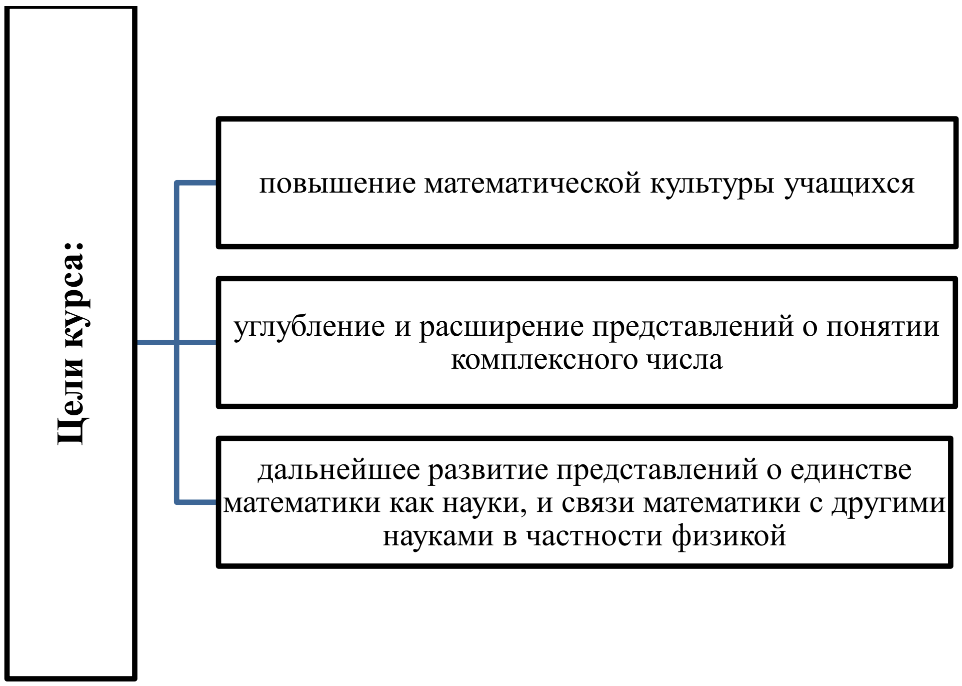

Рисунок А.1 – Цели факультативного курса «Комплексные числа и их приложения»

Учебный материал факультативного курса изложен в четырех параграфах и изучается в следующей последовательности (рисунок А.2):

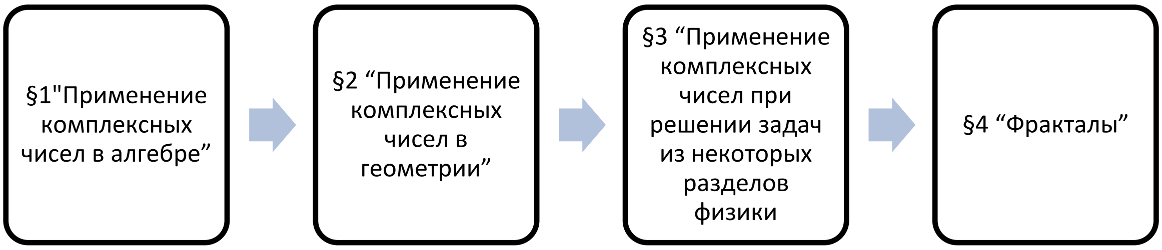

Рисунок А.2 – Последовательность прохождения основных тем факультативного курса «Комплексные числа и их приложения»

Конспект занятия ФК по теме «Комплексные числа и их приложения»

На данном занятии будут изучены следующие приложения КЧ:

– Вычисление интегралов действительного анализа на основе комплексного по теореме Коши .

– Несобственные интегралы от вещественной переменной

Рассмотрим первое. Для каждого приложения изложена доступная теория, разобраны примеры и подобраны для самостоятельного решения посильные задания (с ответами). В этом разделе рассматриваются не берущиеся или сложно вычисляемые интегралы из действительного анализа.

Рассмотрим вначале сложно-вычисляемый интеграл, представленный на слайде ($\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3cosx}$). В действительном анализе его можно решить через универсальную тригонометрическую подстановку $tg\frac{x}{2}$, которая приводит к громоздким алгебраическим вычислениям на многочленах. комплексный анализ предлагает достаточно простое решение.

Решение. Пусть $z = e^{ix}$, тогда $dx = \frac{dz}{iz}$, $cosx = \frac{z^2+1}{2\,z}$. подставляя выражения для dx , $cosx$ в данный интеграл, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3cosx} = \oint |z| = 1 \frac{2dz}{i(3z^2+10z+3)} = \frac{2}{3i} \oint |z| = 1 \frac{dz}{(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{2}{3i} \cdot 2\pi i \cdot resf\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} resf\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Так как в область, ограниченную контуром $|z| = 1$, попадает только одна точка $z = -\frac{1}{3}$, которая очевидно является простым полюсом функции $f(x) = \frac{1}{(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$. Следовательно,

$$resf\left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{3}}\frac{1}{z+3} = \frac{3}{8}u\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+3cosx} = \frac{\pi}{2}.$$

Сейчас рассмотрим не берущийся интеграл в действительном анализе. Вычислить интеграл $\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz$.

Решение. В круге $|z| < 4$ функция $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2+z}$ является всюду аналитической за исключением точек z = 0 и z = –1. По основной теореме о вычетах имеем

$$\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz = 2\pi i(resf(0) + resf(-1)).$$

Точка z = 0 – устранимая особая точка функции, так

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z^2+z} = 1.$$

Поэтому $resf(0) = 0$. Точка z = –1 – полюс (простой) функции $f(z)$.
Следовательно,

$$resf(-1) = \lim_{z\to 1}\frac{e^z-1}{z^2+z}(z+1) = 1 - e^{-1}.$$

Окончательно получаем

$$\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz = 2\pi i(1 - e^{-1}).$$

Несобственные интегралы всегда вызывают трудности при решении, так как пределы интегрирования является бесконечности и при вычислении используются теории сходимости. В комплексном анализе вычислить их могут вычеты и теорема Коши о вычетах. Предлагаю рассмотреть пример:

Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+3i)(z-3i)} \ ,$$

для которой точки $z = \pm 2i$ и $z = \pm 3i$ являются простыми полюсами. Из них в верхней полуплоскости находятся точки $z_1 = 2i$ и $z_2 = 3i$.

Найдем вычеты функции $f(z)$ в этих точках:

$$resf(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z^2+2i)(z^2+9)} = -\frac{i}{20},$$

$$resf(3i) = \lim_{z\to 3i} \frac{1}{(z^2+3i)(z^2+4)} = -\frac{i}{30}.$$

Окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)} = 2\pi i\left(-\frac{i}{20} + \frac{i}{30}\right) = \frac{\pi}{30}.$$

В данном конспекте занятия рассматриваются вычисление интегралов, т к в последующих предложениях они будут использованы для решения дифференциальных уравнений и вычислений преобразования Лапласса, а так же описывают движение жидкости и газов в физике.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Видеоролик «Введение в комплексные числа»

Для привлечения учеников профильных классов общеобразовательной школы на факультативное занятие «Арифметика комплексных чисел» был создан видеоролик продолжительностью 5 минут и 52 секунды. Видеоматериал носит ознакомительный характер и содержит в себе теоретический материал по теме комплексные числа. А именно:

- понятие комплексной единицы: $i^2 = -1$,
- решение квадратного уравнения при отрицательном дискриминанте (рисунок Б.1) ,
- представление комплексного числа на плоскости в виде вектора $\vec{z} = a + bi$ (рисунок Б.2),
- разные формы представления комплексных чисел,
- связь действительного и комплексного анализа (рисунок Б.3).

Режим доступа видеоматериала: https://cloud.mail.ru/public/wUTw/1h7sMAYFi

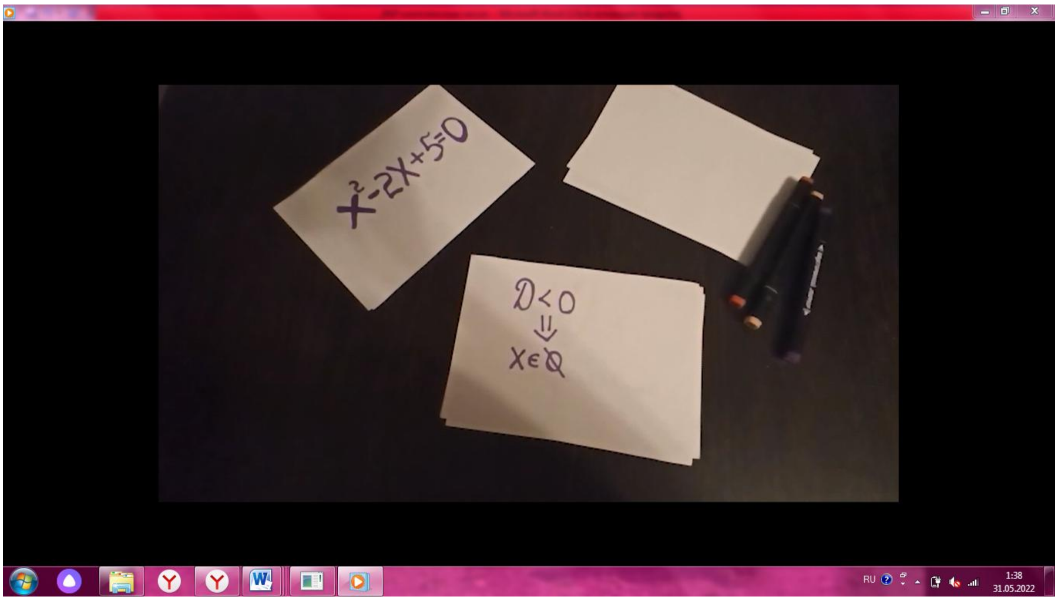

Рисунок Б.1 – Решение квадратного уравнения при отрицательном дискриминанте

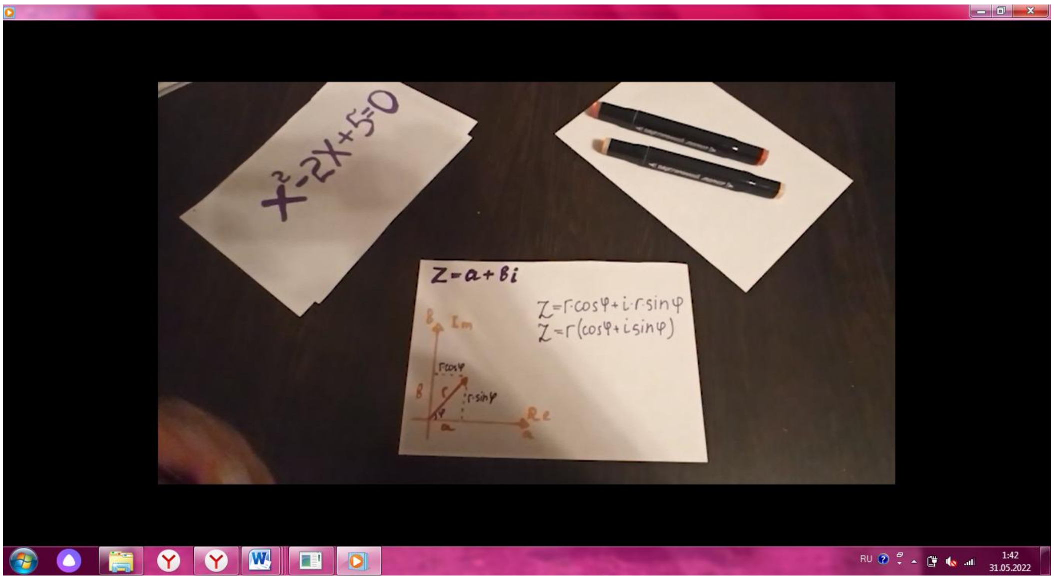

Рисунок Б.2 – Представление комплексного числа на плоскости в виде вектора

$$\vec{z} = a + bi$$

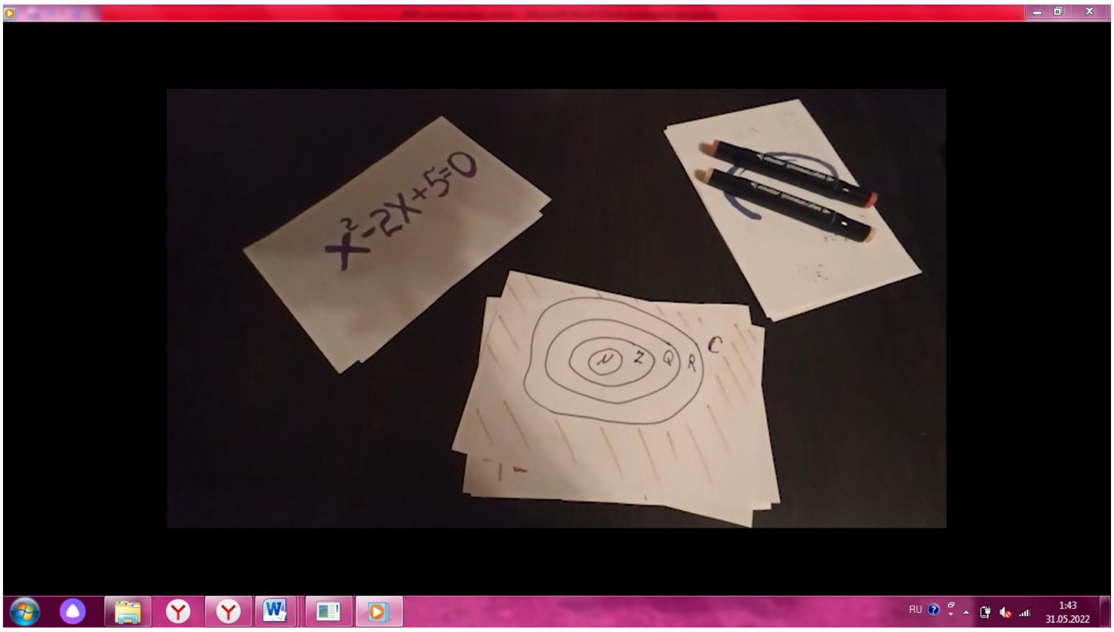

Рисунок Б.3 – Связь действительного и комплексного анализа