Министерство высшего образования и науки Российской Федерации
Лесосибирский педагогический институт –
филиал Сибирского федерального университета

А. В. Фирер

Е. Н. Яковлева

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Красноярск – Лесосибирск

2025

УДК 519.6(07)
ББК 22.19я73
Ф 62

Рецензенты:

Т. Ю. Войтенко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ЭиЕД Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева;

М. М. Герасимова, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры ИиТС Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева.

Фирер А. В.

Ф Элементарная математика. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие / А. В. Фирер, Е. Н. Яковлева. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2025. – 112 с.

ISBN 978-5-7638-5093-2

Рассмотрены способы и приемы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем. Даны задания для самостоятельной работы, в том числе интерактивные, созданные в LearningApps.org. В приложении представлен итоговый тест.

Предназначено для студентов направлений подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» и 44.03.15 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

ISBN 978-5-7638-5093-2

Электронный вариант издания см.: **УДК 519.6(07)**
http://catalog.sfu-kras.ru **ББК 22.19я73**

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства часто вызывают трудности у студентов при изучении соответствующих разделов элементарной математики. Данное учебное пособие содержит материал, направленный на формирование профессиональных компетенций при подготовке бакалавров Педагогического образования в соответствии с ФГОС ВО 3++.

Показательные и логарифмические функции, выражения, а также уравнения и неравенства являются традиционными темами на уроках математики старшей школы. Это объясняется их высокой практической значимостью. Во многих школьных учебниках приводятся различные примеры процессов, описываемых с помощью показательных и логарифмических функций.

Наряду с понятием степени с действительным показателем старших школьников знакомят и с понятием логарифма. Прежде всего, это связано с тем, что в математике логарифм – это функция, обратная возведению в степень. Успех в выполнении преобразований логарифмических выражений во многом связан с умением свободно обращаться со степенями.

Хочется отметить, что важность изучения логарифмов и их свойств не ограничивается вопросами математики. Это понятие используется людьми большого числа профессий, таких как ученые, инженеры, геодезисты, биологи для более легкого выполнения высокоточных вычислений. Например, логарифмическая спираль с углом закрутки $\alpha = \frac{1}{k} ln \frac{r}{a}$, позволяет описать форму разреза раковины моллюсков, полосы тропических циклонов, направление роста рогов горных козлов, рукава некоторых галактик, таких как наша галактика Млечный путь и многое другое.

Целью данного учебного пособия является применение системного подхода к организации самостоятельной познавательной деятельности студентов в соответствии с требованиями ФГОС ВО 3++ и современной парадигмой образования.

Задачи:

– раскрыть основные теоретические разделы курса «Элементарная математика. Показательные уравнения и неравенства»;

– сформировать у студентов навыки самостоятельной познавательной деятельности, необходимые для их дальнейшего самообразования;

– развить мотивацию самостоятельности познавательной деятельности как потребности в получении новых знаний;

– раскрыть творческие способности студентов.

Структура пособия определяется его содержанием и дидактическими задачами. Каждый раздел посвящен определенным темам, снабжен интерактивными вопросами для самоконтроля, заданиями, упражнениями. Это позволяет создать единую логику изложения каждой темы, что дает возможность формировать у студентов умение строить относительно логичные и последовательные частные суждения на основе общего подхода.

Вопросы и задания различны по уровню сложности. Часть их связана с репродуктивным усвоением и переработкой информации. Большинство из них нацелено на аналитическую работу студентов на основе активизации многих интеллектуальных функций: сравнения и сопоставления, абстрагирования и конкретизации, классифицирования и обобщения и др. Так, например, метод конкретной ситуации развивает способность анализировать и самостоятельно формулировать познавательные задачи.

Выполнение конкретного задания при знакомстве студента с новым материалом помогает глубже понять изучаемый материал, выделить познавательные задачи и цели учебной деятельности.

При работе над пособием использовалась учебная литература, список которой приведен в конце и может служить основой для последующего самостоятельного изучения данного курса.

1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1.1. Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция

Степень с действительным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с рациональным показателем.

В частности, для $x > 0,\ y > 0$ и любых действительных α и β справедливы такие равенства:

1) $x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$;

2) $x^{\alpha}: x^{\beta} = x^{\alpha-\beta}$;

3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$;

4) $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha}$;

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$.

***Пример* 1.1.** Вычислить $25^{2\sqrt{8}+3} \cdot 5^{-3-4\sqrt{8}}$.

Решение. Воспользуемся свойствами степеней 1), 3), получим:

$$25^{2\sqrt{8}+3} \cdot 5^{-3-4\sqrt{8}} = (5^2)^{2\sqrt{8}+3} \cdot 5^{-3-4\sqrt{8}} = 5^{4\sqrt{8}+6-3-4\sqrt{8}} = 5^3 = 125.$$

Ответ: 125.

***Пример* 1.2.** Вычислить $\frac{8^{\sqrt{11}} \cdot 2^{\sqrt{11}}}{16^{\sqrt{11}-2}}$.

Решение. Воспользуемся свойствами степеней 2) и 4), получим:

$$\frac{8^{\sqrt{11}} \cdot 2^{\sqrt{11}}}{16^{\sqrt{11}-2}} = \frac{(8 \cdot 2)^{\sqrt{11}}}{16^{\sqrt{11}-2}} = \frac{16^{\sqrt{11}}}{16^{\sqrt{11}-2}} = 16^{\sqrt{11}-(\sqrt{11}-2)} = 16^2 = 256.$$

Ответ: 256.

***Пример* 1.3.** Упростить выражение: $\left(a^{\sqrt{5}} + 2\right)\left(a^{\sqrt{5}} - 2\right) - \left(a^{\sqrt{5}} + 3\right)^2$.

Решение. Воспользуемся формулами сокращенного умножения и свойством степеней 3), получим:

$$\left(a^{\sqrt{5}} + 2\right)\left(a^{\sqrt{5}} - 2\right) - \left(a^{\sqrt{5}} + 3\right)^2 = \left(a^{\sqrt{5}}\right)^2 - 2^2 - \left(\left(a^{\sqrt{5}}\right)^2 + 2 \cdot a^{\sqrt{5}} \cdot 3 + 3^2\right)$$

$$= a^5 - 4 - a^5 - 6a^{\sqrt{5}} - 9 = -13 - 6a^{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $-13-6a^{\sqrt{5}}$.

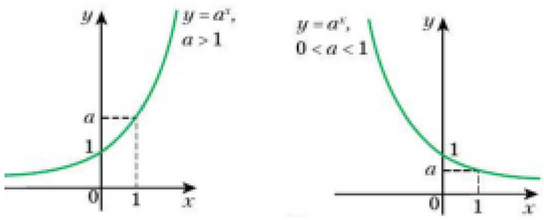
Выберем некоторое положительное число a, отличное от 1. Каждому действительному числу x можно поставить в соответствие положительное число a^x. Тем самым задана функция $f(x)=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, с областью определения R.

Эту функцию называют ***показательной функцией***.

Рассмотрим некоторые свойства показательной функции:

1. Показательная функция определена при любом действительном x, поэтому $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$.
2. При $a>0$ и любом x выполняется неравенство $a^x>0$. Поэтому область значений показательной функции состоит только из положительных действительных чисел $E(f)=(0;\ +\infty)$.
3. Показательная функция не имеет нулей, и промежуток $(-\infty;\ +\infty)$ является ее промежутком знакопостоянства.
4. Показательная функция непрерывна.
5. При $a>1$ показательная функция является возрастающей. При $0<a<1$ показательная функция является убывающей.
6. Поскольку показательная функция является либо возрастающей (при $a>1$), либо убывающей (при $0<a<1$), то она не имеет точек экстремума.

На рис. 1.1,*а*,*б* схематически изображен график показательной функции для случаев $a>1$ и $0<a<1$ соответственно.



а) *б)*

Рис. 1.1. Графики функции $y=a^x$

***Пример* 1.4.** Сравнить числа $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^8$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right)^5$.

Решение. Преобразуем числа к одному основанию:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{3^3}}\right)^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}\cdot 8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{12};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right)^5 = \left(\frac{1}{\sqrt{3^4}}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{2}\cdot 5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

Так как $0 < \frac{1}{3} < 1,\ 12 > 10$ и функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ монотонно убывает, то $\left(\frac{1}{3}\right)^{12} < \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$, следовательно, $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^8 < \left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right)^5$.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^8 < \left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right)^5$.

***Пример* 1.5.** Сравните числа m и n, если $0{,}8^m < 0{,}8^n$.

Решение. Так как основание $a = 0{,}8$ больше нуля, но меньше единицы, то показательная функция $y = 0{,}8^x$ является убывающей. Следовательно, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Тогда получаем, что $m > n$.

1.2. Логарифм и его свойства. Логарифмическая функция

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Из определения следует, что если $a > 0, a \neq 1,$ и $b > 0$, то имеет место тождество

$$a^{\log_a b} = b. \tag{1.1}$$

Тождество (1) называют ***основным логарифмическим тождеством***.

Перечислим некоторые основные свойства логарифма:

1. При любом $a > 0\ \ (a \neq 1)$ выполнены равенства:

$$\log_a 1 = 0, \tag{1.2}$$

$$\log_a a = 1. \tag{1.3}$$

2. Если $x > 0,\ y > 0, a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняется равенство

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y. \tag{1.4}$$

Например, $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32) = \log_4 64 = 3$.

3. Если $x > 0,\ y > 0, a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняется равенство

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y. \tag{1.5}$$

Например, $\log_3 486 - \log_3 6 = \log_3 \frac{486}{6} = \log_3 81 = 4$.

4. Если $a > 0, a \neq 1$ и $b > 0$, то для любого $\beta \neq 0$ выполняется равенство

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b. \tag{1.6}$$

Например, $\log_{27} 3 = \log_{3^3} 3 = \frac{1}{3} \log_3 3 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$.

5. Если $b > 0, a > 0$ и $a \neq 1$, то для любого $r \in R$ выполняется равенство

$$\log_a b^r = r \log_a b. \tag{1.7}$$

Например, $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4 \cdot \log_5 5 = 4 \cdot 1 = 4$.

6. Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$ и $c \neq 1$, то выполняется равенство

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \tag{1.8}$$

Например, выполним переход к новому основанию 2 логарифма $\log_4 8$:

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

7. Если $a > 0, a \neq 1, b > 0,\ b \neq 1$, то выполняется равенство

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{1.9}$$

8. Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$, то выполняется равенство

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}. \tag{1.10}$$

Также в примерах можно встретить логарифм вида $\lg x$ и $\ln x$. Логарифм $\lg x$ называется ***десятичным логарифмом***. Это логарифм, основание которого равно 10. Данный логарифм обозначается как $\log_{10} x = \lg x$.

Десятичные логарифмы широко применяются в приближенных вычислениях; в связи с этим имеются подробные и весьма точные таблицы десятичных логарифмов. Они применяются для упрощения вычислений. Например, $\lg 0{,}001 = -3, \lg 10000 = 4$.

Для любого положительного числа целая часть десятичного логарифма называется *характеристикой*, а дробная часть – *мантиссой* этого логарифма.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e – иррациональная константа, приблизительно равная числу 2,71828. При этом пишут $\ln x$ вместо $\log_e x$.

***Пример* 1.6.** Вычислить $25^{1+\frac{1}{4}\log_5 16}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $25 = 5^2$, и тем, что при возведении степени в степень показатели перемножаются, получим

$$(5^2)^{1+\frac{1}{4}\log_5 16} = 5^{2+\frac{1}{2}\log_5 16}.$$

Далее, использовав формулы (1.7), (1.1) и свойства степеней с одинаковым основанием, проведем следующие преобразования:

$$5^{2+\frac{1}{2}\log_5 16} = 5^{2+\log_5 4} = 5^2 \cdot 5^{\log_5 4} = 25 \cdot 4 = 100.$$

Ответ: 100.

***Пример* 1.7.** Вычислить

$$\frac{4^{\log_5 3} - 3^{\log_5 4} + 16^{\frac{1}{\log_5 4}}}{2^{\frac{\log_5 3}{\log_5 2}} - \log_2 \log_3 81}.$$

Решение. Использовав свойства логарифмов (1.8)–(1.10) и (1.1), проведем следующие преобразования:

$$\frac{4^{\log_5 3} - 3^{\log_5 4} + 16^{\frac{1}{\log_5 4}}}{2^{\frac{\log_5 3}{\log_5 2}} - \log_2 \log_3 81} = \frac{3^{\log_5 4} - 3^{\log_5 4} + 4^{2\log_4 5}}{2^{\log_2 3} - \log_2 \log_3 3^4} = \frac{4^{\log_4 25}}{3 - \log_2 4} = \frac{25}{3-2} = 25.$$

Ответ: 25.

***Пример* 1.8.** Вычислить

$$\frac{3\log_2 28}{\log_{32} 2} - \frac{5\log_2 7}{\log_8 2} + \frac{\log_4 27 - \log_2 3}{\log_4 45 + \log_4 0{,}2}.$$

Решение. Преобразуем каждое слагаемое отдельно:

$$\frac{3\log_2 28}{\log_{32} 2} = 3\cdot\log_2 32\cdot\log_2 28 = 3\cdot\log_2 2^5\cdot\log_2(4\cdot 7) = 15(\log_2 4+\log_2 7) =$$

$$= 15(\log_2 2^2+\log_2 7) = 15(2+\log_2 7) = 30+15\log_2 7.$$

$$\frac{5\log_2 7}{\log_8 2} = 5\log_2 8\cdot\log_2 7 = 5\log_2 2^3\cdot\log_2 7 = 15\log_2 7.$$

$$\frac{\log_4 27-\log_2 3}{\log_4 45+\log_4 0{,}2} = \frac{\log_{2^2} 3^3-\log_2 3}{\log_{2^2}(3^2\cdot 5)+\log_{2^2} 5^{-1}} = \frac{\frac{3}{2}\log_2 3-\log_2 3}{\frac{1}{2}(\log_2 3^2+\log_2 5)-\frac{1}{2}\log_2 5} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\log_2 3}{\frac{1}{2}(2\log_2 3+\log_2 5-\log_2 5)} = \frac{\log_2 3}{2\log_2 3} = \frac{1}{2}.$$

Итак, получаем

$$\frac{3\log_2 28}{\log_{32} 2}-\frac{5\log_2 7}{\log_8 2}+\frac{\log_4 27-\log_2 3}{\log_4 45+\log_4 0{,}2} = 30+15\log_2 7-15\log_2 7+\frac{1}{2} = 30{,}5.$$

Ответ: 30,5.

***Пример* 1.9.** Найдите значение выражения $\lg a+\lg b$ при условии, что $\lg(0{,}01ab) = 2{,}5$.

Решение. По свойству логарифма (1.4) имеем

$$\lg a+\lg b = \lg(ab),$$

$$\lg(0{,}01ab) = \lg 0{,}01+\lg(ab) = -2+\lg(ab).$$

По условию задачи $\lg(0{,}01ab) = 2{,}5$, следовательно, $-2+\lg(ab) = 2{,}5$.

Значит, $\lg a+\lg b = 2{,}5+2 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

***Пример* 1.10.** Вычислить $\log_{49} 16$, если $\log_{14} 28 = a$.

Решение. Упростим, использовав свойства логарифма (1.6) и (1.7):

$$\log_{49} 16 = \log_{7^2} 4^2 = \log_7 4 = 2\log_7 2.$$

Введем обозначение $\log_7 2 = x$. Тогда $\log_{49} 16 = 2x$.

Выразим число $\log_{14} 28$ через x, использовав формулу (1.8):

$$\log_{14} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 14} = \frac{\log_7(2^2\cdot 4)}{\log_7(2\cdot 7)} = \frac{2\log_7 2+\log_7 7}{\log_7 2+\log_7 7} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

Так как по условию $\log_{14} 28 = a$, то задача сводится к решению уравнения

$$\frac{2x+1}{x+1}=a,$$

после решения получим

$$x=\frac{a-1}{2-a}.$$

Таким образом,

$$\log_{49}16=\frac{2(a-1)}{2-a}.$$

Ответ: $\frac{2(a-1)}{2-a}$.

При решении неравенств часто приходится полученные в ходе решения числовые выражения отмечать на числовой оси. Для этого необходимо установить, между какими последовательными целыми числами находится это число, или сравнивать значения числовых выражений. При этом используются свойства логарифмической функции.

Логарифмической функцией называют функцию вида $y=\log_a x$, где $a>0, a\neq 1$.

Логарифмическая функция $y=\log_a x,\ a>1$, график которой представлен на рис. 1.2,*а*, обладает следующими свойствами:

1) $D(f)=(0;+\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает на $(0;+\infty)$;

4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;

6) непрерывна;

7) $E(f)=(-\infty;+\infty)$;

8) выпукла вверх.

Логарифмическая функция $y=\log_a x,\ 0<a<1$, график которой представлен на рис. 1.2,*б*), обладает следующими свойствами:

1) $D(f)=(0;+\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) убывает на $(0; +\infty)$;

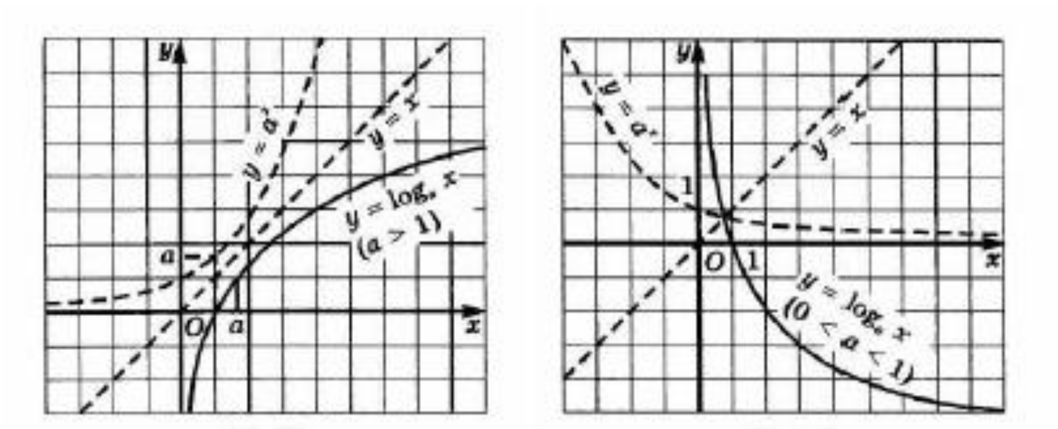
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

8) выпукла вниз.



а) *б*)

Рис. 1.2. Графики функций $\boldsymbol{y = \log_a x}$ и $\boldsymbol{y = a^x}$

Рассмотрим следующие примеры:

***Пример* 1.11.** Установить, между какими последовательными целыми числами находится число $\log_6 201$.

Решение. Поскольку логарифмическая функция с основанием 6 монотонно возрастает, то

$$\log_6 36 < \log_6 201 < \log_6 216,$$

$$\log_6 6^2 < \log_6 201 < \log_6 6^3,$$

$$2\log_6 6 < \log_6 201 < 3\log_6 6,$$

$$2 < \log_6 201 < 3.$$

Ответ: между 2 и 3.

***Пример* 1.12.** Сравнить числа:

а) $\log_{11} 110$ и $\log_{13} 180$;

б) $\log_2 3$ и $\log_6 9$;

в) $\log_2 3$ и $\log_3 7$.

Решение. 1. Поскольку оба логарифма к одному основанию привести трудно, то попробуем оценить каждый из них в отдельности. Используем тот факт, что логарифмические функции с основанием 11 и 13 монотонно возрастают, поэтому

$$\log_{11} 110 < \log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2,$$

$$\log_{13} 180 > \log_{13} 169 = \log_{13} 13^2 = 2.$$

Отсюда делаем вывод, что $\log_{11} 110 < \log_{13} 180$.

Ответ: $\log_{11} 110 < \log_{13} 180$.

2. Установим, между какими последовательными целыми числами находятся числа $\log_2 3$ и $\log_6 9$. Используем тот факт, что логарифмические функции с основанием 2 и 6 монотонно возрастают, получим

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4\,, \text{т. е.}\, 1 < 1\text{og}_2\, 3 < 2.$$

$$\log_6 6 < \log_6 9 < \log_6 36\,, \text{т. е.}\, 1 < 1\text{og}_6\, 9 < 2.$$

Значит, оба числа принадлежат интервалу $(1; 2)$. Тогда сравним каждое из этих чисел с серединой этого отрезка, т.е. с числом $\frac{3}{2}$.

Что бы сравнить числа $\log_2 3$ и $\frac{3}{2}$, число $\frac{3}{2}$ представим как $\log_2 2^{\frac{3}{2}}$, т.е. как $\log_2 \sqrt{8}$. А поскольку $\log_6 9 = \log_6 \sqrt{81}$ и основание логарифма 6>1, то делаем вывод, что $\log_6 9 < \frac{3}{2}$.

Таким образом, $\log_2 3 > \frac{3}{2}, \log_6 9 < \frac{3}{2}$, значит, $\log_2 3 > \log_6 9$.

Ответ: $\log_2 3 > \log_6 9$.

3. Данные числа принадлежат интервалу $(1; 2)$. Если попробовать решить предыдущим способом, то придется сначала один раз сравнить эти числа с серединой этого отрезка, т.е. с числом $\frac{3}{2}$, а потом еще раз придется сравнивать эти числа с серединой отрезка $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, то есть с числом $\frac{7}{4}$.

Рассмотрим другой способ.

Преобразуем числа $3\log_2 3$ и $3\log_3 7$:

$$3\log_2 3 = \log_2 3^3 = \log_2 27 < \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5,$$

$$3\log_3 7 = \log_3 7^3 = \log_3 343 > \log_3 243 = \log_3 3^5 = 5.$$

Значит, $3\log_2 3 < 3\log_3 7$, следовательно, $\log_2 3 < \log_3 7$.

Ответ: $\log_2 3 < \log_3 7$.

1.3. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений

При выполнении тождественных преобразований показательных и логарифмических выражений используются как свойства степеней, логарифмов, показательной и логарифмической функций, описанных в п. 1.1. и 1.2, так и формулы сокращенного умножения и методы тождественных преобразований алгебраических выражений.

***Пример* 1.13.** Упростить выражение $\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Решение. Воспользуемся формулой суммы кубов и свойствами степеней 1) и 3), получим

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}}{\left(a^{3\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1.$$

Ответ: 1.

***Пример* 1.14.** Вычислить $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$.

Решение. Воспользовавшись тем, что $49 = 7^2$, а также свойством степеней 3), получим

$$7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25}.$$

Показатель степени можно преобразовать следующим образом:

$$2-\frac{1}{2}\log_7 25 = 2-\log_7 5 = \log_7 49 - \log_7 5 = \log_7\frac{49}{5}.$$

Итак, $7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25} = 7^{\log_7\frac{49}{5}}$. Но из основного логарифмического тождества следует, что

$$7^{\log_7\frac{49}{5}} = \frac{49}{5}.$$

Таким образом, $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25} = 9{,}8$.

Ответ: 9,8.

***Пример* 1.15.** Вычислить $81^{1/\log_5 3} + \left(\sqrt{7}\right)^{2/\log_{25} 7} - 125^{\log_{25} 6}$.

Решение. По свойству логарифмов (1.9) получаем:

$$81^{1/\log_5 3} = 81^{\log_3 5}.$$

Используя свойства степеней, получаем

$$81^{\log_3 5} = (3^4)^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^4.$$

Согласно определению логарифма $3^{\log_3 5} = 5$. Таким образом,

$$81^{1/\log_5 3} = 5^4 = 625.$$

Аналогично

$$\left(\sqrt{7}\right)^{2/\log_{25} 7} = 7^{1/\log_{25} 7} = 7^{\log_7 25} = 25,$$

$$125^{\log_{25} 6} = (5^3)^{\log_{5^2} 6} = (5^3)^{\frac{1}{2}\log_5 6} = \left(5^{\log_5 6}\right)^{3/2} = 6^{3/2} = 6\sqrt{6}.$$

Складывая полученные значения, имеем $650 - 6\sqrt{6}$.

Ответ: $650 - 6\sqrt{6}$.

***Пример* 1.16.** Упростить выражение $16^{\log_4 a + \log_2 a} \cdot 5^{6/\log_a 0{,}2}$.

Решение. По свойствам степеней 1), 3) и логарифмов (1.1), (1.6), (1.7), (1.9) получаем

$$16^{\log_4 a + \log_2 a} \cdot 5^{6/\log_a 0{,}2} = 16^{\frac{1}{2}\log_2 a + \log_2 a} \cdot 5^{6\log_{0{,}2} a} =$$
$$= 2^{4\left(\frac{1}{2}\log_2 a + \log_2 a\right)} \cdot 5^{-6\log_5 a} = 2^{4\cdot\frac{3}{2}\log_2 a} \cdot 5^{\log_5 a^{-6}} = 2^{6\log_2 a} \cdot a^{-6} =$$
$$= a^6 \cdot a^{-6} = a^0 = 1.$$

Ответ: 1.

***Пример* 1.17.** Упростить выражение $\frac{(\log_2 10)^2 + \log_2 10 \cdot \log_2 5 - 2(\log_2 5)^2}{\log_4 75 - \log_2 \sqrt{3}}$.

Решение. По свойствам логарифмов (1.4)–(1.7) и (1.9), а также используя формулу разности квадратов двух выражений, получаем:

$$(\log_2 10)^2 + \log_2 10 \cdot \log_2 5 - 2(\log_2 5)^2 =$$

$$= (\log_2 10)^2 - (\log_2 5)^2 + \log_2 10 \cdot \log_2 5 - (\log_2 5)^2 =$$

$$= (\log_2 10 - \log_2 5)(\log_2 10 + \log_2 5) + \log_2 5\,(\log_2 10 - \log_2 5) =$$

$$= \log_2 \frac{10}{5} \cdot (\log_2 10 + \log_2 5) + \log_2 5 \log_2 \frac{10}{5} =$$

$$= \log_2 10 + \log_2 5 + \log_2 5 = \log_2 10 + 2\log_2 5 =$$

$$= \log_2(2 \cdot 5) + 2\log_2 5 = 1 + 3\log_2 5.$$

Окончательно имеем

$$\frac{(\log_2 10)^2 + \log_2 10 \cdot \log_2 5 - 2(\log_2 5)^2}{\log_4 75 - \log_2 \sqrt{3}} = \frac{1 + 3\log_2 5}{\log_{2^2} 75 - \log_2 \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1 + 3\log_2 5}{0{,}5\log_2 75 - \log_2 \sqrt{3}} = \frac{1 + 3\log_2 5}{\log_2 \sqrt{75} - \log_2 \sqrt{3}} = \frac{1 + 3\log_2 5}{\log_2 \sqrt{25}}$$

$$= \frac{1 + 3\log_2 5}{\log_2 5} == \frac{1}{\log_2 5} + \frac{3\log_2 5}{\log_2 5} = \log_5 2 + 3 = \log_5 250.$$

Ответ: $\log_5 250$.

***Пример* 1.18.** Вычислить значение выражения

$$\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} + \log_{\sqrt{ab}} b + \log_a \sqrt[3]{b},$$

если известно, что $\log_{b\sqrt{a}} \frac{b}{a} = \frac{2}{5}$.

Решение. Приведем все логарифмические выражения к одному и тому же основанию, например к основанию a (заметим, что можно и к любому другому основанию, например 2, 10 и т. д.):

1) $\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} + \log_{\sqrt{ab}} b + \log_a \sqrt[3]{b} = \frac{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}}{\log_a ab} + \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{ab}} + \log_a \sqrt[3]{b} =$

$$= \frac{\log_a \sqrt{b} - \log_a a}{\log_a a + \log_a b} + \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a ab} + \log_a \sqrt[3]{b} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\log_a b - 1}{1 + \log_a b} + \frac{2\log_a b}{1 + \log_a b} + \frac{1}{3}\log_a b = \frac{\frac{5}{2}\log_a b - 1}{1 + \log_a b} + \frac{1}{3}\log_a b\,;$$

2) $\log_{b\sqrt{a}}\dfrac{b}{a}=\dfrac{\log_a\dfrac{b}{a}}{\log_a b\sqrt{a}}=\dfrac{\log_a b-\log_a a}{\log_a b+\log_a\sqrt{a}}=\dfrac{\log_a b-1}{\log_a b+0{,}5}$;

3) Так как по условию задачи $\log_{b\sqrt{a}}\frac{b}{a}=\frac{2}{5}$, то $\frac{\log_a b-1}{\log_a b+0{,}5}=\frac{2}{5}$, откуда находим значение выражения$\log_a b$:

$$5\log_a b-5=2\log_a b+2\cdot 0{,}5{,}3\log_a b=6,\qquad \log_a b=2;$$

4) Окончательно получаем, что

$$\log_{ab}\frac{\sqrt{b}}{a}+\log_{\sqrt{ab}}b+\log_a\sqrt[3]{b}=\frac{\frac{5}{2}\cdot 2-1}{1+2}+\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

Ответ: 2.

***Пример* 1.19.** Вычислить значение выражения

$$\frac{3\log_5 15\cdot\log_5 9-2(\log_5 15)^2-(\log_5 9)^2}{\log_5 9-\log_5 15}.$$

Решение. Использовав свойства степеней и логарифмов, получим

$$\frac{3\log_5 15\cdot\log_5 9-2(\log_5 15)^2-(\log_5 9)^2}{\log_5 9-\log_5 15}=$$

$$=\frac{3(\log_5 5+\log_5 3)\log_5 9-2(\log_5 5+\log_5 3)^2-(2\log_5 3)^2}{\log_5\frac{9}{15}}=$$

$$=\frac{6\log_5 3\,(1+\log_5 3)-2(1+\log_5 3)^2-4(\log_5 3)^2}{\log_5\frac{3}{5}}.$$

Раскроем все скобки:

$$\frac{6\log_5 3+6(\log_5 3)^2-2-4\log_5 3-2(\log_5 3)^2-4(\log_5 3)^2}{\log_5\frac{3}{5}}=\frac{2\log_5 3-2}{\log_5\frac{3}{5}}$$

$$=\frac{2\,(\log_5 3-1)}{\log_5\frac{3}{5}}=\frac{2\,(\log_5 3-\log_5 5)}{\log_5\frac{3}{5}}=\frac{2\log_5\frac{3}{5}}{\log_5\frac{3}{5}}=2.$$

Ответ: 2.

***Пример* 1.20.** Вычислить значение выражения

$$10\log_3\left(5+2\sqrt{6}\right)+\log_3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+21\log_3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

Решение. Используем равенство $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5+2\sqrt{6}$. Имеем

$$10\log_3\left(5+2\sqrt{6}\right)+\log_3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+21\log_3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$$
$$=10\log_3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+\log_3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+21\log_3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$$
$$=20\log_3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\log_3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+21\log_3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$$
$$=21\log_3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+21\log_3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$$
$$=21\log_3\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)=21\log_3(3-2)=21\log_3 1=$$
$$=21\cdot 0=0.$$

Ответ: 0.

***Пример* 1.21.** Считая, что $\log_b a = 3$, находим значение выражения

$$\log^2_{\sqrt[3]{a}} b+\log_{\sqrt[3]{b}} a.$$

Решение. По определению логарифма из равенства $\log_b a = 3$ следует, что $b^3 = a$. Выполняя соответствующую подстановку в заданное выражение и проводя преобразования, получаем

$$\log^2_{\sqrt[3]{a}} b+\log_{\sqrt[3]{b}} a=\log^2_{\sqrt[3]{b^3}} b+\log_{\sqrt[3]{b}} b^3=\log^2_b b+3\cdot 3\cdot\log_b b=1+9=10.$$

Ответ: 10.

***Пример* 1.22.** Какое из чисел больше, $2^{\sqrt{\log_2 3}}$ или $3^{\sqrt{\log_3 2}}$?

Решение. Прологарифмируем оба выражения по основанию 3:

$$\log_3 2^{\sqrt{\log_2 3}}=\sqrt{\log_2 3}\cdot\log_3 2=\frac{\sqrt{\log_2 3}}{\log_2 3}=\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}.$$
$$\log_3 3^{\sqrt{\log_3 2}}=\sqrt{\log_3 2}\cdot\log_3 3=\sqrt{\log_3 2}=\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}.$$

Получили равные выражения, а значит, исходные числа равны.

Ответ: числа равны.

***Пример* 1.23.** Без таблиц определите, что больше, $\log_5 7$ или $\log_{13} 17$?

Решение. Приведение к одному основанию ничего хорошего не дает. Однако заметим, что $1<\log_5 7<2,\ 1<\log_{13} 17<2$. Сравним тогда числа

$$\log_5 7-1=\log_5 7-\log_5 5=\log_5\frac{7}{5}\quad \text{и}$$

$$\log_{13} 17 - 1 = \log_{13} 17 - \log_{13} 13 = \log_{13} \frac{17}{13}.$$

Но $\log_5 \frac{7}{5} > \log_{13} \frac{7}{5} > \log_{13} \frac{17}{13}$, а тогда $\log_5 7 > \log_{13} 17$.

Ответ: $\log_5 7 > \log_{13} 17$.

***Пример* 1.24.** Чему равно значение выражения $7^{\sqrt[3]{\log_7 3}} - 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}} - 2$?

Решение. Использовав основное логарифмическое тождество для числа 7, исходное выражение запишем так:

$$3^{\log_3 7 \cdot \sqrt[3]{\log_7 3}} - 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}} - 2 = 3^{\sqrt[3]{\log_3^3 7 \cdot \log_7 3}} - 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}} - 2 =$$

$$= 3^{\sqrt[3]{\log_3^3 7 \cdot \frac{1}{\log_3 7}}} - 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}} - 2 = 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}} - 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}} - 2 = -2.$$

Ответ: -2.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

URL: https://learningapps.org/watch?v=pcb8r8o3c24

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислить значения выражений:

1.1.

а) $3^{-4} \cdot 27^{\frac{-2}{3}} \cdot 9 - 27^{-1\frac{1}{3}} + (8^0)^3 \cdot 2 + (0{,}125)^{-\frac{1}{3}}$;

б) $9^{-\frac{5}{2}} + 10(4^0)^5 - (0{,}25)^{-\frac{3}{2}} - 9^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-5} \cdot 27$;

в) $9^{-\frac{3}{2}} - (5^0)^3 \cdot 3 - (0{,}01)^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-3} \cdot 9$;

г) $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}} + 27^{-2\frac{1}{3}} + (6^0)^5 \cdot 2 - 81^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-4} \cdot 27$;

д) $64^{-\frac{5}{6}} - (0{,}125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} \cdot 2^{-4} + (3^0)^4 \cdot 4$;

е) $16^{-\frac{5}{4}} - (0{,}01)^{-\frac{1}{2}} + 12 \cdot (7^0)^3 - 16 \cdot 2^{-4} \cdot 4^{-\frac{5}{2}}$.

1.2.

а) $\frac{3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}\cdot\sqrt[4]{27}}{3^{-\frac{1}{4}}}$; **б)** $\frac{\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{9}{2}}\cdot 32^{-0,2}}{2^{4}}$.

1.3.

а) $4\cdot 0{,}0025^{-0,5}\cdot\sqrt[3]{0{,}001}$; **б)** $5\cdot\sqrt[3]{0{,}0004}\cdot 0{,}216^{-\frac{1}{3}}$.

Задание 2. Упростите выражения

а) $\frac{(b^{2})^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{-2}{5}}}$; **б)** $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{2}\sqrt[3]{a^{2}}$;

в) $\left(b^{\frac{5}{6}}\right)^{3}\sqrt[4]{b^{3}}$; г) $\left(n^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{4}}:\sqrt{n^{3}}$.

Задание 3. Вычислите значения логарифмических выражений

3.1. $\log_2\log_{81}\frac{417}{139}$;

3.2. $\log_{12}3\cdot\log_9 12$;

3.3. $\frac{1}{3}\log_6 27-\frac{2}{3}\log_6 125+\log_{\frac{1}{6}}0{,}1$;

3.4. $\log_2\left(\log_{\sqrt{2}}9\cdot\log_{\sqrt{3}}2\right)$;

3.5. $\log_{\sqrt{5}}7\cdot\log_7 5\cdot\log_7\left(2+16^{\log_4\sqrt{7}}\right)$;

3.6. $\log_3\sqrt{\log_5 4}+\log_9\log_{64}5$;

3.7. $2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$;

3.8. $2^{\frac{\log_2 5}{\log_5 2}}-5^{\log_2 5}$;

3.9. $\frac{\log_3 37}{\log_{21}37}-\log_3 7$;

3.10. $27^{\log_{81}(\log_2 36+\log_{0,5}9)}$;

3.11. $\frac{\log_{12}30}{\log_3 30}+\log_{12}4$;

3.12. $\log_5 3\cdot\log_3^2 15-\frac{(\log_3 5-1)^2}{\log_3 5}$;

3.13. $\frac{2\log_6 2}{\log_4 6}+\frac{2\log_6 9+4\log_{36}16}{\log_3 6}$;

3.14. $\left(\frac{\log_5 150}{\log_6 5}-\frac{\log_5 30}{\log_{30}5}\right)\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}25$;

3.15. $\left(\sqrt[3]{25}\right)^{\log_5 \sqrt{27}} - \left(\sqrt{\sqrt[3]{3}}\right)^{\log_3 64} - \frac{1}{2}\log_3\left|5 - 2\sqrt{6}\right| - \log_3\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$;

3.16. $5\lg\left(3 + 2\sqrt{2}\right) - 13\lg\left(\sqrt{2} + 1\right) - 3\lg\left|1 - \sqrt{2}\right|$;

3.17. $2\log_5\left(9 - 2\sqrt{14}\right)^2 - 6\log_5\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right) - 2\log_5\left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)$;

3.18. $2\log_5\left(9 - 6\sqrt{2}\right) + 3\log_3\left(\sqrt{6} + \sqrt{3}\right) - \log_3\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)$.

Задание 4. Найти:

4.1. $\log_{c^2 b}(cb)$, если $\log_{\sqrt{\frac{c}{a}}}\left(\frac{c^2}{b}\right) = 4$;

4.2. $\log_{\sqrt{a}}\left(b\sqrt[4]{a}\right) + \log_b a^2 + \log_a \sqrt{ab}$, если $\log_{a\sqrt{b}} \frac{a}{b} = 2$;

4.3. $\log_6 32$, если $\log_{12} 2 = a$;

4.4. $\log_3 0{,}18$, если $\lg 2 = a, \lg 3 = b$;

4.5. $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = a,\ \log_{12} 18 = b$;

4.6. $\log_5 24$, если $\log_5 3 = a,\ \log_5 2 = b$;

4.7. $\log_3 7$, если $\log_{12} 7 = a,\ \log_{12} 2 = b$;

4.8. $\log_{100} 40$, если $\log_2 5 = a$;

4.9. $\log_{275} 60$, если $\log_{12} 5 = a,\ \log_{12} 11 = b$;

4.10. $\log_5 3{,}38$, если $\lg 2 = a, \lg 13 = b$.

Задание 5. Без помощи таблиц определить, что больше:

5.1. $\log_2 3$ и $\log_{\frac{1}{4}} 5$;

5.2. $\log_4 5$ и $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{25}$;

5.3. $\log_5 7$ и $\log_8 3$;

5.4. $\log_2 3$ и $\log_5 8$?

Задание 6. Докажите тождества

6.1. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$;

6.2. $\log_{ab} k = \frac{\log_a k \cdot \log_b k}{\log_a k + \log_b k}$;

6.3. $\frac{\log_a k}{\log_{ab} k} = 1 + \log_a b$;

6.4. $\log_{bk} ak = \frac{\log_b a + \log_b k}{1 + \log_b k}$;

6.5. $\frac{1}{\log_a k}+\frac{1}{\log_{a^2} k}+\frac{1}{\log_{a^3} k}+\frac{1}{\log_{a^4} k}+\frac{1}{\log_{a^5} k}=15\log_k a$;

6.6. $\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, если $a^2+b^2=7ab$;

6.7. $\lg\frac{a+2b}{4}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, если $a^2+4b^2=12ab$;

Задание 7. Упростите выражения:

7.1. $(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$;

7.2. $\frac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a\frac{a}{b}}$;

7.3. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$;

7.4. $0{,}2\left(2a^{\log_2 b}+3b^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{a}}\right)$.

Задание 8.*

8.1. При каких значениях параметра a выражение $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-\sqrt{a}}$ больше выражения $0{,}25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$ при всех допустимых значениях x?

8.2. При каких значениях параметра a выражение $(1-2^x)^{\log_2(1-2^x)-2^a}$ больше выражения $0{,}5^{3-\sqrt{a}-\log_4(1+4^x-2^{x+1})}$ при всех допустимых значениях x?

2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Показательные уравнения

Показательным уравнением называют уравнение, в котором переменная содержится в показателе степени.

При решении показательных уравнений используются два основных метода:

1) переход от уравнения вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ к уравнению $f(x)=g(x)$;

2) введение новых переменных.

Решение показательных уравнений основано на следующей теореме:

Теорема 2.1. Если $a>0$ и $a\neq 1$, то уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Рассмотрим простейшее показательное уравнение

$$ax = b \text{ при } a > 0, a \neq 1. \tag{2.1}$$

Показательная функция $y = a^x$ монотонна и принимает только положительные значения. Поэтому:

- при любом $b > 0$ уравнение (2.1) имеет единственный корень

$$x = \log_a b;$$

- при $b \leq 0$ уравнение (2.1) не имеет корней.

Рассмотрим подробнее основные методы решения показательных уравнений на примерах.

Простейшие показательные уравнения

***Пример* 2.1.** Решить уравнение $4^x = 64$.

Решение. Так как $64 = 4^3$, то получим уравнение $4^x = 4^3$, тогда согласно теореме 2.1 получаем $x = 3$.

Ответ: 3.

***Пример* 2.2.** Решить уравнение $2^x = -3$.

Решение. $x \in \varnothing$, так как $b = -3 < 0$, а показательная функция принимает только положительные значения.

Ответ: решений нет.

***Пример* 2.3.** Решить уравнение

$$8^{x+2} = 32^{1-x}.$$

Решение. Заметим, что $8 = 2^3$ и $32 = 2^5$:

$$(2^3)^{x+2} = (2^5)^{1-x}, \text{ т. е.}$$

$$2^{3(x+2)} = 2^{5(1-x)}.$$

Поскольку функция $y = 2^x$ монотонно возрастает, равенство $2^a = 2^b$ эквивалентно равенству $a = b$. Следовательно, $3(x + 2) = 5(1 - x)$, откуда $x = -\frac{1}{8}$. *Ответ*: $-\frac{1}{8}$.

***Пример* 2.4.** Решить уравнение

$$\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = \frac{0{,}04^x}{25}.$$

Решение. Основная идея решения данного уравнения заключается в использовании свойств степеней для приведения выражений в левой и правой части уравнения к одному и тому же основанию. Запишем цепочку преобразований

$$\frac{(5^{-1})^{x+0,5}}{5^{0,5}}=\frac{(5^{-2})^{x}}{5^{2}},$$

откуда

$$5^{-x-1}=5^{-2x-2}.$$

Поскольку функция $y=5^x$ монотонна на всей числовой оси и поэтому каждое свое значение принимает ровно один раз, то последнее уравнение равносильно уравнению $-x-1=-2x-2$, из которого находим $x=-1$.

Ответ: -1.

Вынесение за скобку степени с наименьшим показателем

***Пример* 2.5.** Решить уравнение

$$3^{x+1}+3^x-3^{x-2}=35.$$

Решение. Метод решения уравнений такого вида: вынести за скобки степень с наименьшим показателем. В данном случае выносим за скобки 3^{x-2}:

$$3^{(x-2)}(3^3+3^2-1)=35 \;\Leftrightarrow\; 3^{(x-2)}\cdot 35=35 \;\Leftrightarrow\; 3^{(x-2)}=1.$$

Последнее равенство запишем как $3^{x-2}=3^0$ и ввиду монотонности показательной функции заключаем, что $x-2=0,$ то есть $x=2$.

Ответ: 2.

***Пример* 2.6.** Решить уравнение

$$3^{x+1}+3^x+3^{x+2}=5^x+5^{x+2}.$$

Решение. Так как $3^{x+1}=3\cdot 3^x$; $3^{x+2}=9\cdot 3^x$; $5^{x+2}=25\cdot 5^x$, то заданное уравнение перепишем в виде

$$3^x+3\cdot 3^x+9\cdot 3^x=5^x+25\cdot 5^x \quad \text{или}$$

$$13\cdot 3^x=26\cdot 5^x, \text{т. е.}\, 3^x=2\cdot 5^x.$$

Далее имеем

$$\frac{3^x}{5^x}=2, \left(\frac{3}{5}\right)^x=2, x=\log_{0,6}2.$$

Ответ: $\log_{0,6}2$.

Метод разложения на множители

***Пример* 2.7.** Решить уравнение

$$5^{2x+1} + 6^{x+1} = 30 + 150^x.$$

Решение. Так как $5^{2x+1} = 5 \cdot 25^x$, $6^{x+1} = 6 \cdot 6^x$, $150^x = 6^x \cdot 25^x$, то заданное уравнение можно преобразовать к виду

$$5 \cdot 25^x + 6 \cdot 6^x - 6^x \cdot 25^x - 30 = 0$$

и далее

$$5(25^x - 6) - 6^x(25^x - 6) = 0,$$

$$(25^x - 6)(5 - 6^x) = 0.$$

Решение последнего уравнения сводится к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 25^x - 6 = 0; \\ 5 - 6^x = 0, \end{array}\right.$$

которая имеет такие корни: $x_1 = \log_{25} 6$, $x_2 = \log_6 5$. Найденные значения x являются корнями заданного уравнения.

Ответ: $\{\log_{25} 6, \log_6 5\}$.

Метод введения новой переменной

***Пример* 2.8.** Решить уравнение

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0.$$

Решение. Так как $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ и $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, то заданное уравнение можно переписать следующим образом:

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Введем новую переменную, положив $u = 2^x$, и решим полученное квадратное уравнение $u^2 + 2u - 24 = 0$. Его корнями являются $u_1 = 4$, $u_2 = -6$. Таким образом, решение заданного уравнения сводится к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4; \\ 2^x = -6. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения этой совокупности получаем $x = 2$, а второе уравнение корней не имеет, так как $2^x > 0$, а $-6 < 0$.

Ответ: 2.

***Пример* 2.9.** Решить уравнение

$$2^{2x+2\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6.$$

Решение. Перепишем заданное уравнение следующим образом:

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0.$$

Положив теперь $u = 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$, получим квадратное уравнение

$$u^2 - \frac{5}{2}u - 6 = 0, \text{откуда } u_1 = 4,\ u_2 = -\frac{3}{2}.$$

Таким образом, решение заданного уравнения сводится к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4; \\ 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения получаем $x + \sqrt{x^2-2} = 2$, $\sqrt{x^2-2} = 2 - x$, $x^2 - 2 = (2-x)^2$, $x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$, $4x = 6$, откуда $x = \frac{3}{2}$.

Второе уравнение корней не имеет, так как степень числа 2 не может быть отрицательным числом.

Проверка. Подставляя $x = \frac{3}{2}$ в уравнение $x + \sqrt{x^2-2} = 2$, убеждаемся, что значение $x = \frac{3}{2}$ является корнем этого уравнения. Но тогда $x = \frac{3}{2}$ является корнем и заданного уравнения.

Ответ: 1,5.

***Пример* 2.10.** Решить уравнение

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^x + \left(4-\sqrt{15}\right)^x = 8.$$

Решение. Заметим, что основания, то есть числа $4+\sqrt{15}$ и $4-\sqrt{15}$, являются взаимно обратными.

Отметим, что числа $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$ иногда называют сопряженными числами.

В самом деле, легко убедится, что выполняется соотношение

$$\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right) = 16 - 15 = 1,$$

а поэтому легко можно выразить одно основание степени через другое:

$$4+\sqrt{15}=\frac{1}{4-\sqrt{15}},$$

и получить уравнение, в котором все степени имеют одинаковые основания:

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4+\sqrt{15}\right)^{-x}=8.$$

Далее введем новую переменную t по формуле

$$t=\left(4+\sqrt{15}\right)^x, t>0.$$

Тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$t+\frac{1}{t}=8,$$

далее, учитывая, что $t=0$ не является его решением, получаем

$$t^2-8t+1=0.$$

Корни последнего уравнения равны

$$t_1=4+\sqrt{15},\ \ t_2=4-\sqrt{15},$$

откуда находим значения исходной переменной $x_{1,2}=\pm 1$.

Ответ: $\{-1,1\}$.

Метод введения новой переменной часто используется при решении ***однородных показательных уравнений***. Рассмотрим примеры.

***Пример* 2.11.** Решить уравнение

$$2\cdot 4^x+6\cdot 9^x=7\cdot 6^x.$$

Решение. Подставим в уравнение $4=2^2, 9=3^2$ и $6=2\cdot 3$:

$$2\cdot 2^{2x}-7\cdot 2^x\cdot 3^x+6\cdot 3^{2x}=0.$$

Поделим обе части уравнения на величину 3^{2x}, которая ни при каких x не обращается в нуль. В результате получим равносильное уравнение

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+6=0.$$

Дальше выполняем замену $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ и получаем квадратное уравнение

$$2t^2-7t+6=0.$$

Его корни равны 2 и 3/2. Обратная замена приводит к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \log_{\frac{2}{3}} 2, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1, \log_{\frac{2}{3}} 2\}$.

***Пример* 2.12.** Решить уравнение

$$(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x}. \qquad (2.2)$$

Решение. При решении этого ***показательно-степенного уравнения*** возможны пять случаев:

1) $x^2 + x - 57 = 1$; 2) $x^2 + x - 57 = -1$; 3) $x^2 + x - 57 = 0$;

4) $\begin{cases} x^2 + x - 57 > 0, \\ x^2 + x - 57 \neq 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + x - 57 < 0, \\ x^2 + x - 57 \neq -1. \end{cases}$

Рассмотрим эти случаи:

1. $x^2 + x - 57 = 1$, то есть $x^2 + x - 58 = 0$.

В этом случае уравнение (2.2) принимает вид $1^{3x^2+3} = 1^{10x}$, то есть $1 = 1$. Значит, корни уравнения $x^2 + x - 58 = 0$ являются и корнями уравнения (2.2). Из уравнения $x^2 + x - 58 = 0$ находим $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$.

2. $x^2 + x - 57 = -1$, то есть $x^2 + x - 56 = 0$. В этом случае уравнение (2.2) принимает вид

$$(-1)^{3x^2+3} = (-1)^{10x}4. \qquad (2.3)$$

Уравнению (2.3) могут удовлетворять только такие значения x, при которых $3x^2 + 3$ и $10x$ – целые числа (поскольку отрицательное число (–1) можно возвести лишь в целую степень) одинаковой четности (то есть либо оба четные, либо оба нечетные).

Из уравнения $x^2 + x - 56 = 0$ находим $x_1 = -8$, $x_2 = 7$. Значение $x_1 = -8$ не удовлетворяет уравнению (2.3), а значение $x_2 = 7$ удовлетворяет. Значит, $x = 7$ – корень уравнения (2.2).

3. $x^2 + x - 57 = 0$. В этом случае уравнение (2.2) принимает вид

$$0^{3x^2+3} = 0^{10x}. \qquad (2.4)$$

Уравнению (2.4) могут удовлетворять только такие значения x, при которых $3x^2 + 3 > 0$ (это верно при всех x) и $10x > 0$, в этом случае уравнение (2.4) примет вид $0 = 0$ (напомним, что выражение 0^r имеет смысл лишь при $r > 0$).

Из уравнения $x^2 + x - 57 = 0$ находим $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{229}}{2}$. Значение $x_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{229}}{2}$ не удовлетворяет условию $10x > 0$, а $x_2 = \frac{-1+\sqrt{229}}{2}$ удовлетворяет этому условию. Значит, $x = \frac{-1+\sqrt{229}}{2}$ – корень уравнения (2.2).

4. Если $x^2 + x - 57 > 0$ и $x^2 + x - 57 \neq 1$, то из уравнения (2.2) заключаем, что $3x^2 + 3 = 10x$, откуда находим $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Ни один из этих корней уравнения $3x^2 - 10x + 3 = 0$ не удовлетворяет неравенству $x^2 + x - 57 > 0$.

5. Если $x^2 + x - 57 < 0$ и $x^2 + x - 57 \neq 1$, то опять от уравнения (2.2) переходим к уравнению-следствию $3x^2 + 3 = 10x$, откуда находим $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Обязательна проверка этих корней подстановкой в исходное уравнение (2.2). При $x_1 = 3$ получаем $(-45)^{30} = (-45)^{30}$ – верное равенство, при $x_2 = \frac{1}{3}$ получаем $(-56\frac{5}{9})^{\frac{10}{3}} = (-56\frac{5}{9})^{\frac{10}{3}}$ – неверное равенство (так как возведение отрицательного числа в дробную степень не имеет смысла). Значит, лишь $x = 3$ является корнем уравнения (2.2).

В итоге, приходим к выводу, что уравнение (2.2) имеет пять корней: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{233}}{2}$, $x_3 = 7$, $x_4 = \frac{-1+\sqrt{229}}{2}$, $x_5 = 3$.

Ответ: $\{3;\ 7;\ \frac{-1\pm\sqrt{233}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{229}}{2}\}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=p0ynzwqsa24

2.2. Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестная находится под знаком логарифма и/или в основании логарифма.

При решении логарифмических уравнений, также как и при решении других типов уравнений, используются как равносильные, так и неравносильные преобразования. Напомним, что к равносильным преобразованиям относятся те, при выполнении которых множество корней исходного уравнения не меняется. Более подробно можно ознакомиться с ними в пособии [20]. Неравносильными являются те преобразования, при выполнении которых появляются посторонние корни или происходит потеря корней. Перечислим такие преобразования для логарифмических уравнений:

1) Замена уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ на уравнение $f(x) = g(x)$ может привести к появлению посторонних корней.

2) Посторонние корни могут появиться, если при решении уравнения заменить функцию $y = \log_a f(x) + \log_a g(x)$ на функцию $y = \log_a(f(x) \cdot g(x))$.

3) Посторонние корни могут появиться, если при решении уравнения заменить функцию $y = \log_a f(x) - \log_a g(x)$ на функцию $y = \log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$.

4) Посторонние корни могут появиться, если при решении уравнения заменить функцию $y = 2n \log_a f(x)$ на функцию $y = \log_a (f(x))^{2n}$, где n – натуральное число.

5) Посторонние корни могут появиться, если при решении уравнения заменить функцию $y = \log_a(f(x) \cdot g(x))$ на $y = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$.

6) Посторонние корни могут появиться, если при решении уравнения заменить функцию $y = \log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ на функцию $y = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$.

7) Посторонние корни могут появиться, если при решении уравнения заменить функцию $y = a^{\log_a f(x)}$ на функцию $y = f(x)$.

8) Потеря корней может произойти, если при решении уравнения заменить функцию $y = \log_a f^{2n}(x)$ на функцию $y = 2n \log_a f(x)$, где n – натуральное число.

9) Потеря корней может произойти, если при решении уравнения заменить функцию $y = \log_a(f(x) \cdot g(x))$ на функцию $y = \log_a f(x) + \log_a g(x)$.

10) Потеря корней может произойти, если при решении уравнения заменить функцию $y = \log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ на функцию $y = \log_a f(x) - \log_a g(x)$.

11) Посторонние корни могут появиться, если при решении уравнения заменить функцию $y = f(x)$ на функцию $y = a^{\log_a f(x)}$.

Обращаем внимание, что посторонними корнями могут оказаться и такие числа, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а поэтому нужна проверка путем непосредственной подстановки найденных чисел в заданное уравнение.

Рассмотрим основные методы решения логарифмических уравнений.

Простейшие логарифмические уравнения

Простейшие уравнения решаются ***с использованием определения логарифма.***

Уравнение вида

$$\log_a x = b, \qquad \text{где } a > 0, \qquad a \neq 1, \tag{2.5}$$

называют ***простейшим логарифмическим уравнением***.

***Пример* 2.13.** Решить уравнение

$$\log_3 x(x-2) = 1.$$

Решение. По определению логарифма $x(x-2) = 3$. Отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. При проверке убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\{-1;\ 3\}$.

***Пример* 2.14.** Найти корни уравнения

$$\lg\left(81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0.$$

Решение. По определению логарифма

$$81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}=10^0, \text{ то есть}$$

$$3^4\cdot 3^{\frac{x^2-8x}{3}}=1;$$

$$3^{4+\frac{x^2-8x}{3}}=3^0.$$

Отсюда $4+\frac{x^2-8x}{3}=0$, т. е. $x^2-8x+12=0, x_1=2, x_2=6$.

Ответ: $\{2;\ 6\}$.

Метод потенцирования

Суть метода заключается в следующем: с помощью формул уравнение привести к виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$. Это уравнение (при $a>0$, $a\neq 1$) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)>0,\ \ g(x)>0,\\ f(x)=g(x).\end{cases}$$

Можно использовать другой способ для решения уравнений такого вида: сначала решить уравнение $f(x)=g(x)$, а затем выполнить проверку корней уравнения, подставив их в исходное уравнение.

***Пример* 2.15.** Решить уравнение

$$\log_3(7-2x)=\log_3(x^2-3x-5).$$

Решение. Перейдем от этого уравнения к уравнению

$$7-2x=x^2-3x-5.$$

Далее получаем уравнение $x^2-x-12=0$, откуда $x_1=4,\ \ x_2=-3$.

Так как уравнение $x^2-x-12=0$ является следствием заданного уравнения, то найденные корни необходимо проверить.

Подставляя $x_1=4$ в левую часть заданного уравнения, получаем $7-2x_1<0$. Это значит, что $\log_3(7-2x_1)$ не существует, то есть $x_1=4$ – посторонний корень.

Далее, $\log_3(7-2x_2)=\log_3 13$ и $\log_3({x_2}^2-3x-5)=\log_3 13$.

Таким образом, $x = -3$ является корнем заданного уравнения.

Ответ: -3.

***Пример* 2.16.** Найти корни уравнения

$$\lg(x^3+8) - 0{,}5\lg(x^2+4x+4) = \lg 7.$$

Решение. Должны выполняться следующие условия:

$$x^3+8>0,\ \ x^2+4x+4>0. \qquad (2.6)$$

Перепишем уравнение так:

$$\lg(x^3+8) - \lg\sqrt{x^2+4x+4} = \lg 7 \ \Rightarrow \lg\frac{x^3+8}{\sqrt{x^2+4x+4}} = \lg 7.$$

Потенцируем:

$$\frac{x^3+8}{\sqrt{x^2+4x+4}} = 7, \qquad \text{то есть } \ \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{|x+2|} = 7,$$

$$x^2-2x-3=0, \qquad x_1 = 3,\ x_2 = -1.$$

При этих значениях x условия (2.6) выполняются.

Ответ: $\{-1;\ 3\}$.

Метод введения новой переменной

Обычно замену (подстановку) производят после некоторых преобразований данного уравнения.

***Пример* 2.17.** Решить уравнение

$$\log_x 9x^2 \cdot (\log_3 x)^2 = 4.$$

Решение. Используя формулы (1.4), (1.7) и (1.9), записываем уравнение так:

$$(\log_x 9 + \log_x x^2)\cdot(\log_3 x)^2 = 4,$$

$$(2\log_x 3 + 2)\cdot(\log_3 x)^2 = 4,$$

$$\left(\frac{2}{\log_3 x} + 2\right)\cdot(\log_3 x)^2 = 4.$$

Заменяем $\log_3 x = t$, тогда $\left(\frac{2}{t}+2\right)\cdot t^2 = 4,\ t^2+t-2=0.$

Отсюда $t_1 = -2,\ \ t_2 = 1,$ поэтому $\log_3 x = -2,\ \log_3 x = 1.$

Отсюда $x_1 = 3^{-2},\ x_2 = 3.$ Сделав проверку, можно убедиться, что x_1 и x_2 – корни данного уравнения.

Ответ: $\left\{\frac{1}{9}; 3\right\}$.

***Пример* 2.18.** Найти корни уравнения

$$\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8\sqrt{x^2} = 0.$$

Решение. Отметим, что

$$x < 0, \quad \log_8(-x) \geq 0. \qquad (2.7)$$

Упрощаем уравнение: $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8|x| = 0$, тогда с учетом (2.7) имеем $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8(-x) = 0$.

Обозначим $\log_8(-x) = t$, тогда $\sqrt{2t} - t = 0$, то есть $\sqrt{2t} = t \Rightarrow t \geq 0$. Отсюда $2t = t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.

Получаем

$$\log_8(-x) = 0, \qquad -x = 8^0, \ x_1 = -1;$$

$$\log_8(-x) = 2, \quad -x = 8^2, \qquad x_2 = -64.$$

Ответ: $\{-1; -64\}$.

Метод приведения к одному основанию

Обычно условие примера подсказывает, к какому основанию следует перейти. Используются формулы:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \ (c > 0, c \neq 1); \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \ \log_a b = \log_{a^k} b^k, \ k \neq 0.$$

Как правило, метод приведения к одному основанию «работает» с методом введения новой переменной.

***Пример* 2.19.** Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

Решение. $x > 0$, перейдем к основанию 2:

$$\log_2 x + \log_{4^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} + \log_{8^{\frac{1}{3}}} x^{\frac{1}{3}} = 11, \text{т. е.}$$

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 11.$$

Обозначим $\log_2 x = t$, тогда

$$t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t = 11, \qquad \frac{11}{6}t = 11, \qquad t = 6.$$

Значит, $\log_2 x = 6$, $\Rightarrow$ $x = 2^6 = 64$.

Ответ: 64.

***Пример* 2.20.** Решить уравнение

$$\log_x 2 - 3\log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$$

Решение. Переходим к основанию 2:

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{7}{6} = 0.$$

Замена $\log_2 x = t$ приводит к следующему уравнению:

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{2} + \frac{7}{6} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{3t^2 - 7t - 6}{6t} = 0.$$

Полученное уравнение имеет корни $t_1 = 3$, $t_2 = -\frac{2}{3}$. Выполнив обратную замену, получим

$$\left[\begin{aligned} &\log_2 x = 3, \\ &\log_2 x = -\frac{2}{3}, \end{aligned}\right.$$

отсюда

$$\left[\begin{aligned} &x = 8, \\ &x = 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left\{8, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right\}$.

***Пример* 2.21.** Найти корни уравнения

$$20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0.$$

Решение. Отметим, что $x > 0, x \neq \frac{1}{4}, x \neq \frac{1}{16},\ x \neq 2.$

Переходим к основанию 2:

$$20 \cdot \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4x} + 7 \cdot \frac{\log_2 x^3}{\log_2 16x} - 3 \cdot \frac{\log_2 x^2}{\log_2 \frac{x}{2}} = 0,$$

$$20 \cdot \frac{\frac{1}{2}\log_2 x}{\log_2 4 + \log_2 x} + 7 \cdot \frac{3\log_2 x}{\log_2 16 + \log_2 x} - 3 \cdot \frac{2\log_2 x}{\log_2 x - \log_2 2} = 0,$$

Но так как $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2,\ \log_2 16 = 4,$ то

$$\frac{10\log_2 x}{2+\log_2 x}+\frac{21\log_2 x}{4+\log_2 x}-\frac{6\log_2 x}{\log_2 x-1}=0.$$

Обозначим $\log_2 x = t$, тогда

$$\frac{10t}{t+2}+\frac{21t}{t+4}-\frac{6t}{t-1}=0, \qquad \text{то есть}$$

$$t\left(\frac{10}{t+2}+\frac{21}{t+4}-\frac{6}{t-1}\right)=0.$$

Отсюда $t_1 = 0$, (то есть $\log_2 x = 0$, или $x_1 = 1$) и

$$\frac{10}{t+2}+\frac{21}{t+4}-\frac{6}{t-1}=0, \qquad \text{то есть}$$

$$10t^2+30t-40+21t^2+21t-42-6t^2-36t-48=0,$$

то есть
$$25t^2+15t-130=0,$$

$$5t^2+3t-26=0 \;\Rightarrow\; t_1=2,\; t_2=-2{,}6,$$

тогда

$$\log_2 x = 2, \qquad x_2 = 4, \qquad \log_2 x = -\frac{13}{5}, \qquad x_3 = 2^{-\frac{13}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^{13}}} = \frac{1}{4\sqrt[5]{8}}.$$

Ответ: $\left\{1, 4, \frac{1}{4\sqrt[5]{8}}\right\}$.

2.3. Смешанные уравнения, содержащие показательные и логарифмические выражения

Метод логарифмирования

Обычно логарифмируют уравнения вида $f_1(x)^{f_2(x)} = f_3(x)$. Поясним этот метод на примерах.

***Пример* 2.22.** Решить уравнение

$$x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x},\; x>0.$$

Решение. Логарифмируем по основанию 10:

$$\lg\left(x^{\frac{\lg x+5}{3}}\right) = \lg\left(10^{5+\lg x}\right), \text{то есть}$$

$$\frac{\lg x+5}{3}\lg x = (5+\lg x)\cdot\lg 10.$$

Обозначим $\lg x = t$, тогда

$$\frac{(t+5)t}{3} = 5 + t, \text{ то есть}$$

$$t^2 + 5t = 15 + 3t, \qquad \text{то есть } t^2 + 2t - 15 = 0, t_1 = -5, t_2 = 3.$$

Получаем $\lg x = -5,\ \lg x = 3 \ \Rightarrow\ x_1 = 10^{-5},\ x_2 = 10^3$.

Ответ: $\{10^{-5}, 1000\}$.

***Пример* 2.23.** Решить уравнение

$$x^6 \cdot 5^{\log_{\frac{1}{x}} 5} = 11^{-\log_{\sqrt[5]{11}} 5}.$$

Решение. Отметим, что $x > 0,\ x \neq 1$. Проведем некоторые упрощения:

$$5^{\log_{\frac{1}{x}} 5} = 5^{\log_{(1/x)^{-1}} 5^{-1}} = 5^{\log_x 5^{-1}} = 5^{-\log_x 5},$$

$$11^{-\log_{\sqrt[5]{11}} 5} = 11^{-\log_{\left(\sqrt[5]{11}\right)^5} 5^5} = 11^{-\log_{11} 5^5} = 5^{-5}.$$

Поэтому уравнение принимает вид

$$x^6 \cdot 5^{-\log_x 5} = 5^{-5}.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию x:

$$\log_x\left(x^6 \cdot 5^{-\log_x 5}\right) = \log_x(5^{-5}), \text{то есть}$$

$$6 \cdot \log_x x + (-\log_x 5) \cdot \log_x 5 = -5 \log_x 5,$$

$$6 - \log_x 5 \cdot \log_x 5 + 5 \log_x 5 = 0.$$

Обозначим $\log_x 5 = t$, тогда

$$6 - t \cdot t + 5t = 0, \qquad \text{то есть}$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0,\ \ t_1 = 6, t_2 = -1.$$

Значит, $\log_x 5 = 6$ или $\log_x 5 = -1$. Отсюда $5 = x^6$, т. е. $x_1 = \sqrt[6]{5}$ или $5 = x^{-1}$, т. е. $x_2 = \frac{1}{5}$.

Ответ: $\left\{\sqrt[6]{5},\ \frac{1}{5}\right\}$.

***Пример* 2.24**. Решить уравнение

$$3 \cdot \log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x}).$$

Решение. Отметим, что

$$3^x - 5^{2-x} > 0. \tag{2.8}$$

Используя формулы $\log_a x^k = k \log_a |x|$ и $c = \log_a a^c$, получаем

$$\log_5 2^3 + \log_5 5^2 - \log_5 5^x = \log_5(3^x - 5^{2-x}).$$

Затем используем формулы:

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a|x_1| + \log_a|x_2|, \quad \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a|x_1| - \log_a|x_2|,$$

$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \;\; \Rightarrow \;\; f_1(x) = f_2(x), \;\; (f_1(x), f_2(x) > 0)$ – операция потенцирования.

Получаем $\log_5 \frac{8\cdot 25}{5^x} = \log_5\left(3^x - \frac{25}{5^x}\right)$, т.е. $\frac{200}{5^x} = 3^x - \frac{25}{5^x}$ или

$200 = 15^x - 25$, то есть $15^x = 15^2, x = 2$.

При этом значении x условие (2.8) выполняется.

Ответ: 2.

***Пример* 2.25.** Решить уравнение

$$4^{\log_2(1-x)} = 2x(x+1) - 5.$$

Решение. Областью определения данного уравнения является множество $x < 1$.

Преобразуем левую часть уравнения

$$4^{\log_2(1-x)} = 2^{2\log_2(1-x)} = 2^{\log_2(1-x)^2} = (1-x)^2.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид $(1-x)^2 = 2x(x+1) - 5$; $x^2 + 4x - 6 = 0$, откуда $x_1 = -2 - \sqrt{10}$, $x_2 = -2 + \sqrt{10}$.

Число $x = -2 + \sqrt{10}$ не является корнем исходного уравнения, так как не входит в область его определения, а число $x = -2 - \sqrt{10}$ входит. Значит, при $x = -2 - \sqrt{10}$ обе части исходного уравнения равны значению $19 + 6\sqrt{10}$. Следовательно, $x = -2 - \sqrt{10}$ является корнем заданного уравнения.

Ответ: $-2 - \sqrt{10}$.

***Пример* 2.26.** Решить уравнение

$$5^{2\lg x} - 4x^{\lg 5} = 5.$$

Решение. Применив основное логарифмическое тождество, преобразуем выражение $x^{\lg 5}$:

$$x^{\lg 5} = \left(10^{\lg x}\right)^{\lg 5} = \left(10^{\lg 5}\right)^{\lg x} = 5^{\lg x}.$$

Тогда исходное уравнение можно записать в таком виде:

$$5^{2\lg x} - 4 \cdot 5^{\lg x} - 5 = 0.$$

Введя обозначение $5^{\lg x} = t$, получим следующее квадратное уравнение: $t^2 - 4t - 5 = 0$, откуда $t_1 = -1, t_2 = 5$.

Итак, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 5^{\lg x} = -1, \\ 5^{\lg x} = 5. \end{array}\right.$$

Первое уравнение действительных корней не имеет, а второе имеет корень $x = 10$. Проверка показывает, что $x = 10$ является корнем заданного уравнения.

Ответ: 10.

***Пример* 2.27.** Решить уравнение

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} + x^{\sqrt{\log_x 2}} = 16.$$

Решение. Область определения исходного уравнения задается системой:

$$\begin{cases} \log_2 x \geq 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Прежде чем решать заданное уравнение, выведем важное равенство:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}},$$

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\sqrt{\frac{1}{\log_b a}}} = b^{\sqrt{\log_b a}}.$$

Согласно доказанному равенству, заданное уравнение можно записать в виде $2^{\sqrt{\log_2 x}} + 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 16$, откуда $2^{\sqrt{\log_2 x}} = 8$, $2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^3$, $\sqrt{\log_2 x} = 3$, $x = 2^9 = 512$.

Ответ: 512.

***Пример* 2.28.** Решить уравнение

$$\log_5(3 \cdot 2^{1+x} - 2^{-x} \cdot 5^{2x+1}) = x + \log_5 13.$$

Решение. Потенцируя по основанию пять, получим $3 \cdot 2^{1+x} - 2^{-x} \cdot 5^{2x+1} = 5^{x+\log_5 13}$, откуда $6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 5^x - 5 \cdot 5^{2x} = 0$. Учитывая, что $2^{2x} \neq 0$ ни при каких значениях x, делим обе части последнего уравнения на 2^{2x}. Получим $6 - 13 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = 0$. Положив

$\left(\frac{5}{2}\right)^x = t$, получим квадратное уравнение $5t^2 + 13t - 6 = 0$, откуда $t_1 = -3$, $t_2 = \frac{2}{5}$.

Значение $t = -3$ следует отбросить, так как при любых значениях x выражение $\left(\frac{5}{2}\right)^x$ положительно. Из уравнения $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{2}{5}$ имеем $x = -1$.

Проверка показывает, что число $x = -1$ является корнем заданного уравнения.

Ответ: -1.

***Пример* 2.29.** Решить уравнение

$$(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1).$$

Решение. Область определения заданного уравнения есть промежуток $x > -1$.

Проверим, является или нет число $x = 0$, которое входит в область определения исходного уравнения, корнем уравнения. Видим, что это число обращает уравнение в неверное равенство $1 = 100$, а значит, $x = 0$ не является корнем уравнения.

Проверим, является или нет число $x = 1$, которое также принадлежит области определения заданного уравнения, корнем. Видим, что при этом значении уравнение не обращается в верное числовое равенство, а значит, $x = 1$ не является корнем уравнения.

Для дальнейшего решения исходного уравнения прологарифмируем его

по основанию 10. Получим $\lg^2(x+1) = 2 + \lg(x+1)$. Положим что, $\lg(x+1) = t$, будем иметь $t^2 - t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Итак, имеем два логарифмических уравнения $\lg(x+1) = -1$ и $\lg(x+1) = 2$. Окончательно получаем $x_1 = -0{,}9$, $x_2 = 99$.

Ответ: $\{-0{,}9; 99\}$.

***Пример* 2.30.** Решить уравнение

$$\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x = 6^{\log_{0{,}2} 5}.$$

Решение. Использовав формулу $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x$, перейдем к логарифмам с одним и тем же основанием: $\log_3 x \cdot \frac{1}{2}\log_3 x \cdot \frac{1}{3}\log_3 x = 6^{-1}$, $\frac{1}{6}\log_3^3 x = \frac{1}{6}$, $\log_3^3 x = 1, \log_3 x = 1, x = 3$.

Ответ: 3.

При решении смешанных уравнений часто применяется функциональный подход. В таких случаях используются свойства функций, стоящих в левой и правой части уравнения.

***Пример* 2.31.** Решить уравнение

$$\log_2 \left| x + \frac{1}{x} \right| = x^2(3 - 2|x|).$$

Решение. Прежде всего заметим, что функции, стоящие в левой и в правой части исходного уравнения, четные, тогда достаточно искать только положительные корни ($x = 0$ корнем уравнения не является, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой). Известно, что при $x > 0$ $x + \frac{1}{x} \geq 2$. (Это легко доказать, применив теорему о среднем геометрическом. Действительно, для любых положительных чисел x имеем $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$, откуда $x + \frac{1}{x} \geq 2$.)

Согласно свойству возрастающей функции, функция $f(x) = \log_2 \left| x + \frac{1}{x} \right|$ принимает значения большие или равные единице, причем ее значение равно единице только при $x = 1$. Итак, для всех $x > 0$ $f(x) \geq 1$.

При $x > 0$ функция, стоящая в правой части исходного уравнения, имеет вид $\varphi(x) = 3x^2 - 2x^3$. Найдем производную этой функции: $\varphi'(x) = 6x - 6x^2$; $\varphi'(x) = 0$, $6x(1 - x) = 0$. На промежутке $x > 0$ функция имеет одну критическую точку $x = 1$. При $0 < x < 1$ $\varphi'(x) > 0$, а при $x > 1$ $\varphi'(x) < 0$. Тогда точка $x = 1$ – точка максимума. Итак, непрерывная функция $\varphi(x) = 3x^2 - 2x^3$ на промежутке $x > 0$ имеет одну критическую точку, которая является точкой максимума, а значит, ее наибольшее значение на этом промежутке совпадает с ее максимальным значением, равным единице. Итак, для всех $x > 0$ $\varphi(x) \leq 1$.

На множестве $x > 0$ обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ принимают одно и то же значение лишь при $x = 1$. Учитывая, что эти функции четны, еще имеем одно значение $x = -1$, при котором имеет место равенство $f(-1) = \varphi(-1)$.

Ответ: $\{-1, 1\}$.

***Пример* 2.32.** Решить уравнение

$$\log_2(x^2 - 7x + 10) + \sqrt{x^2 - 7x + 6} = 2.$$

Решение. Обозначим $x^2 - 7x + 10 = t$ и построим в одной системе координат *tOy* графики функций $y = \log_2 t$ и $y = 2 - \sqrt{t - 4}$ (рис. 2.1).

Графики возрастающей и убывающей функций пересеклись в одной точке *A* с координатами $(4;\ 2)$.

Проверим, что $t = 4$ является корнем уравнения $\log_2 t + \sqrt{t - 4} = 2$: $\log_2 4 + \sqrt{4 - 4} = 2, 2 + 0 = 2, 2 = 2$. Получение верного числового равенств доказывает, что $t = 4$ – корень уравнения $\log_2 t + \sqrt{t - 4} = 2$.

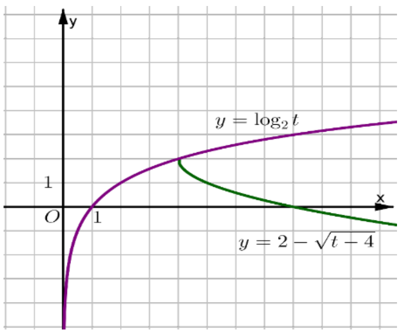


Рис. 2.1. Графическое решение уравнения $\log_2(x^2 - 7x + 10) + \sqrt{x^2 - 7x + 6} = 2$

Дальнейшее решение задачи сводится к решению уравнения $x^2 - 7x + 10 = 4$. Решая это уравнение, получаем $x_1 = 1,\ x_2 = 6$.

Ответ: $\{1; 6\}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pdx1um9cn24

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решите показательные уравнения:

1.1.

а) $2^x = 32$;

б) $4^{x+2} = 64$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$;

г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

1.2.

а) $3^{x^2-3x+2} = 1$;

б) $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$;

в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{7x-3}$;

г) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$.

1.3.

а) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$;

б) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{64}{27}$;

г) $\frac{1}{8}\sqrt{2^{x-1}} = 4^{-1{,}25}$.

1.4.

а) $0{,}125 \cdot 2^{4x-16} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$;

б) $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{-1}$;

в) $5^{\frac{6x+3}{x}} = \sqrt[4]{125^{2x+1}}$;

г) $25 \cdot 0{,}2^{x+0{,}5} = \sqrt{5} \cdot 0{,}04^x$.

1.5.

а) $2^{x+2} + 2^x = 5$;

б) $4^{x+1} + 4^x = 320$;

в) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$;

г) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$.

1.6.

а) $5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 122$;

б) $0{,}2^{x-1} - 0{,}2^{x+1} = 4{,}8$;

в) $0{,}5^{3-2x} + 3 \cdot 0{,}25^{1-x} = 7$;

г) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$.

1.7.

а) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;

б) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$;

в) $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$;

г) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

1.8.

а) $3^{-x} + 3^{x+3} = 12$;

б) $4^{cos2x} + 4^{cos^2x} = 3$;

в) $4^x - 0{,}25^{x-2} = 15$;

г) $2^{sin^2x} + 5 \cdot 2^{cos^2x} = 7$.

1.9.

а) $3^x = 4^x$;

б) $3^{2x} - 5^x = 15 \cdot 9^x - 15 \cdot 5^x$;

в) $5^{x+6} - 3^{x+7} = 43 \cdot 5^{x+4} - 19 \cdot 3^{x+5}$;

г) $9^x - 2^{x+0{,}5} = 2^{x+3{,}5} - 3^{2x-1}$.

1.10.

а) $9^x + 6^x - 2 \cdot 4^x = 0$;

б) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

в) $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$;

г) $9^{x+2} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$.

1.11*.

а) $8^x - 4 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 9 = 0$;

б) $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$;

в) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$;

г) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$.

д) $2(4^x + 4^{-x}) + 14 = 9(2^x + 2^{-x}) = 0$;

е) $9^{x+\frac{1}{2}} + \frac{3}{9^x} + 26 = 16(3^x + 3^{-x}) = 0$.

Задание 2. Решите логарифмические уравнения:

2.1.

а) $\log_2 x = 5$;

б) $\log_{0,1} x = -2$;

в) $\lg x = 1/2$;

г) $\log_{1/27} x = -1/3$.

2.2.

а) $\log_8 x = \frac{2}{3}$;

б) $\log_9 x = -2{,}5$;

в) $\log_{16} x = -\frac{3}{4}$;

г) $\log_{\frac{1}{81}} x = -\frac{3}{2}$.

2.3.

а) $\log_7(x^2-3x+3)=0$; **б)** $\log_{0,4}(2x-3)=\log_{0,4}(x+5)$;

в) $\lg(x-7)=\lg(3x-9)$; **г)** $\log_3(x^2-6x)=\log_3(5-2x)$.

2.4.

а) $\log_4\frac{2}{x-1}=\log_4(4-x)$; **б)** $\lg(x+1{,}5)=-\lg x$;

в) $\lg(4{,}5-x)=\lg 4{,}5-\lg x$; **г)** $\log_3\big((x-1)(2x-1\big)=0$.

2.5.

а) $\log_{\sqrt{2}}\frac{(x^2-4x+3)}{4}=-2$; **б)** $\log_{\frac{1}{5}}\log_5\sqrt{5x}=0$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\log_8\frac{x^2-2x}{x-3}=0$; **г)** $\log_2(9-2^x)=25^{\log_5\sqrt{3-x}}$.

2.6.

а) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$;

б) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$;

в) $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$;

г) $\log_2(x^2-x-3)-\log_2(x+1)=3$.

2.7.

а) $\frac{1-\lg x}{x}=\frac{\lg^2 14-\lg^2 4}{\lg 3{,}5^x}$;

б) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$;

в) $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$;

г) $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$;

2.8.

а) $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$; **б)** $\frac{\lg 2+\lg(4-5x-6x^2}{\lg\sqrt[3]{2x-1}}=3$;

в) $\frac{1}{\lg x}+\frac{1}{\lg 10x}+\frac{3}{\lg 100x}=0$; **г)** $4-\lg x=3\sqrt{\lg x}$.

2.9.

а) $\log_x 2+\log_2 x=2{,}5$; **б)** $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$;

в) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$; **г)** $\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11$.

2.10*.

а) $\left|\log_{\sqrt{3}} x - 2\right| - |\log_3 x - 2| = 2$;

б) $\log_{x^2}(x+2) = 1$;

в) $|\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1|$;

г) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$.

д) $1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\lg x^2 - 1)\log_x 10$;

2.11*.

а)$5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$;

б) $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x + 1} = 1$;

в) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$;

г) $x^{(\log_3 x)^3 - 3\log_3 x} = 3^{-3\log_{2\sqrt{2}} 4 + 8}$.

3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1. Показательные неравенства

Простейшие показательные неравенства

Показательными неравенствами называются неравенства вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \tag{3.1}$$

где $a -$ положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Решение показательных неравенств вида (3.1) основано на следующих двух теоремах:

Теорема 3.1. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$.

Теорема 3.2. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Опираясь на сформулированные теоремы, приводит следующий алгоритм решения простейших показательных неравенств:

1. Необходимо привести показательные функции слева и справа к одинаковому основанию.

2. Переходим от оснований к показателям степени:

- если основание больше единицы, то знак неравенства сохраняется;
- если основание меньше единицы, то меняем знак неравенства на противоположный.

3. Решаем получившееся неравенство.

Решение неравенств рассмотрим на примерах.

***Пример* 3.1.** Решить неравенство

$$0{,}4^{2x-1} \leq 0{,}16.$$

Решение. Имеем $0{,}4^{2x-1} \leq 0{,}4^2$. Согласно теореме 3.1 это неравенство равносильно неравенству того же смысла $2x - 1 \leq 2$, откуда следует, что $x \leq 1{,}5$.

Ответ: $(-\infty; 1{,}5]$.

***Пример* 3.2.** Решить неравенство

$$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^x \geq \frac{1}{27}.$$

Решение. Воспользовавшись тем, что $\sqrt{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$, перепишем заданное неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

В данном случае основанием степени служит число $\frac{1}{3} < 1$. Значит, рассматриваемое неравенство, согласно теореме 3.2, равносильно неравенству противоположного смысла $0{,}5x \leq 3$, откуда следует, что $x \leq 6$.

Ответ: $(-\infty;\ 6]$.

***Пример* 3.3.** Решить неравенство

$$\left(\sqrt{7} - \sqrt{6}\right)^{\frac{x-1}{x-3}} \geq \sqrt[x]{13 + 2\sqrt{42}}.$$

Решение. Преобразуем подкоренное выражение в правой части неравенства: $13 + 2\sqrt{42} = 7 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} + 6 = \left(\sqrt{7} + \sqrt{6}\right)^2$. Для решения показательного неравенства необходимо привести основания степени к одному виду, тогда получаем

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^{\frac{x-1}{x-3}} \geq \left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{x}};$$

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^{\frac{x-1}{x-3}} \geq \left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^{-\frac{2}{x}},$$

так как $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)=1$ и $\sqrt{7}+\sqrt{6}=\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^{-1}$.

Так как $0<\sqrt{7}-\sqrt{6}<1$, то неравенство равносильно неравенству того же смысла:

$$\frac{x-1}{x-3} \leq -\frac{2}{x};$$

$$\frac{x^2+x-6}{(x-3)x} \leq 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов (рис. 3.1).

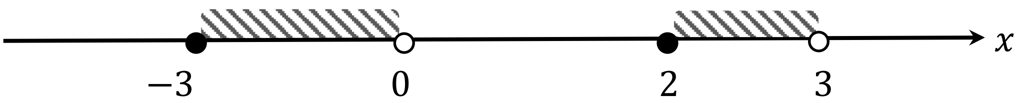


Рис. 3.1. Множество решений неравенства (3.3)

Ответ: $[-3;0) \cup [2;3)$.

***Пример* 3.4.** Решить неравенство

$$7^x \leq 5.$$

Решение. На первый взгляд, пример аналогичен предыдущим. Чтобы решить неравенство, нужно привести к одинаковому основанию. Но как представить 5 в виде степени с основанием 7? Оказывается, любое число a можно представить в виде степени с нужным нам основанием b, использовав свойства логарифмов, рассмотренные в гл. 1, а именно при помощи формулы

$$a = b^{\log_b a} \qquad (3.2)$$

Таким образом, получаем равенство $5 = 7^{\log_7 5}$ и подставляем его в исходное неравенство

$$7^x \leq 7^{\log_7 5}.$$

Следуя алгоритму решения, получаем $x \leq \log_7 5$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_7 5]$.

***Пример* 3.5.** Решить неравенство

$$7^x < -5.$$

Решение. Может показаться, что неравенство не сильно отличается от предыдущего. Просто можно заменить -5 по формуле (3.2), но это не так! Проблема кроется в области значений показательной функции, которая всегда принимает только положительные значения! То есть $7^x > 0$ для любого действительного x. Поэтому данное неравенство решений не имеет.

Ответ: нет решений.

***Пример* 3.6.** Решить неравенство

$$7^x > -3.$$

Решение. Неравенство аналогично примеру 3.5, но с другим знаком. Что поменялось? Теперь требуется найти такие значения переменной x, при которых значения показательной функции $y = 7^x$ будут больше отрицательного числа -3. Но так как $7^x > 0$ для любого действительного x, то данное неравенство будет иметь решение при любых действительный значениях переменной x.

Ответ: $(-\infty;\ +\infty)$.

Вынесение за скобку степени с наименьшим показателем

***Пример* 3.7.** Решить неравенство

$$3^{2x-1} + 3^{2x-2} > 4.$$

Решение. Сведем решение данного неравенства к простейшему показательному неравенству. Для этого вынесем за скобку степень с наименьшим показателем:

$$3^{2x-2} \cdot (3+1) > 4;$$

$$3^{2x-2} > 1;$$

$$2x - 2 > 0.$$

Из последнего неравенства получаем $x > 1$.

Ответ: $(1;\ +\infty)$.

Метод введения новой переменной

***Пример* 3.8.** Решить неравенство

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0.$$

Решение. Решим неравенство методом введения новой переменной. Положим $t = 2^x, t > 0$. Тогда заданное неравенство примет вид

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0.$$

Методом интервалов (рис. 3.2) находим решение последнего неравенства:

$$1 \leq t \leq 2.$$

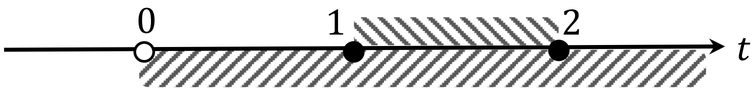


Рис. 3.2. Множество решений неравенства $t^2 - 3t + 2 \leq 0$ при $t > 0$

Таким образом, задача свелась к решению следующей системы:

$$\begin{cases} 2^x \geq 1, \\ 2^x \leq 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $[0; 1]$.

***Пример* 3.9.** Решить неравенство

$$11^{\sqrt{x}} - 10 \leq 11^{1-\sqrt{x}}.$$

Решение. Решим данное неравенство методом введения новой переменной. Пусть $11^{\sqrt{x}} = t, t > 0$, тогда заданное неравенство примет вид

$$t - 10 \leq \frac{11}{t}, t^2 - 10t - 11 \leq 0.$$

Методом интервалов (рис. 3.3) находим решение последнего неравенства $-1 \leq t \leq 11$.

Рис. 3.3. Множество решений неравенства

$t^2 - 10t - 11 \leq 0$

С учетом того, что $t > 0$, получаем

$$0 < t \leq 11.$$

Таким образом, задача свелась к решению следующей системы:

$$\begin{cases} 11^{\sqrt{x}} \geq 0, \\ 11^{\sqrt{x}} \leq 11, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $[0; 1]$.

***Пример* 3.10.** Решить неравенство

$$\frac{5^x}{5^x - 4} + \frac{5^x + 5}{5^x - 5} + \frac{22}{25^x - 9 \cdot 5^x + 20} \leq 0.$$

Решение. Данное неравенство взято из ЕГЭ по математике 2016 года. Несмотря на довольно громоздкий вид, решается оно довольно просто с помощью метода введения новой переменной.

Пусть $5^x = t, t > 0$. Тогда исходное неравенство примет вид

$$\frac{t}{t - 4} + \frac{t + 5}{t - 5} + \frac{22}{t^2 - 9 \cdot t + 20} \leq 0.$$

Разложим в третьей дроби знаменатель на множители:

$$\frac{t}{t - 4} + \frac{t + 5}{t - 5} + \frac{22}{(t - 4)(t - 5)} \leq 0.$$

Затем приведем левую часть неравенства к общему знаменателю:

$$\frac{t(t - 5) + (t + 5)(t - 4) + 22}{(t - 4)(t - 5)} \leq 0.$$

В числителе дроби раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\frac{2t^2 - 4t + 2}{(t - 4)(t - 5)} \leq 0.$$

Вынося общий множитель 2 в числителе за скобки, видим, что выражение в скобках представляет собой полный квадрат. Таким образом, получаем следующее неравенство

$$\frac{2(t - 1)^2}{(t - 4)(t - 5)} \leq 0,$$

которое решим методом интервалов (рис. 3.4)

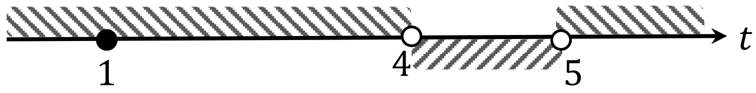


Рис. 3.4. Множество решений неравенства $\frac{2(t-1)^2}{(t-4)(t-5)} \leq 0$

Таким образом, решением неравенства является множество $\{1\} \cup (4;5)$, которое удовлетворяет условию $t > 0$. Осуществляя обратную замену, приходим к следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 5^x = 1, \\ \begin{cases} 5^x > 4, \\ 5^x < 5, \end{cases} \end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \begin{cases} x > \log_5 4\,, \\ x < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В ответе не забываем точку $x = 0$!

Ответ: $\{0\} \cup (\log_5 4\,; 1)$.

Отдельно рассмотрим тип показательных неравенств, которые решаются методом замены переменных – ***однородные показательные неравенства***. Такие неравенства часто встречаются, если в примере есть несколько показательных функций с разными основаниями, и свести их к одному основанию сразу не представляется возможным. Рассмотрим примеры.

***Пример* 3.11.** Решить неравенство

$$8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0.$$

Решение. Перепишем данное неравенство следующим образом:

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{3x} > 0.$$

Разделим обе части неравенства на $3^{3x} > 0$. Делить обе части неравенства на 3^{3x} можно, потому что показательная функция по определению всегда строго больше нуля, следовательно, получим равносильное ему неравенство

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 > 0.$$

Введем новую переменную, полагая $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $t > 0$, приходим к неравенству:

$$t^3 + t - 2 > 0.$$

Разложив левую часть неравенства на множители, получим

$$(t-1)(t^2 + t + 2) > 0.$$

Многочлен $t^2 + t + 2$ при любом значении переменной t принимает только положительные значения. Следовательно, получаем, что $t > 1$.

Таким образом, решение исходного неравенства сводится к решению неравенства

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

или

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

откуда (так как основание $0 < \frac{2}{3} < 1$) по теореме 3.2 получим $x < 0$.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

Метод разложения на множители

Если различных оснований больше двух и количество слагаемых четное, то такое неравенство можно попробовать решить методом разложения на множители. При этом в правой части неравенства должен стоять ноль. Разложение на множители чаще всего осуществляется способом группировки.

***Пример* 3.12.** Решить неравенство

$$6^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 4 \leq 0.$$

Решение. Первым делом сгруппируем слагаемые попарно: первое – со вторым, а третье – с четвертым. Затем вынесем общий множитель. У первого и второго слагаемых общий множитель 3^x, а у третьего и четвертого общий множитель пусть будет –1.

$$3^x(2^x - 4) - (2^x - 4) \leq 0.$$

У получившегося слева выражения есть общий множитель – $(2^x - 4)$, который также вынесем за скобку:

$$(2^x - 4)(3^x - 1) \le 0.$$

Таким образом, получили произведение двух множителей, которое должно быть неположительным. В таком случае можно рассмотреть совокупность двух систем, получающихся из условия, что произведение двух множителей меньше или равно нуля, когда множители имеют разные знаки. Однако, обратив внимание, что каждый множитель представляет собой монотонную функцию, можно применить обобщенный метод интервалов. Для этого приравняем к нулю каждый из множителей и найдем соответствующие значения переменной x.

$$2^x - 4 = 0, \qquad 3^x - 1 = 0,$$

$$x = 2. \qquad x = 0.$$

Отметим получившиеся точки на числовой прямой и найдем соответствующие неравенству промежутки (рис. 3.5).

Рис. 3.5. Множество решений неравенства $(2^x - 4)(3^x - 1) \le 0$

Ответ: $[0; 2]$.

Метод рационализации

Иногда встречаются неравенства, которые удобнее и быстрее всего решать именно методом рационализации. Довольно часто можно обойтись и без него, но тогда количество вычислений в ходе решения увеличивается в несколько раз, что повышает вероятность ошибки. Рационализация удобна в случае решения неравенств смешанного типа, то есть когда невозможно сделать замену переменной.

Применение метода рационализации при решении показательных неравенств опирается на теорему 3.3.

Теорема 3.3. Показательное неравенство $a(x)^{f(x)} \ge a(x)^{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases}(a(x)-1)(f(x)-g(x))\geq 0,\\ a(x)>0,\end{cases} \tag{3.3}$$

где $f(x), g(x), a(x)$ – некоторые функции, зависящие от x.

Для неравенств другого знака формула 3.3 аналогична, то есть знак выражения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ совпадает со знаком исходного неравенства или выражения $a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}$.

***Пример* 3.13.** Решить неравенство

$$(x+1)(5^x-5^{2x-4})\geq 0.$$

Решение. Кроме показательных функций с основанием 5 неравенство содержит и линейный множитель, содержащий переменную x, следовательно, метод введения новой переменной применить нельзя. Решим это неравенство методом рационализации.

Согласно теореме 3.3 знак выражения 5^x-5^{2x-4} совпадает со знаком выражения $(5-1)\big(x-(2x-4)\big)=-4(x-4)$. Тогда исходное неравенство примет вид:

$$-4(x+1)(x-4)\geq 0;$$

$$(x+1)(x-4)\leq 0.$$

Решая получившееся неравенство методом интервалов, получаем, что $x\geq -1$ и $x\leq 4$.

Ответ: $[-1;4]$.

***Пример* 3.14.** Решить неравенство

$$\frac{(x-2)(2^{x+1}-4^{x-3})}{7^{2x}-1}\geq 0.$$

Решение. В первую очередь по максимуму приведем показательные функции к одному основанию:

$$4^{x-3}=(2^2)^{x-3}=2^{2(x-3)};\quad 1=7^0.$$

Далее подставим в исходное неравенство и применим теорему 3.3:

$$\frac{(x-2)\big(2^{x+1}-2^{2(x-3)}\big)}{7^{2x}-7}\geq 0;$$

$$\frac{(x-2)(2-1)(x+1-2(x-3))}{(7-1)(2x-0)} \geq 0;$$

$$\frac{(x-2)(7-x)}{2x} \geq 0.$$

Таким образом, при помощи формул рационализации получается рациональное неравенство, которое решается методом интервалов (рис. 3.6).

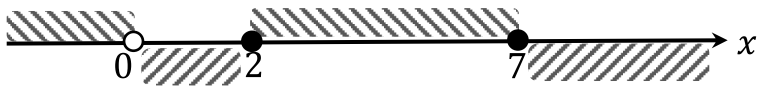


Рис. 3.6. Множество решений неравенства $\frac{(x-2)(7-x)}{2x} \geq 0$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [2; 7]$.

Рассмотрим более сложный пример.

***Пример* 3.15.** Решить неравенство

$$\frac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0{,}5^{2x+3} + 2}{x+1} \leq 0.$$

Решение. Сначала преобразуем числитель дроби, чтобы разложить его на множители и воспользоваться методом рационализации. Для этого выпишем его отдельно и приведем к одинаковому основанию:

$$2^{2x+1} - 96 \cdot 0{,}5^{2x+3} + 2 = 2^{2x+1} - 96 \cdot \frac{1}{2^{2x+3}} + 2 = 2^{2x+1} - 96 \cdot \frac{1}{4 \cdot 2^{2x+1}} + 2.$$

Обращаем внимание, что получилось выделить одинаковые показательные выражения: 2^{2x+1}. Это позволяет сделать замену переменной. Пусть $t = 2^{2x+1}$, где $t > 0$. Подставим в числитель и приведем дроби к общему знаменателю:

$$t - 6 \cdot \frac{1}{4t} + 2 = \frac{4t^2 + 8t - 6}{4t} = \frac{4(t+6)(t-4)}{4t} = \frac{(t+6)(t-4)}{t}.$$

Осуществим обратную замену и подставим в исходное неравенство:

$$\frac{(2^{2x+1} + 6)(2^{2x+1} - 4)}{2^{2x+1} \cdot (x+1)} \leq 0.$$

Отметим важный факт. Множители $2^{2x+1} + 6 > 0$ и $2^{2x+1} > 0$, так как показательная функция принимает только положительные значения, не влияют на знак неравенства. Приходим к следующему равносильному неравенству:

$$\frac{2^{2x+1}-4}{x+1} \leq 0.$$

Теперь воспользуемся методом рационализации и получим неравенство:

$$\frac{(2-1)(2x+1-2)}{x+1} \leq 0;$$

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов.

Ответ: $\left(-1; \frac{1}{2}\right]$.

***Пример* 3.16.** Решить неравенство

$$(2-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} \leq 1.$$

Решение. Представим 1, стоящую в правой части неравенства, как $(2-x)^0$ и воспользуемся условием теоремы 3.3 с учетом знака неравенства. Получим:

$$\begin{cases} (2-x-1)\left(\dfrac{3x-5}{3-x}-0\right) \leq 0, \\ 2-x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(3x-5)}{x-3} \leq 0, \\ x < 2. \end{cases}$$

Найдя пересечение множеств решений неравенств, изображенных на рис. 3.7, получим решение системы, а значит, и исходного неравенства.

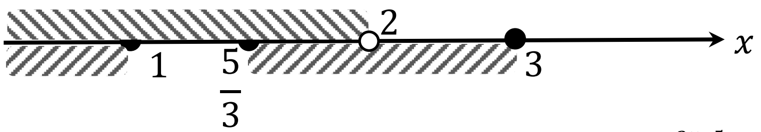


Рис. 3.7. Множество решений неравенства $(2-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} \leq 1$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pw312aua524

3.2. Логарифмические неравенства

При решении логарифмических неравенств мы используем следующие известные факты, указанные в п. 1.1: логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена при $x > 0$, монотонно возрастает при $a >1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$.

Логарифмическим неравенством называется неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма и/или в основании логарифма.

Простейшими логарифмическими неравенствами называются неравенства вида

$$\log_a f(x) > b,$$

где $a -$ известное число ($a > 0,\ a \neq 1$), $f(x) -$ некоторая функция, зависящая от неизвестной x. Знак здесь может быть любой ($>,\ <,\ \geq,\ \leq$).

Метод потенцирования

Теорема 3.4. Простейшее логарифмическое неравенство решается потенцированием с использованием монотонности логарифмической функции:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > a^b; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < a^b. \end{cases} \tag{3.5}$$

Аналогично решаются простейшие логарифмические неравенства с другими знаками. Иными словами:

- если основание логарифма больше единицы, то при потенцировании логарифмического неравенства его знак сохраняется;
- если основание логарифма меньше единицы, но больше нуля, то при потенцировании логарифмического неравенства его знак меняется на противоположный.

Рассмотрим примеры решения простейших логарифмических неравенств.

Пример **3.17.** Решить неравенство $\log_2(2x - 1) < 3$.

Решение. Так как основание логарифма больше единицы, то применим формулу 3.4:

$$\log_2(2x-1) < 3 \Leftrightarrow 2x-1 < 2^3 \Leftrightarrow x < 4{,}5.$$

Ответ: $(-\infty; 4{,}5)$.

***Пример* 3.18.** Решить неравенство $\log_{0,5}(7-2x) \geq 0$.

Решение. Так как основание логарифма меньше единицы, но больше нуля, то применим формулу 3.5:

$$\log_{0,5}(7-2x) \geq 0 \Leftrightarrow 7-2x \leq 0{,}5^0 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Ответ: $[3;\ +\infty)$.

Этот метод распространяется и на неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где в левой и правой частях неравенства стоят логарифмы с одинаковым основанием.

Теорема 3.5. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Теорема 3.6. Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Внимание! В системах (3.6) и (3.7) в зависимости от знака неравенства одно из условий, определяющих область допустимых значений переменной, можно опускать, так как оно следует из первого неравенства системы.

***Пример* 3.19.** Решить неравенство $\log_3(x+3) > \log_3(2x-4)$.

Решение. Так как основание логарифма больше 1, то исходное неравенство по теореме 3.5 равносильно системе:

$$\begin{cases} x+3 > 2x-4, \\ 2x-4 > 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является множество $x < 7$, а решением второго – множество $x > 2$. Отсюда получаем решение исходного неравенства $(2; 7)$.

Ответ: $(2; 7)$.

***Пример* 3.20.** Решить неравенство $\log_{0,1}(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,1}(3 - x)$.

Решение. Так как основание логарифма больше 0 и меньше 1, то исходное неравенство по теореме 3.6 равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 3 - x, \\ x^2 - x - 2 > 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Преобразуем первое неравенство системы (3.8):

$$x^2 - x - 2 \leq 3 - x \Leftrightarrow x^2 - 5 \leq 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \leq 0.$$

Разложим на множители левую часть второго неравенства системы (3.8). Для этого найдем дискриминант квадратного трехчлена $D = 1 + 8 = 9$. Далее по теореме Виета находим корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 2$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Таким образом, получаем равносильное неравенство:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) > 0.$$

Воспользовавшись методом интервалов, изобразим на одной числовой прямой решения обоих неравенств и найдем их пересечение (рис. 3.8).

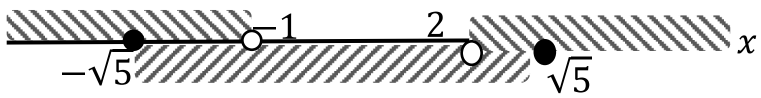


Рис. 3.8. Множество решений неравенства $\log_{0,1}(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,1}(3 - x)$

Ответ: $\left[-\sqrt{5}; -1\right) \cup \left(2;\ \sqrt{5}\right]$.

Метод приведения к одинаковому основанию

Рассмотрим примеры, когда основания у логарифмов разные.

Этим методом можно решать и простейшие логарифмические неравенства.

***Пример* 3.21.** Решить неравенство $\log_{0,5} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq -1$.

Решение. Представим –1, стоящую в правой части неравенства, через логарифм с основанием 0,5: $-1 = \log_{0,5} 2$. Тогда исходное неравенство можно представить так:

$$\log_{0,5} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq \log_{0,5} 2.$$

Так как основание логарифма больше нуля, но меньше единицы, то получаем равносильное неравенство:

$$\frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \geq 2.$$

Проведя ряд преобразований, получим неравенство вида:

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 11} \geq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 3.9), находим $[2; 2{,}75) \cup [4;\ +\infty)$ – решение заданного неравенства.

Рис. 3.9. Множество решений неравенства $\log_{0,5} \frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leq -1$

Ответ: $[2; 2{,}75) \cup [4;\ +\infty)$.

***Пример* 3.22.** Решить неравенство $2\log_9(4x^2 + 1) \geq \log_3(3x^2 + 4x + 1)$.

Решение. Прежде чем приводить логарифмы к одному основанию, найдем область определения неравенства. Она представляет собой систему двух неравенств, вытекающих из области определения логарифмических функций:

$$\begin{cases} 4x^2 + 1 > 0, \\ 3x^2 + 4x + 1 > 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Первое неравенство системы (3.9) выполняется при любом действительном x, так как представляет собой сумму двух неотрицательных выражений. Поэтому решение системы (3.9) сводится к решению второго неравенства. Разложим его левую часть на множители:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3},$$

тогда

$$3x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 3(x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0.$$

Применяя метод интервалов, находим решение последнего неравенства:

$$(-\infty;\ -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Далее приведем логарифмы к одному основанию. Для этого логарифм, стоящий в левой части неравенства, приведем к основанию 3, применив свойство логарифма (1.6):

$$2\log_9(4x^2+1) = 2\log_{3^2}(4x^2+1) = 2 \cdot \frac{1}{2}\log_3(4x^2+1) = \log_3(4x^2+1).$$

Подставим преобразованный логарифм в исходное неравенство:

$$\log_3(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1).$$

Так как основание логарифма $3 > 1$, то, согласно теореме 3.5, данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 4x^2 + 1 \geq 3x^2 + 4x + 1, \\ 3x^2 + 4x + 1 > 0. \end{cases}$$

Разложим на множители оба неравенства:

$$\begin{cases} x(x-4) \geq 0, \\ 3(x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0. \end{cases}$$

Отметим решения каждого неравенства на одной числовой прямой и найдем их пересечение (рис. 3.10).

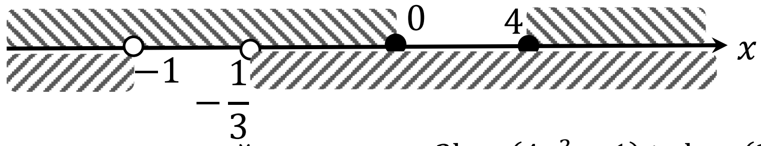


Рис. 3.10. Множество решений неравенства $2\log_9(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1)$

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup \left(-\frac{1}{3};\ \ 0\right] \cup [4;\ +\infty)$.

Метод введения новой переменной

Если в неравенстве встречаются лишь степени логарифмов с одинаковыми основаниями и одинаковыми выражениями под логарифмом, то к таким неравенствам применяется метод введения новой переменной. Рассмотрим на следующих примерах:

***Пример* 3.23.** Решить неравенство $\log_2^2 x + 3 < 4\log_2 x$.

Решение. Сначала перенесем все члены неравенства в левую часть, а затем осуществим замену переменной $\log_2 x = t$. В итоге получим неравенство:

$$t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) < 0.$$

Решив квадратное неравенство относительно новой переменной t, получим множество $(1; 3)$.

Далее делаем обратную замену, при этом не забываем про область определения неравенства:

$$\begin{cases}\log_2 x > 1,\\ \log_2 x < 3,\\ x > 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 2,\\ x < 8,\\ x > 0;\end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 8.$$

Ответ: $(2; 8)$.

***Пример* 3.24.** Решить неравенство $\log_{0,4} x \cdot \log_{0,4} \frac{5x}{2} > 0$.

Решение. Преобразуем второй множитель в левой части неравенства, воспользовавшись свойствами логарифмов (1.4) и (1.5). В итоге получим неравенство

$$\log_{0,4} x \cdot \left(\log_{0,4} 5 + \log_{0,4} x - \log_{0,4} 2\right) > 0.$$

Далее раскроем скобки и преобразуем выражение $\log_{0,4} 5 - \log_{0,4} 2$ по свойству логарифма (1.5):

$$\log_{0,4}^2 x - \log_{0,4} 0{,}4 \cdot \log_{0,4} x > 0.$$

Введем новую переменную $\log_{0,4} x = t$. Тогда получим квадратное неравенство $t^2 - t > 0$, решая которое методом интервалов, приходим к совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} t < 0, \\ t > 1. \end{array}\right.$$

Далее применим обратную замену и получим совокупность простейших логарифмических неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{0,4} x < 0, \\ \log_{0,4} x > 1. \end{array}\right.$$

Учитывая, что основание логарифма больше нуля, но меньше единицы, получаем следующую совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 0{,}4. \end{array}\right.$$

Областью определения неравенства является множество $(0;\ +\infty)$, поэтому окончательно получаем $(0; 0{,}4) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(0; 0{,}4) \cup (1; +\infty)$.

Рассмотрим более сложное неравенство, которое также решается методом введения новой переменной.

***Пример* 3.25.** Решить неравенство

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4(x^4) + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

Решение. Так как неравенство выглядит достаточно громоздким, то сначала найдем область определения неравенства:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_4 x - 3 \neq 0, \\ \log_4(64x) \neq 0, \\ \log_4^2 x - 9 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_4 x \neq \log_4 64, \\ \log_4(64x) \neq \log_4 1, \\ (\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3) \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 64, \\ x \neq \dfrac{1}{64}. \end{cases}$$

Получаем, что областью определения неравенства является множество $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \left(\frac{1}{64}; 64\right) \cup (64; +\infty)$.

При решении сложных логарифмических неравенств нужно стремиться привести логарифмы к одинаковому основанию и, по возможности, привести их и к одинаковым аргументам. В исходном неравенстве все логарифмы уже по одному основанию – 4. Постараемся привести выражения, стоящие под знаком логарифма, к одному основанию. Для этого воспользуемся основным логарифмическим тождеством и свойствами логарифмов (1.4) и (1.7):

$$\frac{\log_4 64+\log_4 x}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4 64+\log_4 x}\geq\frac{4\log_4 x+16}{\log_4^2 x-9}.$$

Заметив, что $\log_4 64=3$ и введя новую переменную $\log_4 x=t$, получим дробно-рациональное неравенство

$$\frac{3+t}{t-3}+\frac{t-3}{3+t}\geq\frac{4t+16}{t^2-9}.$$

Перенесем все в левую часть, приведем к общему знаменателю, приведем подобные члены и разложим на множители получившиеся числитель и знаменатель:

$$\frac{3+t}{t-3}+\frac{t-3}{3+t}-\frac{4t+16}{t^2-9}\geq 0;$$

$$\frac{(3+t)(t+3)}{(t-3)t+3)}+\frac{(t-3)(t-3)}{(t-3)t+3)}-\frac{4t+16}{(t-3)t+3)}\geq 0;$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)t+3)}\geq 0;$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-3)t+3)}\geq 0.$$

Для решения получившегося неравенства воспользуемся методом интервалов (рис. 3.11).

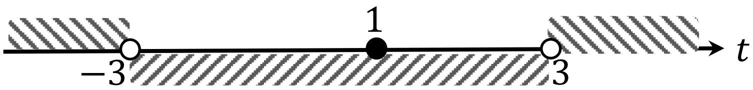


Рис. 3.11. Множество решений неравенства $\frac{2(t-1)^2}{(t-3)t+3)}\geq 0$

Обращаем внимание, что точка $t=1$ входит во множество решений неравенства, так как при этом значении левая часть неравенства обращается в нуль. Таким образом, решение неравенства запишется в виде совокупности

$$\left[\begin{aligned}&t<-3,\\&t=1,\\&t>3.\end{aligned}\right.$$

Сделаем обратную замену $t=\log_4 x$:

$$\left[\begin{array}{l}\log_4 x < -3,\\ \log_4 x = 1,\\ \log_4 x > 3;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x < \dfrac{1}{64},\\ x = 4,\\ x > 64.\end{array}\right.$$

Ответ указываем с учетом области определения неравенства.

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{64}\right) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$.

Рассмотрим решение ***логарифмических неравенств с переменным основанием***, то есть неравенств, у которых в основании логарифма стоит некоторое выражение, зависящее от x.

Если в основании логарифма находится переменная, то при потенцировании простейшего логарифмического неравенства необходимо рассматривать два случая:

- основание логарифма больше единицы (при потенцировании знак неравенства не изменяется);

- основание логарифма меньше единицы, но больше нуля (при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный).

Рассмотрим на примере.

***Пример* 3.26.** Решить неравенство

$$\log_{x+3} 16 > 2.$$

Решение. Так как основание логарифма содержит переменную, то необходимо рассмотреть два случая: 1) когда основание логарифма больше единицы; 2) когда основание логарифма больше нуля, но меньше единицы. Поэтому данное неравенство будет равносильно следующей совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x+3 < 1,\\ 16 < (x+3)^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x+3 > 1,\\ 16 > (x+3)^2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3 < x < -2,\\ x^2+6x-7 > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x > -2,\\ x^2+6x-7 < 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3 < x < -2,\\ (x-1)(x+7) > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x > -2,\\ (x-1)(x+7) < 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Так как решением неравенства $(x-1)(x+7) > 0$ является множество $(-\infty;\ -7) \cup (1; +\infty)$, то в пересечении с неравенством $-3 < x < -2$ получаем пустое множество. Так как первая система совокупности решений не имеет, то решение второй системы будет являться решением всей совокупности. Изобразим множества решений каждого неравенства, входящего во вторую систему совокупности (рис. 3.12). Пересечение этих множеств и будет решением системы, а следовательно, и решением совокупности.

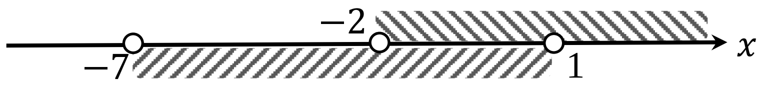


Рис. 3.12. Множество решений системы $\begin{cases} x > -2, \\ (x-1)(x+7) < 0. \end{cases}$

Ответ: $(-2; 1)$

Как видно из примера 3.26, решение достаточно простого неравенства с переменным основанием сводится к совокупности двух систем. Если переменная появится еще и под знаком логарифма, то условия систем еще усложнятся. Но есть метод, который позволяет избежать такой трудоемкости и значительно сокращает вычисления. Это метод рационализации, который уже был рассмотрен на примере показательных неравенств. Теперь рассмотрим его применение для логарифмических неравенств.

Метод рационализации

Общая схема метода рационализации выглядит следующим образом.

Теорема 3.7. Пусть есть некоторое логарифмическое неравенство с одинаковыми, но зависящим от x основаниями:

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x), \tag{3.10}$$

тогда неравенство (3.10) равносильно системе

$$\begin{cases} (a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Теорема 3.8. Пусть есть некоторое логарифмическое неравенство с одинаковыми, но зависящим от x основаниями:

$$\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x), \tag{3.12}$$

тогда неравенство (3.11) равносильно системе

$$\begin{cases} (a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big)<0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ a(x)>0, \\ a(x)\neq 1. \end{cases} \tag{3.13}$$

Рассмотрим примеры на применение метода рационализации.

***Пример* 3.27.** Решить неравенство $\log_{x-4}(x^2-1)>1$.

Решение. Приведем правую часть неравенства к логарифму с основанием $x-4$ и применим теорему 3.7:

$$\log_{x-4}(x^2-1)>1 \Leftrightarrow \log_{x-4}(x^2-1)>\log_{x-4}(x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4-1)(x^2-1-(x-4))>0, \\ x^2-1>0, \\ x-4>0, \\ x-4\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x^2-x+3)>0, \\ (x-1)(x+1)>0, \\ x>4, \\ x\neq 5. \end{cases}$$

Решим получившуюся систему. Выражение $x^2-x+3>0$ при любом действительном x, поэтому на знак первого неравенства системы не влияет. Отсюда неравенство $(x-5)(x^2-x+3)>0$ равносильно неравенству $x>5$, потому неравенства $x>4$ и $x\neq 5$ автоматически выполняются. Решением неравенства $(x-1)(x+1)>0$ является множество $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. С учетом неравенства $x>5$ получаем, что решением системы является $x>5$.

Ответ: $x>5$.

***Пример* 3.28.** Решить неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24+2x-x^2}{14}\right)<1$.

Решение. Как и в предыдущем примере приведем левую и правую части неравенства к одному основанию:

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24+2x-x^2}{14}\right)<1 \Leftrightarrow \log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24+2x-x^2}{14}\right)<\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{25-x^2}{16}\right);$$

затем воспользуемся теоремой 3.8 и получим систему

$$\begin{cases}\left(\dfrac{25-x^2}{16}-1\right)\left(\dfrac{24+2x-x^2}{14}-\dfrac{25-x^2}{16}\right)<0,\\ \dfrac{24+2x-x^2}{14}>0,\\ \dfrac{25-x^2}{16}>0,\\ \dfrac{25-x^2}{16}\neq 1.\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы. Для этого приведем в обеих скобках дроби к одинаковым знаменателям:

$$\frac{9-x^2}{16}\cdot\left(\frac{-x^2+16x+17}{7\cdot 16}\right)<0.$$

После преобразований получим равносильное неравенство

$$(x-3)(x+3)(x+1)(x-17)<0,$$

решим его методом интервалов (рис. 3.13).

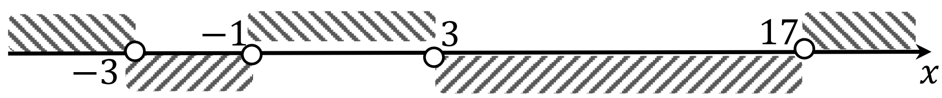


Рис. 3.13. Множество решений неравенства $(x-3)(x+3)(x+1)(x-17)<0$

Берем те промежутки, на которых штриховка расположена ниже оси x: $(-3;-1)\cup(3;17)$.

Решим второе неравенство системы:

$$\frac{24+2x-x^2}{14}>0 \Leftrightarrow x^2-2x-24<0 \Leftrightarrow (x-8)(x+6)<0.$$

Получаем, что множество $(-6;8)$ – решение второго неравенства системы.

Аналогично получаем, что множество $(-5;5)$ является решением третьего неравенства системы.

Из четвертого условия системы получаем, что $x\neq\pm 3$.

Решением системы является пересечение множеств решения каждого из условий, входящих в нее. В нашем случае получаем множество $(-3;-1)\cup(3;5)$.

Ответ: $(-3;-1)\cup(3;5)$.

Бывают логарифмические неравенства в виде произведения или частного различных множителей. В таких примерах обойтись без рационализации сложно. Разберем на примерах.

***Пример* 3.29.** Решить неравенство $x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \le 0$.

Решение. Неравенство представляет собой произведение двух множителей, каждое из которых является функцией. Очевидно, что произведение двух множителей будет меньше либо равно нулю, когда множители имеют разные знаки. Но решать две системы слишком долго, если множителей будет больше. Существенно сократить вычисления помогает метод рационализации. Он позволяет представить логарифмическое выражение в виде произведения линейных множителей, знак которого полностью совпадает со знаком логарифма.

В самом общем виде знак любого логарифма вида $\log_{a(x)} f(x)$ абсолютно совпадает при тех же самых x со знаком выражения $(a(x)-1)(f(x)-1)$ при $f(x)>0, a(x)>0, a(x)\neq 1$.

Таким образом, получаем следующее равносильное преобразование исходного неравенства:

$$x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot(x+3-1)\cdot(7-2x-1) \le 0, \\ 7-2x>0, \\ x+3>0, \\ x+3\neq 1. \end{cases}$$

После преобразований получаем

$$\begin{cases} x\cdot(x+2)\cdot(6-2x) \le 0, \\ x<3{,}5, \\ x>-3, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Для решения первого неравенства системы воспользуемся методом интервалов и выберем те промежутки, на которых штриховка расположена ниже оси x (рис. 3.14).

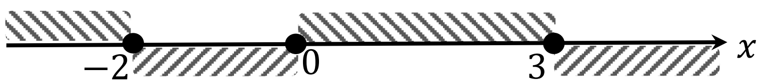


Рис. 3.14. Множество решений неравенства $x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \le 0$

С учетом остальных условий системы получаем множество $(-2; 0] \cup [3; 3{,}5)$.

Ответ: $(-2; 0] \cup [3; 3{,}5)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pihgegj2c24

3.3. Смешанные неравенства, содержащие показательные и логарифмические выражения

На экзаменах различного уровня часто можно встретить комбинацию различных типов неравенств. Это можно осуществить и с помощью суперпозиции функции. Например, если обе части логарифмического неравенства использовать в качестве показателя степени в показательной функции, то получим так называемое показательно-логарифмическое неравенство.

Решение таких неравенств осуществляется в обратном порядке: сначала решается «внешнее» неравенство, а затем «внутреннее» и записывается ответ.

Разберем решение таких неравенств на примерах.

***Пример* 3.30.** Решить неравенство

$$2^{\frac{3}{\log_2 x}} > \frac{1}{64}.$$

Решение. В данном неравенстве «внешней» является показательная функция, а «внутренней» – логарифмическая. Областью определения неравенства является множество

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Логарифмируя обе части исходного неравенства по основанию 2, получаем

$$\log_2 2^{\frac{3}{\log_2 x}} > \log_2 \frac{1}{64};$$

$$\frac{3}{\log_2 x} > -6.$$

Перенесем –6 в левую часть и приведем дробь к общему знаменателю:

$$\frac{3 + 6\log_2 x}{\log_2 x} > 0.$$

Разделим обе части неравенства на 6:

$$\frac{\frac{1}{2} + \log_2 x}{\log_2 x} > 0.$$

Введем новую переменную $\log_2 x = t$ и решим новое неравенство методом интервалов, получим совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} t < -\frac{1}{2}, \\ t > 0. \end{array}\right.$$

Осуществим обратную замену и получим

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x < -\frac{1}{2}, \\ \log_2 x > 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x > 1. \end{array}\right.$$

С учетом области определения неравенства получаем следующее множество $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

***Пример* 3.31.** Решить неравенство

$$0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \frac{3x+6}{x^2+2}} > 1.$$

Решение. Сначала решим внешнее (показательное) неравенство. Для этого представим 1 через основание степени 0,3 и, воспользовавшись теоремой 3.2, изменим знак на противоположный:

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \frac{3x + 6}{x^2 + 2} < 0.$$

Теперь решим логарифмическое неравенство. Для этого приведем левую и правую часть неравенства к одному основанию и воспользуемся теоремой 3.6, изменив знак на противоположный. Учитывая область определения неравенства, получаем следующую систему:

$$\begin{cases}\log_3 \dfrac{3x+6}{x^2+2} > 1,\\ \log_3 \dfrac{3x+6}{x^2+2} > 0,\\ \dfrac{3x+6}{x^2+2} > 0.\end{cases}$$

Обратим внимание, что второе неравенство системы является следствием первого, поэтому его можно не учитывать при решении системы. В третьем неравенстве знаменатель x^2+2 принимает положительные значения при любом действительном x, поэтому оно равносильно неравенству $3x+6>0$. Получаем

$$\begin{cases}\log_3 \dfrac{3x+6}{x^2+2} > 1,\\ 3x+6>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3x+6}{x^2+2} > 3,\\ 3x+6>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-1)<0,\\ x>-2.\end{cases}$$

Множество решений первого и второго неравенства системы изобразим на одной числовой прямой, которая представлена на рис. 3.14.

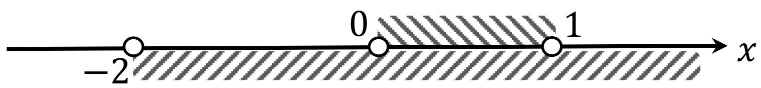


Рис. 3.14. Множество решений системы $\begin{cases}x(x-1)<0,\\ x>-2.\end{cases}$

Решением системы является пересечение множества решений каждого неравенства, входящего в нее. В данном случае получаем промежуток $(0;1)$.

Ответ: $(0;1)$.

При решении смешанных неравенств иногда бывает целесообразно использовать метод рационализации. Рассмотрим следующие примеры:

***Пример* 3.32.** Решить неравенство

$$\frac{2-2^{-\frac{2}{x}}}{(x+4)\ln(1-x)} \geq 0.$$

Решение. Областью определения данного неравенства являются все действительные x, которые удовлетворяют условиям $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -4, \\ x < 1. \end{cases}$

Воспользуемся методом рационализации для упрощения числителя и знаменателя дроби

$$\frac{2 - 2^{-\frac{2}{x}}}{(x+4)\ln(1-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{2}{x}}{(x+4)(1-x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^2(x+4)} \leq 0.$$

Для получения решения неравенства применим метод интервалов, при этом обращаем внимание, что при переходе через точку $x = 0$ функция знак не меняет.

Ответ: $(-4;\ -2]$.

***Пример* 3.33.** Решить неравенство

$$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \geq 0.$$

Решение. Областью определения неравенства являются все действительные x, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ x \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, воспользуемся методом рационализации для замены логарифмических и показательных выражений на рациональные множители того же знака:

$$\frac{(2x-1)(5x-1-1)(3x-1)(7x-1-1)}{15x^2+2-11x} \geq 0.$$

После тождественных преобразований получаем

$$\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{(3x-1)(5x-2)} \geq 0.$$

Применяя метод интервалов с учетом области определения неравенства, получаем множество $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

При решении смешанных неравенств можно использовать и графический метод, если построить графики левой и правой части неравенства не представляет особых затруднений.

***Пример* 3.34.** Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+3) > 2x-1.$$

Решение. Введем подстановку $2x+3=t, t>0$, тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$\log_{\frac{1}{3}} t > t-4.$$

Решим последнее неравенство графически. С этой целью построим в одной системе координат графики функций $y=\log_{\frac{1}{3}} t$ и $y=t-4$ (рис. 3.15).

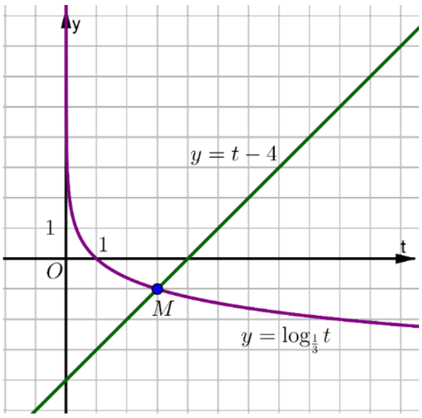


Рис. 3.15. Графическое решение неравенства $\log_{\frac{1}{3}} t > t-4$

Графики функций пересеклись в точке $M(3;-1)$. Для решения неравенства необходимо указать такие значения t, при которых график функции $y=\log_{\frac{1}{3}} t$ расположен выше графика функции $y=t-4$. Это происходит, когда t принадлежит промежутку $(0;3)$. Таким образом, получаем $0<t<3$. Возвратившись к переменной x, необходимо решить двойное неравенство:

$$0<2x+3<3 \Leftrightarrow -1{,}5<x<0.$$

Ответ: $(-1{,}5; 0)$.

Если построить графики проблематично, то можно попробовать сравнить области значений функций, входящих в неравенство.

***Пример* 3.35.** Решить неравенство $2^{\sqrt{1-x}} - x\lg x > 0$.

Решение. Найдем область определения неравенства, для этого решим систему: $\begin{cases}1 - x \geq 0,\\ x > 0.\end{cases}$ Имеем $0 < x \leq 1$.

Оценим множество значений каждой из функций: $y = 2^{\sqrt{1-x}}$ и $y = -x\lg x$ на множестве $0 < x \leq 1$.

Для всех $x \in (0; 1]$ $2^{\sqrt{1-x}} > 0$ и $x \in (0; 1]$ $(-x\lg x) > 0$, а значит, и для всех $x \in (0; 1]$ сумма этих функций $2^{\sqrt{1-x}} - x\lg x > 0$.

Ответ: $(0; 1]$.

***Пример* 3.36.** Решить неравенство

$$|\log_{x-3} 4 - 2| + \sqrt{1 - \lg 2x} + 1 \leq \cos^2(x^2 - 5x).$$

Решение. Левая часть – сумма трех неотрицательных слагаемых, одно из которых равно 1, следовательно, левая часть не меньше 1. Правая же часть не превосходит 1 по свойству функции $y = \cos^2 t$.

Левая часть неравенства не меньше правой, поэтому неравенство может выполняться тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases}\log_{x-3} 4 = 2,\\ 1 - \lg 2x = 0,\\ \cos^2(x^2 - 5x) = 1.\end{cases}$$

Второе уравнение имеет единственное решение $x = 5$. Подставляя это значение x в первое и третье уравнения, убеждаемся, что оно является единственным решением системы, а значить, и заданного неравенства.

Ответ: 5.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

https://learningapps.org/watch?v=pihgegj2c24

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решите простейшие показательные неравенства:

1.1.

а) $2^{3-6x} < 1$; **б)** $16^x > 0{,}125$;

в) $\left(\sqrt{7}\right)^x \geq \frac{1}{49}$; **г)** $3^{4x+1} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$;

д) $(3)^{-2x} < \sqrt{3}$ **е)** $0{,}4^{2x-1} \leq 0{,}16$.

1.2.

а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5}$; **б)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geq \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$;

в) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{32}\right)^{2x}$; **г)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x(x+2)}{5}} > \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{10}}$;

д) $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$; **е)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-25x^2+20x+10} < \frac{25}{4}$.

1.3.

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} > \frac{1}{\sqrt{27}}$; **б)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-\frac{16}{x+1}}$;

в) $0{,}2^{\frac{2x-3}{x+2}} - 5 > 0$; **г)** $25^{x+2} < 0{,}2^{\frac{x-7}{x}}$;

д) $(0{,}5)^{\frac{2x}{1-x}} < \sqrt{(0{,}25)^{x-6}}$; **е)** $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{27^{2x-1}}$.

Задание 2. Решите неравенства, вынеся за скобки степень с наименьшим показателем:

а) $7^{2x-1} + 7^{2x+1} > 50$; **б)** $4^{x+1} + 4^{x+2} > 80$;

в) $\left(\sqrt{7}\right)^x \geq \frac{1}{49}$; **г)** $6^x - 6^{x+2} < -210$;

д) $2^{x+4} - 2^x > 120$; **е)** $2^{3-x} + 2^{1-x} < 160$.

Задание 3. Решите показательные неравенства:

3.1.

а) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x} \le \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{24}{5-x}}$;

б) $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{x-5} \le \left(7+4\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{x-2}}$;

в) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{20}{x+9}} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{x}$;

г) $\left(17-12\sqrt{2}\right)^{x+2} \ge \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{x-3}}$;

д) $\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}\right)^{x} \ge \left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{9}\right)^{\frac{15}{2-x}}$;

е) $(\log_3 2)^{\frac{x}{1-x}} \ge \sqrt{\log_2 3}$.

3.2.

а) $3^{\sqrt{3x+4}} \ge \frac{1}{3^x}$;

б) $0{,}25^{x} \ge 0{,}125^{\sqrt{x+1}}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-12}} \ge 3^{x}$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x+4}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{x^2+3x+4}}$;

д) $2^{\sqrt{24-5x}} \ge 2^{x}$;

е) $2^{\sqrt{2x-x^2}} \le 2^{\sqrt{x^2+x-1}}$.

3.3.

а) $\sqrt{2^x-3} \ge 3-2^{0{,}5x}$;

б) $\sqrt{4^x-3\cdot 2^x+2} \ge 2-2^x$;

в) $\sqrt{9^x+3^{x+2}} > 3^x-9$;

г) $\sqrt{0{,}25^x-3\cdot 0{,}5^x+2} \le 2-0{,}5^x$;

д) $\sqrt{5\cdot 2^x-4^x} > 2^x-2$;

е) $\sqrt{16-2^{0{,}5x}} < 2^x+4$.

3.4.

а) $3^{2x}-4\cdot 3^x+3<0$;

б) $3^{2x+2}-3^{x+4}<3^x-9$;

в) $9^{x+1}-3^{x+4}<3^x-3$;

г) $9^{x-1}-6\cdot 3^{x-3}+3<0$;

д) $5^{2x+1}-5^{x+2} \le 5^x-5$;

е) $2^x-10\cdot 2^{\frac{x}{2}}+16 \le 0$.

3.5.

а) $3^x<1+12\cdot 3^{-x}$;

б) $3^{4-3x}-35\cdot 3^{3x-2}+6 \ge 0$;

в) $15\cdot 2^{2-2x}+19\cdot 2^{-x}>2$;

г) $2^{2x+1}-21\cdot 2^{-2x-3}+2 \ge 0$;

д) $7^{-x}-3\cdot 7^{1+x}>4$;

е) $3\cdot 2^{-x}+5<2^{1+x}$.

3.6.

а) $3^x(3^x+3^{1-x}-4) \le 0$;

б) $3^x(3^x+3^{3-x}-28)<0$;

в) $4^x(2^x+2^{5-x}-12) \le 0$;

г) $0{,}1^{x+1}(0{,}1^x+0{,}1^{x-1}-11) \le 0$;

д) $5^x(5^x+5^{4-x}-130)<0$;

е) $0{,}2^x(5^{-x}+5^{x+1}-6) \le 0$.

3.7.

а) $50 \cdot 5^{3-x} - 2 \cdot 5^{x-3} > 0$;

б) $13 \cdot 2^{2x+3} - 208 \cdot 2^{-2x-3} < 0$;

в) $162 \cdot 3^{5-x} - 2 \cdot 3^{x-5} > 0$;

г) $3 \cdot 5^{x+3} - 75 \cdot 5^{-x-3} < 0$;

д) $\frac{400}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x}$;

е) $4 \cdot 3^{x+4} + 19 \cdot 3^{-x-4} < \frac{31}{3^{x+4}}$.

3.8.

а) $3^{\sqrt{x}} - 2 < 3^{1-\sqrt{x}}$;

б) $3^{\sqrt{x+2}} - 8 < 3^{2-\sqrt{x+2}}$;

в) $2^{\sqrt{x-1,5}} + 2^{3-\sqrt{x-1,5}} < 6$;

г) $2^{\sqrt{x-3}+1} - 6 < 2^{3-\sqrt{x-3}}$;

д) $3^{\sqrt{x-1}+1} - 8 < 3^{1-\sqrt{x-1}}$;

е) $2^{2\sqrt{x+0,5}} + 2^{3-2\sqrt{x+0,5}} < 6$.

3.9.

а) $\frac{1}{3^x+5} \le \frac{1}{3^{x+1}-1}$;

б) $\frac{2^x+8}{2^x-1} > 2^x$;

в) $\frac{5}{2^{x+2}-1} > \frac{1}{2^x-1}$;

г) $2^x - 11 \ge \frac{21}{1-2^x}$;

д) $\frac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1} \le 0$;

е) $\frac{9^{x+0,5}+1}{3-3^{2x}} \le 3^{2x} + 1$.

3.10.

а) $2^{2x} - 15 \cdot 11^x < 11^x - 15 \cdot 2^{2x+3}$;

б) $6 \cdot 5^x - 6^x < 4 \cdot 6^{x+1} - 6 \cdot 5^{x+1}$;

в) $5^{\frac{x}{2}+1} - 6 \cdot 3^{x-1} < \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{x}{2}+1} - 3^{x-1}$;

г) $3 \cdot 5^{2x} - 15 \cdot 2^{2x+1} + 5^{2x} + 5 \cdot 2^{2x} > 0$;

д) $2^{x+2} + 10 \cdot 11^{x+1} < 11^{x+2} + 2^{x+1}$;

е) $2 \cdot 3^{x+1} - 9 \cdot 2^{x+1} > 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x$.

3.11.

а) $(x-4)^{x^2-9} < 1$;

б) $(x-1)^{x^2-1} < 1$;

в) $(x+3)^{x^2-16} < 1$;

г) $(x-2)^{x^2-4} < 1$;

д) $(x+0,5)^{x^2-4} < 1$;

е) $(x+1)^{x^2-9} < 1$.

3.12.

а) $0,04^{\sqrt{x}} \ge \frac{x^2}{25^{\sqrt{x}}}$;

б) $\frac{x^2-2}{2^{2\sqrt{x}}} \le 4^{0,5-\sqrt{x}}$;

в) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{x}} \le 4^{\sqrt{x}+1}$;

г) $x^2 \cdot 27^{\sqrt{x}} \le 3^{3\left(\sqrt{x}+\frac{2}{3}\right)}$;

д) $\frac{x^2-x}{2^{\sqrt{x}}} \le 0,5^{\sqrt{x}-1}$

е) $(x^2-5x) \cdot 2^{\sqrt{x}} \le 0,5^{-3-\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}+1}$.

3.13.*

а) $2^{-2\sqrt{x}} + 32 \cdot 10^{2-\sqrt{x}} > 2^{9-2\sqrt{x}} + 625 \cdot 10^{-2-\sqrt{x}}$;

б) $3^{2\sqrt{x}-10} + 6561 \cdot 12^{\sqrt{x}-4} < 3^{2\sqrt{x}} + 16 \cdot 12^{\sqrt{x}-6}$.

3.14.*

а) $6^{2x^2-5|x|} \cdot 5^{3|x|} \le 1$; **б)** $4^{9|x|-4x^2} \cdot 9^{4|x|} \ge 1$.

3.15.*

а) $\frac{\sqrt{x+4}\left(8-3^{2+x^2}\right)}{4^{x-1}-3} \le 0$; **б)** $\frac{\sqrt{x-2}(4-3^{x-1})}{2^{1-x^2}-3} \ge 0$.

3.16.*

а) $(4^x - 5 \cdot 2^x)^2 - 20(4^x - 5 \cdot 2^x) \le 96$;

б) $(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 + 8 \cdot 5^x < 2 \cdot 25^x + 15$.

Задание 4. Решите простейшие логарифмические неравенства:

4.1.

а) $\log_2(2x-1) < 3$; **б)** $\log_3(x+2) < 2$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) > -2$; **г)** $\log_{\frac{1}{8}}(3-x) > -2$;

д) $\log_{\frac{1}{2}}(7-2x) \ge 0$; **е)** $\log_{\frac{3}{2}}(2x+1) \le 0$.

4.2.

а) $\log_6(x^2-x) < 1$; **б)** $\log_{\sqrt{10}}(2x^2+x) < 2$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+8) \ge -1$; **г)** $\log_{\sin\frac{\pi}{6}}(x^2-x) > -2$;

д) $\log_{\sqrt{3}}(12-x^2) > 2$; **е)** $\log_{\cos\frac{\pi}{3}}(7x-3x^2) < -1$.

4.3.

а) $\log_2(3-2x) - \log_2 13 < 0$; **б)** $\log_{0,7}(2x-7) - \log_{0,7} 5 > 0$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) - \log_{\frac{1}{3}} 6 > 0$; **г)** $\log_{2,7}\left(1-\frac{x}{3}\right) - \log_{2,7} 4 < 0$;

д) $\log_2\left(4-\frac{x}{2}\right) - \log_2 8 < 0$; **е)** $\log_{0,25}\left(2-\frac{x}{3}\right) - \log_{0,25} 2 > 0$.

Задание 5. Решите логарифмические неравенства:

5.1.

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \log_9(x+2) > -\frac{3}{2}$;

б) $\log_{\sqrt{5}}(2x-1)-\log_{\frac{1}{25}}(2x-1)<\frac{5}{2}$;

в) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-5)+2\log_{\sqrt{3}}(x-5)<4$;

г) $\log_2(3-2x)-\log_{\frac{1}{8}}(3-2x)>\frac{4}{3}$;

д) $\lg(x-2)-\log_{\sqrt{10}}(x-2)>-1$;

е) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-1)+\log_2(x-1)>-2$.

5.2.

а) $\log_{0,5}^2 x^2-\log_{0,5}x-3<0$;

б) $\lg^2 x\geq \lg x+2$;

в) $\log_2^2 x-\log_2 x\leq 6$;

г) $\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}\frac{5x}{2}>0$;

д) $\log_2^2 x-4\log_2 x+3>0$;

е) $\log_{0,2}^2(x-1)>4$.

5.3.

а) $\log_3 x+\log_x 9\geq 3$;

б) $2\log_5 x-\log_x 5\leq 1$;

в) $\log_{0,5}x+2\log_x 2\geq 1$;

г) $\log_3 x+1\geq 2\log_x 3$;

д) $2\log_x 5-3\leq -\log_5 x$;

е) $\log_2(5-x)-1\leq \log_{5-x}4$.

5.4.

а) $\frac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}<1$;

б) $\frac{1}{1+\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}>2$;

в) $\frac{1}{\log_2 x-4}>\frac{1}{\log_2 x}$;

г) $\frac{4\log_{0,3}x+1}{\log_{0,3}x+1}\leq \log_{0,3}x+1$;

д) $\frac{\log_2 x-5}{1-\log_x 2}\geq 2\log_2 x$;

е) $2+\frac{\log_2^2 x}{1+\log_2 x}>\log_2 x$.

5.5.

а) $3^{\log_3(x+5)}<2$;

б) $13^{\log_{13}(1-3x)}<7$;

в) $9^{\log_9(x-4)}<3$;

г) $5^{\log_5(2x-1)}<7$;

д) $26^{\log_{26}(x+1)}<11$;

е) $8^{\log_8(3-2x)}<3$.

5.6.

а) $\frac{2\sqrt{2}-3}{\lg^2 x-\lg x-2}<0$;

б) $\frac{2-\sqrt{5}}{\log_6(x^2-x)-1}\leq 0$;

в) $\frac{\log_5(x^2-3)}{\log_2 0,2}\leq 0$;

г) $\frac{\pi-\sqrt{5}}{\log_6(x^2-x)-1}\geq 0$;

д) $\log_2(2x^2 - x)\lg 0{,}5 \geq 0$;

е) $(2\sqrt{6} - 5)\left(\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 7x + 10) + 2\right) < 0$

5.7.

а) $\log_{\log_2 \frac{11}{3}}(4 + x)$;

б) $\log_{\log_{\frac{4}{3}} 2}(2 + 2x)$;

в) $\log_{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}}\left(\frac{x}{3} - 1\right)$;

г) $\log_{\log_{4,5} 3,75}(x - 2{,}5)$.

5.8.

а) $\log_{x+1}(5 - x) > 1$;

б) $\log_x(2x - 3) < 1$;

в) $\log_{2x+1}(3 - 2x) < 1$;

г) $\log_{x-2}(2x - 7) < 1$.

5.9.

а) $5 \cdot 0{,}2^{\lg x} > 0{,}2^{2\lg 2}$;

б) $0{,}04^{\lg x - 1} \geq 5^{\lg 4}$;

в) $0{,}2 \cdot 25^{\lg\sqrt{x}} < 5^{\lg\sqrt{0,25}}$;

г) $0{,}2^{2\log_2 5} < 25 \cdot 0{,}2^{\log_2 x}$;

д) $10^{0,5\lg x} < 0{,}01^{\lg 2}$;

е) $5^{\lg\frac{1}{x}} > 0{,}2^{2\lg 2}$.

5.10.*

а) $|\log_4(x + 1)^2 - 2| + |\log_2(2x + 3) - 1| \leq 3$;

б) $|\log_9(2x + 1)^2 - 1| - |\log_3(1 - x) - 3| \geq 1$.

5.11.*

а) $9\log_8^2(4 - x)^4 + 5\log_{0,5}(4 - x)^8 \leq 56$;

б) $\log_{0,2}^2(x + 5)^4 - 4\log_{25}(x + 5)^{12} \geq 40$.

5.12.*

а) $\frac{\log_3(3-x)-\log_3(3x+2)}{\log_3^2 x^2+2\log_3 x^4+4} \geq 0$;

б) $\frac{\log_5(3-2x)-\log_5(x+2)}{\log_5^2 x^2+\log_5 x^4+1} \geq 0$.

5.13.*

а) $\log_{\mathrm{tg}\,3,2}(\log_3(9 - x^2)) \geq 0$;

б) $\log_{\mathrm{tg}\,0,9}\left(\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2)\right) \leq 0$.

Задание 6. Решите неравенства смешанного типа:

6.1.

а) $x \cdot 4^{1+x} - x^2 \cdot 4^x > 0$;

б) $3^{x+2} - x^2 \cdot 3^x < 0$;

в) $x^2 \cdot 5^x - x \cdot 5^{x+1} < 0$;

г) $x^2 \cdot 0{,}5^x - 0{,}5^{x-2} \leq 0$.

6.2.

а) $x \cdot \lg x - \frac{3}{\log_x 3} \le 0;$ **б)** $(x-1) \cdot \log_{\frac{1}{3}} x - \frac{1}{\log_x \frac{1}{3}} \ge 0;$

в) $2x \cdot \log_{0,2} x - \frac{x+5}{\log_x 0,2} \ge 0;$ **г)** $(x-2) \cdot \log_2 x + \frac{1}{2\log_x 2} \ge 0.$

6.4.

а) $\frac{12+x-x^2}{\log_2(x-1)} > 0;$ **б)** $\frac{\log_2(3x^2-8x+5)}{x-5} \ge 0;$

в) $\frac{\log_x 8 - 3}{8x^2-14x+5} \ge 0;$ **г)** $\frac{\log_x 9}{8x^2-18x+7} \ge 0.$

6.5.*

а) $\frac{\log_3^2 (x-1,5)-1}{2^x-3} \le 0;$ **б)** $\frac{16-3^x}{\log_2^2 (x+1,5)-4} \ge 0.$

6.6.*

а) $\frac{\sqrt{x+4}\left(8-3^{2+x^2}\right)}{4^{x-1}-3} \le 0;$ **б)** $\frac{\sqrt{x-2}(4-3^{x-1})}{2^{1-x^2}-3} \ge 0.$

6.7.*

а) $27^{\lg(x-1)} \le (x^2-1)^{\lg 3};$ **б)** $8^{\lg(-1-x)} \le (x^2-1)^{\lg 2}.$

6.8.*

а) $7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{\frac{1}{2}}(-x)} < 2^{\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{7}}(-x)};$ **б)** $5^{\log_{\frac{1}{5}} \log_3(-2x)} < 3^{\log_{\frac{1}{3}} \log_5(-2x)}.$

4. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

4.1. Системы показательных и логарифмических уравнений

При решении систем показательных и логарифмических уравнений применяются те же приемы, что и при решении систем алгебраических уравнений. Во многих случаях, прежде чем применить тот или иной метод решения систем, следует преобразовать каждое уравнение системы к возможно более простому виду.

***Пример* 4.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30, \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5}. \end{cases}$$

Решение. Положив $u = 25^x,\ v = 25^y$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 30, \\ uv = 5\sqrt{5}, \end{cases}$$

которая имеет четыре решения:

$$\begin{cases} u_1 = 5, \\ v_1 = \sqrt{5}; \end{cases} \begin{cases} u_2 = \sqrt{5}, \\ v_2 = 5; \end{cases} \begin{cases} u_3 = -5, \\ v_3 = -\sqrt{5}; \end{cases} \begin{cases} u_4 = -\sqrt{5}, \\ v_4 = -5. \end{cases}$$

Но $u = 25^x,\ v = 25^y$, значит, $u > 0, v > 0$, то есть из найденных четырех решений надо взять лишь первые два.

Таким образом, задача сводится к решению следующей совокупности систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25^x = 5, \\ 25^y = \sqrt{5}; \end{cases} \\ \begin{cases} 25^x = \sqrt{5}, \\ 25^y = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из первой системы находим: $x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = \frac{1}{4},$ из второй: $x_2 = \frac{1}{4},\ y_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

***Пример* 4.2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases} \tag{4.1}$$

Решение. Перемножив почленно уравнения системы (4.1), получим уравнение

$$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 216, \text{или } 6^{x+y} = 6^3,$$

откуда $x + y = 3$.

Разделив почленно первое уравнение системы (4.1) на второе, получим уравнение

$$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3}, \text{или} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3},$$

откуда $x - y = 1$.

Таким образом, решение системы (4.1) сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Пара $(2;\ 1)$ является решением этой системы и, следовательно, системы (4.1).

Ответ: $(2;\ 1)$.

***Пример* 4.3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{2y^2-9y+9}=8, \\ x^{y^2-5y+6}=4, \end{cases} (x>0). \tag{4.2}$$

Решение. Взяв логарифмы по основанию 2 от обеих частей каждого из уравнений системы (4.2), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2 x^{2y^2-9y+9}=3, \\ \log_2 x^{y^2-5y+6}=2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (2y^2-9y+9)\log_2 x=3, \\ (y^2-5y+6)\log_2 x=2. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение этой системы на второе (это деление не приведет к потере решений, так как ясно, что $y^2-5y+6\neq 0$ и $x\neq 0$, то есть $\log_2 x\neq 0$):

$$\frac{2y^2-9y+9}{y^2-5y+6}=\frac{3}{2},$$

откуда $y_1=3,\ y_2=0$.

Таким образом, решение системы (4.2) свелось к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=3, \\ (y^2-5y+6)\log_2 x=2; \end{cases} \\ \begin{cases} y=0, \\ (y^2-5y+6)\log_2 x=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система этой совокупности решений не имеет, а пара $\left(\sqrt[3]{2};0\right)$ – решение второй системы – является и решением системы (2.9).

Ответ: $(\sqrt[3]{2};0)$.

***Пример* 4.4.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y x}\cdot y=x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Решение. Приведём первое уравнение системы (4.3) к более простому виду. Для этого возьмём от обеих частей уравнения логарифм по основанию y:

$$\log_y(x^{\log_y x}\cdot y)=\log_y x^{\frac{5}{2}},$$

далее

$$\log_y x^{\log_y x}+\log_y y=\frac{5}{2}\log_y x,$$

$$\log_y(x)^2+1=\frac{5}{2}\log_y x.$$

Положив $\log_y x=u$, получим квадратное относительно u уравнение $u^2-\frac{5}{2}u+1=0$, корни которого $u_1=2, u_2=\frac{1}{2}$. Значит, либо $\log_y x=2$, тогда $x=y^2$, либо $\log_y x=\frac{1}{2}$, тогда $x=\sqrt{y}$, то есть $y=x^2$. Итак, следствием первого уравнения системы (4.3) является совокупность уравнений: $x=y^2$; $y=x^2$.

Приведем теперь второе уравнение системы (4.3) к более простому виду. Для этого перейдем от логарифма по основанию y к логарифму по основанию 4:

$$\log_4 y\cdot\frac{\log_4(y-3x)}{\log_4 y}=1,$$

и далее $\log_4(y-3x)=1$, откуда $y-3x=4$. Таким образом, решение системы (4.3) свели к решению следующей совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases}x=y^2,\\ y-3x=4;\end{cases}\begin{cases}y=x^2,\\ y-3x=4.\end{cases}$$

Первая система не имеет решений, вторая имеет решения: $(4;16)$, $(-1;1)$.

Проверка. Решения системы (4.3) должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ y-3x>0,\\ y\neq 1.\end{cases}$$

Пара $(4;16)$ этой системе удовлетворяет, а пара $(-1;\,1)$– нет. Значит, $(4;16)$ – единственное решение системы (4.3).

Ответ: $(4;16)$.

***Пример* 4.5.** Найти решение $(x_0;\ y_0)$ системы уравнений, в ответ записать произведение $x_0 \cdot y_0$:

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 4, \\ \log_{\frac{1}{2}} x - \dfrac{1}{y} = \log_{\frac{1}{2}} y + \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}} y + \frac{1}{y} \tag{4.4}$$

Заметим, что если $x < y$, то $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} y$, $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. Складывая почленно последние два неравенства, получаем $\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{x} > \log_{\frac{1}{2}} y + \frac{1}{y}$, что противоречит равенству (4.4). Аналогичное противоречие получится и в случае $x > y$. Следовательно, $x = y$.

Теперь из первого уравнения системы следует $2x^2 + 2x = 4$, откуда $x^2 + x - 2 = 0$, $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -2. \end{array}\right.$

Второй корень $x = -2$ не входит в область определения системы уравнения. Остается одно решение $x = 1,\ y = 1$. Их произведение равно 1.

Ответ: 1.

***Пример* 4.6.** Найти решение $(x_0;\ y_0)$ системы уравнения, в ответ записать сумму $x_0 + y_0$:

$$\begin{cases} \log_7 x - \log_7 4 + \log_7 y - \log_7 3 = 0, \\ \log_2(x + y) = 5 - \log_2(x - y). \end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения системы, использовав свойства логарифмов:

$$\begin{cases} \log_7 \dfrac{xy}{12} = 0, \\ \log_2\big((x + y)(x - y)\big) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 12, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 12, \\ \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{32}{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 12, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Пусть $\frac{x}{y} = t$. Второе уравнение последней системы примет вид $t - \frac{1}{t} = \frac{8}{3}$, откуда $t^2 - \frac{8}{3}t - 1 = 0$, $3t^2 - 8t - 3 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t_1 = 3, \\ t_2 = -\frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Так как $x > 0$ и $y > 0$, то их отношение положительно, то есть $\frac{x}{y} = 3$.

Имеем $\begin{cases} xy = 12, \\ \frac{x}{y} = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3y, \\ 3y^2 = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6, \\ y = 2, \end{cases}$ откуда следует: $x + y = 8$.

Ответ: 8.

***Пример* 4.7.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = 1 + 2\lg 2\,, \\ \lg (x + y) - \lg(x - y) = \lg 2\,. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения системы, использовав свойства логарифмов:

$$\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = \lg 10 + \lg 4\,, \\ \lg \frac{x+y}{x-y} = \lg 2\,; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = \lg 40\,, \\ \frac{x+y}{x-y} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 + y^2) = 40, \\ \frac{x+y}{x-y} - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 40, \\ 3y - x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 10y^2 = 40, \\ x = 3y; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2, \\ x = 6;\text{'} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ x = -6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение $(-6;\ -2)$ не принадлежит области определения системы уравнений.

Ответ: $(6;\ 2)$.

***Пример* 4.8.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x - y)^{\lg (x+1,5)} = 0{,}2, \\ \sqrt[\lg (x-y)]{2x + 3} = 0{,}1. \end{cases}$$

Решение. Прологарифмировав оба уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} \lg (x + 1{,}5) \lg(x - y) = \lg 2 - 1, \\ \dfrac{1}{\lg(x - y)} \lg(2x + 3) = -1. \end{cases}$$

Введем обозначения $\lg (x + 1{,}5) = u, \lg(x - y) = v$, тогда $\lg(2x + 3) = \lg\big(2(x + 1{,}5)\big) = \lg 2 + \lg (x + 1{,}5) = \lg 2 + u$.

Относительно u и v система примет вид

$$\begin{cases} uv = \lg 2 - 1, \\ \dfrac{\lg 2 + u}{v} = -1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $v = -\lg 2 - u$; подставив в первое уравнение, получим $u^2 + \lg 2u + \lg 2 - 1 = 0$.

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2}\lg 2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}y^2 2 - \lg 2 + 1},$$

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2}\lg 2 \pm \frac{1}{2}(2 - \lg 2),$$

$$u_1 = -\lg 2 + 1 = \lg 5,$$

$$u_2 = -1.$$

Тогда $v_1 = -1, v_2 = -\lg 2 + 1 = \lg 5$.

Решение заданной системы сводится к решению двух систем

$$\begin{cases}\lg(x + 1{,}5) = \lg 5\,, \\ \lg(x - y) = -1\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\lg(x + 1{,}5) = -1, \\ \lg(x - y) = \lg 5\,.\end{cases}$$

Решая их, находим $\begin{cases}x_1 = 3{,}5, \\ y_1 = 3{,}4;\end{cases} \begin{cases}x_2 = -1{,}4, \\ y_2 = -6{,}4.\end{cases}$

Проверкой устанавливаем, что найденные значения x и y есть решения заданной системы.

Ответ: $(3{,}5; 3{,}4), (-1{,}4;\ -6{,}4)$.

4.2 Системы показательных и логарифмических неравенств

При решении систем показательных и логарифмических неравенств применяются те же приемы, что и при решении систем алгебраических неравенств. Во многих случаях, прежде чем применить тот или иной метод решения систем, следует преобразовать каждое неравенство системы к возможно более простому виду.

***Пример* 4.9.** Решить систему неравенств:

$$\begin{cases}7^{2x+1} > 49, \\ 2x - 4 > 3.\end{cases}$$

Решение. Представим 49 в правой части первого неравенства системы в виде степени с основанием 7 и решим оба неравенства, входящих в систему:

$$\begin{cases} 7^{2x+1} > 7^2, \\ 2x - 4 > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 2, \\ 2x - 4 > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0{,}5, \\ x > 3{,}5. \end{cases}$$

Пересечением множеств решений этих неравенств является $x > 3{,}5$.

Ответ: $x > 3{,}5$.

***Пример* 4.10.** Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(5x - 1) \geq 0, \\ 2x + 4 > 3. \end{cases}$$

Решение. Представим 0 в правой части первого неравенства системы в виде логарифма с основанием $\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(5x - 1) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1, \\ 2x + 4 > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 1 \leq 1, \\ 5x - 1 > 0, \\ 2x + 4 > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0{,}4 \\ x > 0{,}2, \\ x > -0{,}5. \end{cases}$$

В результате получаем множество $(0{,}2; 0{,}4]$.

Ответ: $0{,}2 < x \leq 0{,}4$.

***Пример* 4.11.** Решить систему

$$\begin{cases} 5^{2x+1} > 25, \\ 10^{x^2-6x} = 10^{2x-12}. \end{cases}$$

Решение. Для решения смешанной системы необходимо решить уравнение и проверить, удовлетворяют ли его корни неравенству. Получаем

$$10^{x^2-6x} = 10^{2x-12} \Rightarrow x^2 - 6x = 2x - 12 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0.$$

По теореме Виета находим корни последнего уравнения $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Выясним, удовлетворяют ли найденные корни неравенству $5^{2x+1} > 25$.

Для $x_1 = 2$ получаем $5^{2\cdot 2+1} > 25$ – верное числовое неравенство. Для $x_2 = 6$ получаем $5^{2\cdot 6+1} > 25$ – верное числовое неравенство. Таким образом, оба корня являются решениями исходной системы.

Ответ: $\{2;\ 6\}$.

***Пример* 4.12.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \lg^2 100x - 7\lg x \geq 8, \\ \log_{0,2}(x - 1) + \log_{0,2}(x + 3) \geq -1. \end{cases}$$

Решение. Найдем область определения системы неравенств

$$\begin{cases}100x > 0,\\ x > 0,\\ x-1 > 0\\ x+3 > 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x > 0,\\ x > 1,\\ x > -3;\end{cases}$$ откуда $x > 1$.

Преобразуем исходную систему

$$\begin{cases}\lg^2 100x - 7\lg x \geq 8,\\ \log_{0,2}(x-1) + \log_{0,2}(x+3) \geq -1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\lg 100x + \lg x)^2 - 7\lg x \geq 8,\\ \log_{0,2}(x-1)(x+3) \geq -1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lg^2 x + 4\lg x + 4 - 7\lg x \geq 8,\\ \log_{0,2}(x^2+2x-3) \geq -1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lg^2 x - 3\lg x - 4 \geq 0,\\ x^2 + 2x - 3 \leq 5.\end{cases} \tag{4.5}$$

Решим первое неравенство системы (4.5) $\lg^2 x - 3\lg x - 4 \geq 0$.

Обозначив $\lg x = t$, получим квадратное неравенство $t^2 - 3t - 4 \geq 0$, которое решим методом интервалов.

$\left[\begin{array}{l}t \leq -1,\\ t \geq 4.\end{array}\right.$ Делаем обратную замену $\left[\begin{array}{l}\lg x \leq -1,\\ \lg x \geq 4;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x \leq 0{,}1,\\ x \geq 10000.\end{array}\right.$

Решим второе неравенство системы (4.6):

$$x^2 + 2x - 3 \leq 5,\ x^2 + 2x - 8 \leq 0.$$

Решая неравенство методом интервалов, получаем $-4 \leq x \leq 2$.

Учитывая решения первого неравенства системы (4.5) и область определения исходной системы неравенств, получаем, что исходная система решений не имеет.

Ответ: решений нет.

***Пример* 4.13.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2,\\ \lg(x-1) + \lg(x-2) < \lg(x+2).\end{cases}$$

Решение. Найдем область определения системы неравенств, для чего решим систему

$$\begin{cases} x-2>0, \\ 27-x>0, \\ x-1>0, \\ x+2>0, \end{cases} \text{откуда } 2<x<27.$$

Запишем исходную систему неравенств в виде

$$\begin{cases} \lg(x-2)(27-x)<\lg 100, \\ \lg(x-1)(x-2)<\lg(x+2)\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27x-54-x^2+2x<100, \\ x^2-x-2x+2<x+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-29x+154>0, \\ x^2-4x<0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\infty<x<+\infty, \\ x(x-4)<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\infty<x<+\infty, \\ 0<x<4, \end{cases}$$

откуда $0<x<4$.

С учетом области определения системы неравенств решаем систему

$$\begin{cases} 2<x<27, \\ 0<x<4, \end{cases}$$

откуда $2<x<4$.

Ответ: $2<x<4$.

***Пример* 4.14.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_5(x+3)(x+5)+\log_{0,2}(x+3)<1{,}5\log_{\sqrt{5}} 2\,, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1)\le\log_2(2-x)\,. \end{cases}$$

Решение. Найдем область определения системы неравенств

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+5>0, \\ x+1>0 \\ 2-x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-3, \\ x>-5, \\ x>-1 \\ x>2; \end{cases}$$

откуда $-1<x<2$.

Преобразуем исходную систему неравенств

$$\begin{cases} \log_5(x+3)(x+5) + \dfrac{\log_5(x+3)}{\log_5 \frac{1}{5}} < \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\log_5 2}{\log_5 \sqrt{5}}, \\ \dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2 \frac{1}{2}} \le \log_2(2-x)\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5(x+3)(x+5) - \log_5(x+3) < 3\log_5 2\,, \\ -\log_2(x+1) \le \log_2(2-x)\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5 \dfrac{(x+3)(x+5)}{x+3} < \log_5 2^3\,, \\ \log_2(2-x)(x+1) \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 < 8, \\ 2x - x^2 + 2 - x \ge 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3, \\ \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \le 0. \end{cases}$$

Решив второе неравенство системы методом интервалов, получим

$$\begin{cases} x < 3, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

откуда $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Учитывая область определения неравенств, имеем систему

$\begin{cases} -1 < x < 2, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$ откуда $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

***Пример* 4.15.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_4(x^2+y^2) \le 2{,}5 - \log_4 2\,, \\ 0{,}5^{2+y} \le 4 \cdot 0{,}5^{x^2}. \end{cases}$$

Решение. Данная система неравенств определена при $x^2 + y^2 \ne 0$, или $x \ne 0, y \ne 0$, то есть во всех точках координатной плоскости, кроме ее начала.

Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le \frac{4^{2,5}}{2}, \\ 0{,}5^{2+y} \le 0{,}5^{x^2-2}; \end{cases}$$

или $$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ y \ge x^2 - 4. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Линии, заданные равенствами $x^2 + y^2 = 16$ и $y = x^2 - 4$ пересекаются в точках $(-\sqrt{7}; 3)$ и $(\sqrt{7}; 3)$. Построим окружность $x^2 + y^2 = 16$ и параболу $y = x^2 - 4$ (рис. 4.1).

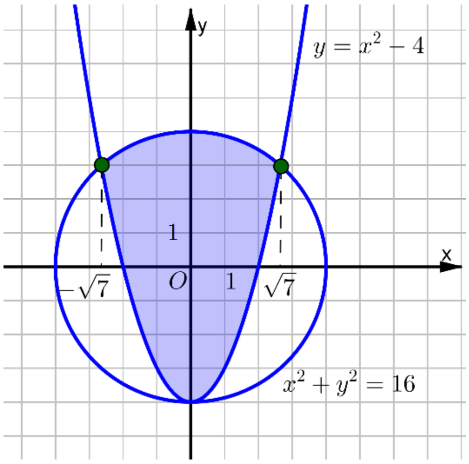


Рис. 4.1. Графическое решение системы $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ y \ge x^2 - 4. \end{cases}$

По рисунку находим, что решением первого неравенства системы (4.6) будут все точки окружности $x^2 + y^2 = 16$ и все точки, лежащие внутри круга, ограниченного этой окружностью, кроме центра круга.

Решениями второго неравенства системы (4.6) есть все точки координатной плоскости, лежащие на параболе $y = x^2 - 4$ и над ней.

Аналитическое решение системы можно записать так:

$$\begin{cases} -\sqrt{7} \le x \le \sqrt{7}, \\ x^2 - 4 \le y \le \sqrt{16 - x^2}, \\ x \ne 0, y \ne 0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} -\sqrt{7} \le x \le \sqrt{7}, \\ x^2 - 4 \le y \le \sqrt{16 - x^2}, \\ x \ne 0, y \ne 0. \end{cases}$

***Пример* 4.16.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \ge 0, \\ \log_3 \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} \le 1. \end{cases}$$

Решение. Сначала решим первое неравенство системы, используя метод введения новой переменной $2^x = t,\ t > 0$. Получим

$$t^2 - 6t + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 2, \\ t \geq 4. \end{array}\right.$$

Переходим к обратной замене:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x \leq 2^1, \\ 2^x \geq 2^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 2. \end{array}\right.$$

Таким образом, решением первого неравенства является множество $(-\infty; 1] \cup [2;\ +\infty)$.

Так как основание логарифма $3 > 1$, то неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} > 0, \\ \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} \leq 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x - 1)(2x + 5)}{x + 1} > 0, \\ \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x + 1} \leq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является множество

$$(-2{,}5;\ -1) \cup (1;\ +\infty),$$

а решением второго неравенства будет множество

$$(-\infty; -2] \cup (-1;\ 2].$$

Следовательно, решением неравенства $\log_3 \frac{2x^2+3x-5}{x+1} \leq 1$ является множество

$$(-2{,}5; -2] \cup (1;\ 2].$$

Решением исходной системы неравенств будет пересечение полученных промежутков, то есть $(-2{,}5; -2] \cup \{2\}$ (рис. 4.2).

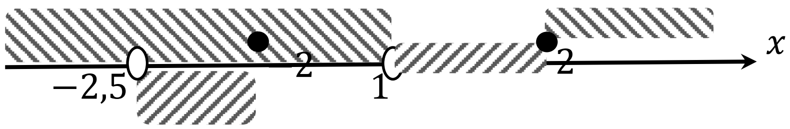


Рис. 4.2. Решение системы $\begin{cases} 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0, \\ \log_3 \frac{2x^2+3x-5}{x+1} \leq 1. \end{cases}$

Ответ: $(-2{,}5; -2] \cup \{2\}$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решите системы уравнений:

1.1. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 3^{x} - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{y} = 7. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 8^{x} = 10y, \\ 2^{x} = 5y. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2^{x} \cdot 9^{y} = 648, \\ 3^{x} \cdot 4^{y} = 432. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x^{y-2} = 4, \\ x^{2y-3} = 64. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x^{y^2-5y+6} = 4, \\ x^{2y^2-9y+9} = 64. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12}, \\ y^{x+y} = x^{3}. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^{4}. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 5\left(\log_y x + \log_x y\right) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3^{x} \cdot 2^{y} = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^{y} = 5^{12}. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} (x + y) \cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3\log_5(x + y) = x - y. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}, \\ \log_5 x^2 + \log_{27} y^3 = \frac{8}{3}. \end{cases}$

Задание 2. Решите системы неравенств:

2.1.

а) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{3}} 36 - \log_{\frac{1}{3}} 4\,, \\ \log_8(4x-1) > 0\,. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{6}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{6}} 36 - \log_{\frac{1}{6}} 0{,}1\,, \\ \log_9(2x-1) > 0\,. \end{cases}$

2.2.

а) $\begin{cases} \log_{2,6}(2x+4) > \log_{2,6}(x-3)\,, \\ \log_{6,7}(4x-1) \leq \log_{6,7}(8x+4)\,. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{2,9}(2x+3) > \log_{2,9}(x-3)\,, \\ \log_{6,2}(3x-1) \leq \log_{6,2}(8x+4)\,. \end{cases}$

2.3.

а) $\begin{cases} 6^{x^2-4x-3} < 36, \\ \log_{\frac{1}{5}}(x^2+3) \geq \log_{\frac{1}{5}} 4x\,. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4^{x^2-3x-26} < 16, \\ \log_{\frac{1}{4}}(x^2+6) \geq \log_{\frac{1}{4}} 5x\,. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_8 5x \geq \log_8(x^2+6)\,, \\ 0{,}7^{x^2-3x-26} > 0{,}49. \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \log_3 4x \geq \log_3(x^2+3)\,, \\ 0{,}1^{x^2-4x-3} > 0{,}01. \end{cases}$

2.4.

а) $\begin{cases} 2^x + 16 \cdot 2^{-x} \geq 17, \\ 2\log_9(4x^2+1) \leq \log_3(3x^2+4x+1)\,. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^x < 1 + 12 \cdot 3^{-x}, \\ 2\ln\frac{1}{3x-2} + \ln(5-2x) \geq 0\,. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} \log_{\log_x 3x}(4x-1) \geq 0, \\ 21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 25^x - 30 \cdot 5^x + 125 \geq 0, \\ \log_x(x-1) \cdot \log_x(x+1) \leq 0. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} \frac{3\cdot 64^x + 2^x - 70}{64^x - 2} \geq 3, \\ \log_3^2(x+3) - 3\log_3(x+3) + 2 \leq 0. \end{cases}$

Список литературы

1. Барвенов С. А. Математика: тренинг решения задач, используемых на централизованном тестировании / С. А. Барвенов, Т. П. Бахтина. 2-е изд., доп. Минск: ТетраСистемс, 2009. 400 с.
2. Вавилов В. В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. М.: Наука, 1987. 240 с.
3. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. М.: Илекса, 2007. 252 с.
4. Горнштейн П. И. Экзамен по математике и его подводные рифы / П. И. Горнштейн, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. – 236 с.
5. Далингер В. А. Всё о логарифмических уравнениях, неравенствах и их системах: учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2008. 246 с.
6. Дорофеев Г. В. Математика: для поступающих в вузы: пособие / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. 4-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2001. 672 с.
7. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Высший балл / сост. Т. М. Ерина. Москва : Издательство «Экзамен», 2017. 350 с. (Серия «ЕГЭ. Высший балл»)
8. ЕГЭ-2024. Математика Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. Москва: Национальное образование, 2024. 224 с. (Серия «ФИПИ – школе»)
9. Литвиненко В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1991. 352 с.
10. Математика: Модуль № 2 для 10 класса. Учебно-методическая часть / сост. Т. А. Осетрова. Красноярск: Красноярский гос. ун-т, 2006. 41 с.

11. Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и к другим формам выпускного и вступительного экзаменов / сост. Г. И. Ковалева, Т. И. Бузулина, О. Л. Безрукова, Ю. А. Розка. Волгоград: Учитель, 2007. 494 с.
12. Мерзляк А. Г. Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. М.: Илекса, 2007. 320 с.
13. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень): в 2 ч. Ч. 1. / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. 6-е изд., стереотип. М.: Мнемозина, 2009. 424 с.
14. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень): в 2 ч. Ч. 1. / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. 4-е изд., стереотип. М.: Мнемозина, 2010. 287 с.
15. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень): в 2 ч. Ч. 2. / [А. Г. Мордкович и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. 5-е изд., испр. М.: Мнемозина, 2011. 264 с.
16. Олехник, С. Н. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. М.: Изд-во Факториал, 1997. 219 с.
17. Райхмист Р. Б. Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в вузы (с решениями и ответами): учеб. пособие. М.: Московский лицей, 2007. 304 с.
18. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). Книга 1. Алгебра / под ред. М. И. Сканави. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Оникс, 1992. – 527 с.

19.Степанова Т. С. Математика. Весь школьный курс в таблицах. 7-е изд. – Минск: Современная школа: Кузьма, 2010. 304 с.
20.Фирер А. В. Элементарная математика. Рациональные уравнения и неравенства / А. В. Фирер, Е. Н. Яковлева, А. П. Елисова, Т. В. Захарова; отв. ред. Н. К. Игнатьева. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2019. 146 с.
21.Черкасов, О. Ю. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену / О. Ю. Черкасов, А. Г. Якушев. 7-е изд. М.: Айрис-пресс, 2003. 432 с.
22.Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 10 класса средней школы. М.: Просвещение, 1989. 252 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Итоговый тест

1. Вычислите значение выражения $3^{-4} \cdot 27^{\frac{-2}{3}} \cdot 9 - 27^{-1\frac{1}{3}} + (8^0)^3 \cdot 2 + (0{,}125)^{-\frac{1}{3}}$.

2. Вычислите значение выражения $9^{-\frac{3}{2}} - (5^0)^3 \cdot 3 - (0{,}01)^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-3} \cdot 9$.

3. Вычислите значение выражения$(0{,}001)^{-\frac{1}{3}} + 27^{-2\frac{1}{3}} + (6^0)^5 \cdot 2 - 81^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-4} \cdot 27$.

4. Вычислите значение выражения $16^{-\frac{5}{4}} - (0{,}01)^{-\frac{1}{2}} + 12 \cdot (7^0)^3 - 16 \cdot 2^{-4} \cdot 4^{-\frac{5}{2}}$.

5. Упростите выражение $\frac{x^{\frac{3}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}}}$ и найдите его значение при $x = 16$:

1) -3

2) 7

3) 9

4) -1

6. Упростите выражение $\frac{x-y}{x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}}} - 2x^{-1}$ и найдите его значение при $x = 4, \quad y = 9$:

1) 1

2) $2\frac{1}{2}$

3) $\frac{3}{4}$

4) $-\frac{1}{4}$

7. Упростите выражение $\frac{(b^2)^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{-2}{5}}}$:

1) $b^{\frac{1}{5}}$

2) $b^{\frac{4}{5}}$

3) b

4) b^2

8. Упростите выражение $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2 \sqrt[3]{a^2}$:

1) a

2) $a^{\frac{13}{6}}$

3) a^3

4) $a^{\frac{9}{4}}$

9. Упростите выражение $\left(b^{\frac{5}{6}}\right)^3 \sqrt[4]{b^3}$:

1) $b^{\frac{13}{4}}$

2) $b^{\frac{15}{8}}$

3) b

4) $b^{\frac{23}{6}}$

10. Вычислите $\frac{3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}\cdot\sqrt[4]{27}}{3^{-\frac{1}{4}}}$:

1) 243

2) 81

3) $\frac{1}{3}$

4) 27

11. Вычислите $4 \cdot 0{,}0025^{-0,5} \cdot \sqrt[3]{0{,}001}$:

1) 0,8

2) 0,2

3) 8

4) 80

12. Вычислите $5 \cdot \sqrt[3]{0{,}0004} \cdot 0{,}216^{-\frac{1}{3}}$:

1) $\frac{1}{6}$

2) 6

3) $\frac{5}{3}$

4) 0,12

13. Вычислите $\log_5 10 + \log_5 \frac{1}{1250}$.

1) 1

2) 2

3) 6

4) –3

14. Вычислите $\log_{\frac{1}{2}} 36 + \log_2 9$:

1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{9}$

2) 2

3) $\log_{\frac{1}{2}} 9$

4) –2

15. Вычислите $\log_5 3 - \log_5 15 + \log_3 5$:

1) $\log_3 5 - 1$

2) –2

3) 0

4) $\log_5 \frac{8}{15}$

16. Вычислите $2^{\log_2 3} + \log_7 2 - \log_7 14$:

1) 7

2) $2 + 2\log_7 2$

3) 2

4) $3 - 6\log_7 2$

17. Вычислите $9^{\log_9 2 + \log_4 \frac{1}{16}}$:

1) $\frac{1}{8}$

2) $\frac{2}{81}$

3) 0

4) 4

18. Вычислите $\frac{\log_3 28 - \log_3 7}{\log_3 \frac{2}{5} + \log_3 5}$:

1) $\log_3 2$

2) 4

3) $\log_3 4$

4) 2

19. Вычислите значение выражения $\lg(2a) + \lg(5b)$, если $\lg(ab) = 3$:

1) 1,5

2) 6

3) 3

4) 4

20. Вычислите значение выражения $\log_5\left(\frac{25a}{b}\right)$, если $\log_5 a = 3, \log_5 b = 4$:

1) 1

2) $\frac{75}{4}$

3) $\frac{3}{2}$

4) 18

21. Вычислите значение выражения $3\log_{12}\sqrt[3]{a}$, если $\log_{12} a = -2$:

1) –2

2) –6

3) –18

4) 18

22. Вычислите значение выражения $10^{\lg\lg(10a)}$, если $\lg a = 4$:

1) 3

2) 10

3) –3

4) 5

23. Вычислите значение выражения $\lg(10a) + \lg\left(\frac{1}{a}\right)$, если $a^2 = 10^4$:

1) 1

2) –3

3) 5

4) 0

24. Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{125}\right)^{0,2x+1} = 25$:

1) $(3; 9]$

2) $(-7; 0)$

3) $(-9; -7]$

4) $(0; 3]$

25. Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{36}\right)^{2,25x-2} = 6$:

1) $(-3; -2]$

2) $(-2; 0)$

3) $[2;\ -5)$

4) $[0; 2)$

26. Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,5x+1} = 8$:

1) $(-5; -1)$

2) $[-1; 0)$

3) $[0;\ 1)$

4) $[1; 4]$

27. Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{32}\right)^{0,1x-1} = 16$:

1) $(-1; 1]$

2) $(1; 10]$

3) $(-3;\ -1]$

4) $(16; 20]$

28. Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 3^{x+1} = 1$:

1) $[-4; -2]$

2) $(-2; -1)$

3) $[-1; 0]$

4) $(1; 2)$

29. Решите уравнение $\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}}$. В ответе укажите меньший корень.

30. Решите уравнение $\frac{2^{x^2+2}}{6^{3x}} = \frac{6^{3x}}{3^{x^2+2}}$. В ответе укажите меньший корень.

31. Решите уравнение $7 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 2 \cdot 5^{-3}$, вынося за скобки степень с наименьшим показателем.

32. Решите уравнение $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$, вынося за скобки степень с наименьшим показателем.

33. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$2^{2x-1} + 2^{2x+1} = 20:$$

1) $(4; 5)$

2) $[3; 4)$

3) $(2;\ 3)$

4) $[1; 2]$

34. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$3^{x+2} - 3^x = 216:$$

1) $(-\infty; -3]$

2) $[-2; 0)$

3) $(0;\ 2]$

4) $[3; 6]$

35. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180:$$

1) $(-1; 0]$

2) $(2;\ \log_5 36]$

3) $(0;\ 2]$

4) $(3; 5]$

36. Определите графически, сколько корней имеет уравнение $2^x = 2 - x$.

37. Определите графически, сколько корней имеет уравнение $5^x = 4 - x^2$.

38. Определите графически, сколько корней имеет уравнение $2^x = 1 + \frac{1}{x}$.

39. Определите графически, сколько корней имеет уравнение $3^x = (x+1)^2$.

40. Решите простейшее уравнение $\log_3(2 - x) = 2$ по определению.

41. Решите простейшее уравнение $\log_3\left(\sqrt{x} + 1\right) = 1$ по определению.

42. Решите простейшее уравнение $\log_{0,5}(3x + 1) = -2$ по определению.

43. Решите простейшее уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(5 - \log_3 x) = -2$.

44. Решите простейшее уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(3 - \log_3(x - 2)) = 0$.

45. Решите простейшее уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(1 + \log_2(x - 5)) = -1$.

46. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$\log_7(2x - 1) = 1:$$

1) $(-\infty; -2)$

2) $(2; 1/2)$

3) $[-1/2;\ 2]$

4) $(2;\ +\infty)$

47. Найдите произведение корней уравнения $1 - \lg(x^2 + 1) = 0$:

1) -99

2) -9

3) 33

4) -33

48. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$\ln(x - 5)^2 = 0:$$

1) $(-7; -5)$

2) $(-5; -3)$

3) $(2; 4)$

4) $(5;\ 7)$

49. Решите неравенство $4^x \geq \frac{1}{2}$:

1) $(-\infty; 0{,}5]$

2) $[0{,}5;\ +\infty)$

3) $[-0{,}5;\ +\infty)$

4) $(-\infty; -0{,}5]$

50. Решите неравенство $5^{2-3x} - 1 \geq$:.

1) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

2) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]$

3) $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$

4) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

51. Решите неравенство $\left(\sqrt{3}\right)^x \leq$:.

1) $(-\infty; -6]$

2) $(-\infty;\ -12]$

3) $[-6;\ +\infty)$

4) $(-\infty; 1{,}5]$

52. Укажите количество целых решений неравенства $\left(\frac{2}{5}\right)^{-25x^2+20x+10} < \frac{25}{4}$.

53. Укажите наименьшее целое решение неравенства $3^{5+x} + 3^{4+x} > 36$.

54. Укажите количество целых решений неравенства $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

55. Укажите середину промежутка, являющегося решением неравенства $\log_{\frac{1}{8}}(3 - x) > -2$.

56. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(6 - 0{,}3x) > -1$:

1) $(-10; +\infty)$

2) $(-\infty;\ -10)$

3) $(-10; 20)$

4) $(-0{,}1; 20)$

57. Найдите число целых отрицательных решений неравенства

$$\lg(x+5) < 2 - \lg 2:$$

1) 5

2) 4

3) 10

4) ни одного

58. Найдите количество целых решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 8) \geq -1.$$

59. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства

$$\log_2(x^2 - x - 2) \geq 11^{\frac{1}{\log_{16} 11}}.$$

60. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\log_{\sqrt{5}}(2x-1) - \log_{\frac{1}{25}}(2x-1) < \frac{5}{2}.$$

61. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{0,5} \log_4 \frac{2x-1}{x+1} < 1$.

62. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 10x) \leq \log_{\sqrt{2}}(14 - 5x).$$

63. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,5}^2 x^2 - \log_{0,5} x - 3 < 0.$$

64. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} 7^{2x+1} > 49, \\ 2x - 4 > 3. \end{cases}$$

Ключ к тесту

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
4	7	12	2	1	3	2	2
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
1	4	3	1	4	4	3	3
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
2	2	4	1	1	4	1	3
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
4	1	2	3	2	1	–3	3
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
2	4	3	1	2	2	2	–7
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
4	1	3	11	9	4	2	4
49	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
3	2	1	2	–1	5	–29	3
57	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**
2	2	3	2	–2	–2	1	4

Учебное пособие

Фирер Анна Владимировна,

Яковлева Елена Николаевна.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА.
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Корректор Т. И. Тайгина

Компьютерная верстка авторов

Подписано в печать 05.02.2025. Формат 60x84/16

Бумага офсетная Печать офсетная

Усл. печ. л. 7.0. Тираж 50 экз.

Библиотечно-издательский комплекс

Сибирского федерального университета

660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а

Тел. (391) 206-26-67; http://bik.sfu-kras.ru

E-mail: publishing_house@sfu-kras.ru

Отпечатано в типографии МБУ «ЕГИЦ»

г. Енисейск, ул. Ленина, 101; тел.: 8(39195)26065