Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
код и наименование направления

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРОГРЕССИИ»
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ
тема

Руководитель ________________ Е.Н. Яковлева___________
подпись инициалы, фамилия

Выпускник ________________ Н.А. Клеветова__________
подпись инициалы, фамилия

Лесосибирск 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
код и наименование направления

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРОГРЕССИИ»
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Работа защищена «25» июня 2019 г. с оценкой «удовлетворит.»

Председатель ГЭК ______ А.М. Гилязутдинова
подпись инициалы, фамилия

Члены ГЭК ______ Е.Н. Яковлева
подпись инициалы, фамилия
______ Н.Ф. Романцова
подпись инициалы, фамилия
______ А.А. Степанов
подпись инициалы, фамилия
______ В.В. Фирер
подпись инициалы, фамилия

Руководитель ______ Е.Н. Яковлева
подпись инициалы, фамилия

Выпускник ______ Н.А. Клеветова
подпись инициалы, фамилия

Лесосибирск 2019

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме: «МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ ПРОГРЕССИЯ» содержит 68 страниц текстового документа, 40 использованных источников, 2 таблицы, 6 рисунков и 2 приложения.

ПРОГРЕССИЯ, АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ.

Для того чтобы знания ученика были на достаточно высоком уровне, необходимо активизировать его познавательную деятельность при изучении прогрессий. Поэтому теоретические и практические исследования по данной теме представляются актуальными в настоящее время и обусловлены насущными потребностями общеобразовательных школ.

Цель исследования – рассмотрение методики изучения темы «Прогрессии».

Объектом исследования – является процесс обучения математике в основной школе.

Предметом исследования – являются методы, средства и формы обучения теме «Прогрессии» в основной школе.

Основные задачи исследования:

1. Провести анализ школьных учебников по теме «Прогрессии» в условии реализации ФГОС;
2. Охарактеризовать основной понятийный аппарат по теме «Прогрессии»;
3. Рассмотреть особенности изучения темы «Прогрессии»;
4. Раскрыть методику изучения темы «Прогрессии» в школьном курсе;
5. Разработать дидактический материал к изучению темы «Прогрессии».

Практическая значимость выпускной работы заключена в разработке дидактических материалов по теме «Прогрессии».

ВВЕДЕНИЕ

Тема «Прогрессии» является обособленным разделом в школьном курсе математики, однако на ее изучение отводится не более 14 часов, что не является достаточным для тщательного исследования данной темы. Учащиеся на уроках знакомятся с основными понятиями прогрессии и учатся находить конкретный член числового ряда.

Но, несмотря на это задачи, для решения которых необходимо знать не только формулы n-го члена и суммы первых n членов, но и свойства арифметической и геометрической прогрессий, предлагаются на государственной итоговой аттестации в форме ОГЭ и ЕГЭ.

Для того чтобы знания ученика были на достаточно высоком уровне, необходимо активизировать его познавательную деятельность при изучении прогрессий. Поэтому теоретические и практические исследования по данной теме представляются актуальными в настоящее время и обусловлены насущными потребностями общеобразовательных школ.

Геометрическая и арифметическая прогрессии играют очень важную роль не только в школьном курсе алгебры. Важность этого на первый взгляд небольшого раздела школьного курса заключается в его чрезвычайно широких областях применения в жизни. Например, в химии, при повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.

В заданиях ЕГЭ по математике также есть задачи на применение арифметической и геометрической прогрессий, но уже с практическим содержанием. Поэтому крайне важно дать полное описание этого курса, чтобы учащийся мог повторить уже известный ему из школьного курса материал, и даже почерпнуть много нового и интересного. В этом состоит актуальность темы выпускной квалификационной работы

Целью исследования является рассмотрение методики изучения темы «Прогрессии».

Основные задачи исследования:

1. Провести анализ школьных учебников по теме «Прогрессии» в условии реализации ФГОС;
2. Охарактеризовать основной понятийный аппарат по теме «Прогрессии»;
3. Рассмотреть особенности изучения темы «Прогрессии»;
4. Раскрыть методику изучения темы «Прогрессии» в школьном курсе;
5. Разработать дидактический материал к изучению темы «Прогрессии».

Объектом исследования является процесс обучения математике в основной школе.

Предметом исследования являются методы, средства и формы обучения теме «Прогрессии» в основной школе.

Методологической основой исследования являются работы отечественных ученых: Дорофеева Г.В. [6], Суворова С.Б. [6], Кузнецовой Л.В. [20], Пигарева Б.П. [20], Мордковича А.Г. [24], Алимова Ш. А. [2] и других.

Методы исследования: анализ психолого-педагогической литературы по проблеме исследования, обобщение.

Практическая значимость: заключена в разработке дидактических материалов по теме «Прогрессии».

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и 40 наименований использованных источников.

Во введении раскрываются основная цель, задачи и методы исследования, используемые при выполнении выпускной квалификационной работы.

В первой главе рассматриваются основные понятия темы «Прогрессии», особенности ее изучения, а так же проводится анализ содержания учебно-методических комплектов по данной теме в курсе математики основной школы.

Во второй главе рассматриваются различные подходы к введению понятий арифметической и геометрической прогрессий, методы, средства и формы обучения при изучении темы «Прогрессии», а так же представлен дидактический материал по данной теме.

В заключении делаются выводы по теме исследования.

По результатам исследования опубликована статья:

Клеветова Н.А. «Методика изучения прогрессии» // Академия педагогических идей «Новация», апрель 2019

1 Теоретические основы изучения темы прогрессия в курсе математики основной школы

1.1 Анализ школьных учебников по теме «Прогрессии» в условии реализации ФГОС

Как правило, обучение математике в школе строится на изучении теоретического материала, представленного в учебниках, рекомендованных Министерством образования РФ. Успешная обучаемость школьника во многом зависит от того, как построено содержание и структура материала в том учебнике, по которому он занимается. Тексты под редакцией различных авторов воспринимаются школьниками по-разному: кто-то воспримет материал сразу и с удовольствием, кто-то с трудом и без понимания прочитанного. Проведем сравнительный анализ известных школьных учебников с позиций подачи темы «Прогрессии» и доступности усвоения учебного материала [38].

В современной школе наибольшее распространение получили учебники известных ученых [2, 3, 16, 22, 24, 25, 26, 27]: Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина, Г. К. Муравина, К. С. Муравина, О. В. Муравиной, Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, А. Г. Мордковича, С.М. Никольского, М. В. Ткачевой.

Условно учебники данных авторов можно разделить на две группы:

– изложение материала по теме «Прогрессии» по традиционной методике – Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева;

– изложение материала в параллели с арифметической и геометрической прогрессией: Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина.

Проанализируем учебники авторов первой группы:

1) Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. Алгебра 9 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014.

В данном учебнике теме «Прогрессии» посвящена 4 глава: сначала вводится в рассмотрение числовая последовательность, затем арифметическая прогрессия, далее геометрическая прогрессия, и в конце рассматриваетсяметод математической индукции [22].

2) Мордкович А.Г. Алгебра. 9 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2010. -192 с.

Последовательность изложения схожа с последовательностью как у Ю.Н. Макарычева: глава 4 посвящена прогрессиям, сначала вводится в рассмотрение числовая последовательность, затем арифметическая прогрессия и далее геометрическая прогрессия. После теоретического материала рассматриваются основные результаты, задачный материал обширен, круг рассматриваемых задач полно иллюстрирует теоретическую основу [24].

3) Мордкович А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 9 класс: учебник. – М.: Мнемозина, 2016. – 296 с.

Этот учебник является продолжением аналогичного учебника для 8-го класса. Глава 7 «Прогрессии»: помимо рассматриваемых в основном учебнике тем «Прогрессии», вводится в рассмотрение метод математической индукции. В нем практически полностью реализована действующая государственная программа для классов с углубленным изучением математики в основной школе (включая более сложный и дополнительный материал) [25].

Данный учебник поможет организовать предпрофильное обучение школьников, которые в старших классах выберут математическую профильную подготовку [25].

Во второй группе учебников алгебры 9 класса авторов Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина; Г. К. Муравина, К. С. Муравина, О. В. Муравиной темы алгебраической и геометрической прогрессии вводятся параллельно.

Рассмотрим их подробнее.

1) Алгебра. Учебник для 9 класса средней школы / под ред. Ш.А. Алимова. – М.:Просвещение, 2016 г.

В данном учебнике тема «Арифметическая и геометрическая прогрессии» изучается в 5 главе «Прогрессии». Тема изучается в последней четверти, после темы «Элементы тригонометрии». Структура обучения в данном учебнике представлена так [2]:

– первый параграф излагает числовую последовательность, при этом определения числовой последовательности не дается. Дается два способа задания последовательности: аналитический и рекуррентный.

– изучается арифметическая прогрессия (2 параграф): представляется индуктивное определение арифметической прогрессии, выводится формула n-ого члена, формулируется свойство арифметической прогрессии, которое вводится через задачу (при доказательстве используется свойство средней линии в трапеции), выводится и доказывается формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Критерий арифметической прогрессии, как в учебниках Мордковича А.Г., не формулируется.

– после арифметической прогрессии изучается геометрическая прогрессия: индуктивно дается ее определение, формула n-ого члена, выводится свойство геометрической прогрессии (критерий также не формулируется), выводится и доказывается формула суммы n первых членов геометрической прогрессии. Бесконечно убывающей геометрической прогрессии посвящен отдельный параграф. Дается определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, выводится формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии [2].

Автор Алимов Ш.А. вводит некоторые понятия предела последовательности, но самого понятия предела не касается, как, например, автор Мордкович А.Г.

2) Муравин К.С. и др. Алгебра. 9 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа, 2016. – 240с. Учебник завершает учебно-методический комплект по алгебре 7-9 классов.

Теоретический материал учебника разбит на обязательный и дополнительный, четко сформулированы алгоритмы решения стандартных задач. Дифференцированная система упражнений содержит задания обязательного и повышенного уровня, развивающие задачи и трудные [26].

Глава 4 носит название «Прогрессии», содержит параграфы: числовые последовательности (последовательность и функции, рекуррентные последовательности), арифметическая и геометрическая прогрессии (определение прогрессии, формулы n-го члена прогрессии), сумма членов прогрессий (сумма первых n членов арифметической и геометрической прогрессии, сумма БУГП). Достаточно большой объем практического материала на отработку теории [26].

В отличие от других учебников для 9 классов, в которых также представлена тема «Прогрессии», в данном учебнике ведется параллельное рассмотрение арифметической и геометрической прогрессии. Укрупнение дидактических единиц существенно упрощает изложение темы для учителя и способствует лучшему восприятию материала учениками [26].

3) Алгебра: учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики / под ред. Н.Я. Виленкина– М.: Просвещение, 2016.

В данном учебнике арифметическая и геометрическая прогрессии изучаются в главе «Последовательности» (11 глава, предпоследняя в учебнике). Изучается после темы «Уравнения и неравенства и их системы». Первый параграф посвящен числовым последовательностям. Числовая последовательность вводится как функция, заданная на множестве натуральных чисел (как и у Мордковича). Дается рекуррентный способ задания последовательности и аналитический (у Мордковича рассматривается три способа задания последовательности). Рассматривается монотонность последовательности [3].

Второй параграф в этой главе посвящен методу математической индукции. Далее индуктивно дается определение арифметической прогрессии, формулируется критерий арифметической прогрессии (характеристическое свойство), который и дает название арифметической прогрессии. Говорится о том, что общий член этой последовательности является значением линейной функции, но график не приводится (как у Мордковича), вводится формула *n*-ого члена арифметической прогрессии. Выводится и доказывается формула суммы *n* первых членов арифметической прогрессии [3].

Затем изучается геометрическая прогрессия: дается индуктивно ее определение, формула *n*-ого члена. Вводится и доказывается свойство геометрической прогрессии. Далее вводится утверждение, обратное свойству (признак) и формулируется критерий геометрической прогрессии. Выводится формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии [3].

Следующий параграф посвящен пределу последовательности: изучаются бесконечно малые последовательности, их свойства, бесконечно большие последовательности. Дается определение предела последовательности, рассматриваются свойства предела последовательности (не вводится ни в каком больше учебнике), признак существования предела (не входит в обязательное для изучения). Только в этом параграфе рассматривается бесконечно убывающая геометрическая последовательность и выводится формула суммы для бесконечно убывающей геометрической последовательности [3].

Таким образом, анализ школьных учебников показал, что выделяются два учебника, для изучения ученикам средней школы для изучения темы «Прогрессии» под редакцией А.Г. Мордковича и Н.Я. Виленкина, в данных учебниках наиболее подробно рассматривается тема «Прогрессии».

1.2 Основной понятийный аппарат темы «Прогрессии»

Определение понятия «Прогрессия» имеет латинское происхождение и означает «движение вперед» [5]. Под прогрессией ранее подразумевали всякую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении. Например, возводя последовательные целые числа в квадрат, получаем последовательность: 1, 4, 9, 16, 25 и т.д. В современной математической науке термин «прогрессия» употребляется в словосочетании «арифметическая» и «геометрическая», а прогрессия употребляется как последовательность, числовая последовательность.

Основные понятия темы «Прогрессии» – это арифметическая и геометрическая прогрессии [10].

Арифметической прогрессией называется последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом. Иначе говоря, последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие: $a_{n+1} = a_n + d$, где d – некоторое число [15].

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна d, т.е. при любом натуральном n верно равенство: $a_{n+1} - a_n = d$. Число d называют разностью арифметической прогрессии. Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать первый её член и разность [25].

Пример 1. Если $a_1 = 1$ и $d = 1$, то получим арифметическую прогрессию: 1, 2, 3, 4, 5, … , члены которой – последовательные натуральные числа.

Пример 2. Если $a_1 = -2$ и $d = -2$, то заданная арифметическая прогрессия: –2, –4, –6, –8, –10, … является последовательностью отрицательных четных чисел.

Пример 3. Если $a_1 = 7$ и $d = 0$, то имеем арифметическую прогрессию: 7, 7, 7, … , все члены которой равны между собой.

Очевидно, что арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если $d > 0$ (см. пример 1), и убывающей, если $d < 0$ (см. пример 2).

Для обозначения того, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, иногда удобна запись:

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Значок ÷ заменяется словосочетание «арифметическая прогрессия».

Если в арифметической прогрессии отбросить все члены, следующие за каким-то конкретным членом последовательности, например за a_n, то получится *конечная арифметическая прогрессия*:

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член, вычисляя последовательно второй, третий, четвертый и т. д. члены. Но для нахождения члена прогрессии с больший номером такой способ неудобен [37].

По определению арифметической прогрессии

$a_2 = a_1 + d,$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2\cdot d) + d = a_1 + 3d,$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3\cdot d) + d = a_1 + 4d,$

Точно так же находим, что $a_6 = a_1 + 5\cdot d$, $a_7 = a_1 + 6\cdot d$, и вообще, чтобы найти a_n нужно к a_1 прибавить $(n – 1)\cdot d$, т. е. $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$.

Мы получили *формулу n-го члена арифметической прогрессии*.

Рассмотрим формулу суммы членов конечной арифметической прогрессии [7].

Пусть дана конечная арифметическая прогрессия:

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Обозначим через S_n сумму ее членов:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Рассмотрим конкретный пример отыскания S_n. Дана конечная арифметическая прогрессия 1, 2, 3, …, 98, 99, 100. Сумму ее членов вычислим следующим образом:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) = 101 + 101 + 101 + \ldots + 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Примерно та же идея используется для вычисления суммы членов произвольной конечной арифметической прогрессии [26].

Для начала заметим, что $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$.

В самом деле, по определению арифметической прогрессии $a_2 = a_1 + d$, $a_{n-1} = a_n - d$. Значит,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n.$$

Аналогично можно установить, что сумма члена находящегося на k-м месте от начала конечной арифметической прогрессии, и члена, находящегося на k-м месте от ее конца, равна сумме первого и последнего членов прогрессии: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Теперь вычислим S_n. Имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Сложив эти два равенства, получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В правой части равенства nпар слагаемых, каждая пара равна $a_1 + a_n$. Значит, $s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$. Это *формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.*

Так же немаловажным является характеристическое свойство арифметической прогрессии, рассмотрим его подробнее [3].

Пусть дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Рассмотрим три ее члена, следующие друг за другом: a_{n-1}, a_n, a_{n+1}. Известно, что:

$$a_n - d = a_{n-1},$$

$$a_n + d = a_{n+1}.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Это значит, что каждый член арифметической прогрессии, кроме первого, равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов [27].

Верно и обратное: если последовательность a_n такова, что для любого $n > 1$ выполняется равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

то a_n является арифметической прогрессией.

В самом деле, последнее равенство можно переписать в виде

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Это значит, в частности, что $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, $a_3 - a_2 = a_4 - a_3$ и т.д. Иными словами, равность между любым членом последовательности и предшествующим ему всегда одна и та же, а это и означает, что задана арифметическая прогрессия [24].

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего – в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов (*характеристическое свойство арифметической прогрессии*) [25].

Теперь рассмотрим геометрическую прогрессию.

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число. Иначе говоря, последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, если для любого натурального n выполняются условия: $b_n \neq 0$ и $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где q – некоторое число. Обозначим, например, через (b_n) последовательность натуральных степеней числа 2. В этом случае для любого натурального n верно равенство $b_{n+1} = b_n \cdot 2$; здесь $q= 2$ [22].

Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т.е. при любой натуральном n верно равенство: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Число q называют знаменателем геометрической прогрессии. Очевидно, что знаменатель геометрической прогрессии отличен от нуля. Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и знаменатель [2].

Пример 1. Если $b_1 = 1$ и $q = 0{,}1$, то получим геометрическую прогрессию: 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; . .. .

Пример 2. Условиями $b_1 = -2$ и $q= 3$ задается геометрическая прогрессия $-2, -6, -18, -54, -162, \ldots$.

Пример 3. Если $b_1 = 8$ и $q = 1$, то получим геометрическую прогрессию 8, 8, 8, … .

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии, можно найти последовательно второй, третий, а также любой её член:

$b_2 = b_1 \cdot q$,

$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2$,

$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3$,

$b_5 =b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3) \cdot q = b_1 \cdot q^4$.

Точно так же находим, что $b_6 = b_1 \cdot q^5$ и т. д. Вообще, чтобы найти b_n, мы должны b_1 умножить на q^{n-1}, т. е. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Мы получили *формулу n-го члена геометрической прогрессии*.

Рассмотрим формулу суммы членов конечной геометрической прогрессии [7].

Пусть дана конечная геометрическая прогрессия

$$\div\div b_1, b_2, b_3, \ldots b_n.$$

Обозначим через S_n сумму ее членов:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n.$$

Выведем формулу для отыскания этой суммы.

Начнем с самого простого случая, когда $q = 1$. Тогда геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ состоит из n чисел, равных b_1, т.е. прогрессия имеет вид $b_1, b_1, b_1, \ldots b_1$. сумма этих чисел равна nb_1 [15].

Пусть теперь $q \neq 1$. Для отыскания S_n применим искусственный прием: сначала рассмотрим $S_n \cdot q$.

Имеем:

$$S_n \cdot q = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n)q =$$

$$b_1q + b_2q + b_3q + \ldots + b_{n-2}q + b_{n-1}q + b_nq =$$

$$b_2 + b_3 + b_4 + \dots b_{n-1} + b_n + b_nq.$$

Значит,

$$S_n = b_1 + (b_2 + b_3 + \dots + b_n),$$

$$S_n \cdot q = (b_2 + b_3 + \dots + b_n) + b_nq.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$S_n \cdot q - S_n = b_nq - b_1.$$

В левой части вынесем за скобки общий множитель S_n, а в правой – используем формулу $b_n = b_1q^{n-1}$ и вынесем за скобки общий множитель b_1:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Мы получили *формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии*.

Так же немаловажным является характеристическое свойство геометрической прогрессии, рассмотрим его подробнее [16].

Пусть дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$.Рассмотрим три ее члена, следующие друг за другом: b_{n-1}, b_n, b_{n+1}. Известно, что

$$\frac{b_n}{q} = b_{n-1},$$

$$b_nq = b_{n+1}.$$

Перемножив эти равенства получим:

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Это значит, что квадрат каждого члена геометрической прогрессии, кроме первого (и последнего – в случае конечной прогрессии), равен произведению предшествующего и последующего членов [16].

Верно и обратное: если последовательность b_n, состоящая из чисел, отличных от нуля, такова, что для любого $n > 1$выполняется равенство

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

то b_n – геометрическая прогрессия.

В самом деле, последнее равенство можно переписать в виде

$$b_n : b_{n-1} = b_{n+1} : b_n.$$

Это значит, в частности, что $b_2 : b_1 = b_3 : b_2$, $b_3 : b_2 = b_4 : b_3$ и т.д. Иными словами, отношение любого члена последовательности к предшествующему члену всегда одно и то же, а это и означает, что задана геометрическая прогрессия [15].

Фактически мы доказали следующую теорему.

Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, кроме первого (и последнего – в случае конечной последовательности), равен произведению предшествующего и последующего членов (*характеристическое свойство геометрической прогрессии*) [16].

Таким образом, основными понятиями темы «Прогрессии» являются:

– Арифметическая и геометрическая прогрессии;

– Формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессий;

– Формула суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий;

– Характеристическое свойство арифметической и геометрической прогрессий.

1.3 Особенности изучения темы «Прогрессии»

Тема «Прогрессии» является более «изолированной» от других разделов алгебры, чем тема «Неравенства» или «Уравнения с двумя неизвестными». Как правило, на нее отводится не более 14 часов учебного плана [32]. Безусловно, столь короткого срока не хватит на доскональное изучение материала.

Задания, которые предусматривают вычисление прогрессий у школьников обычно не вызывает особых затруднений, но вот сравнение двух числовых рядов между собой и понимание их свойств является для учеников настоящей проблемой [4].

Числовые последовательности и, как частный случай, прогрессии изучаются в курсе алгебры 9 класса. По мнению А.Г. Мордковича тема

«Прогрессии» является «тупиковой, не имеющей связей с остальным материалом основной школы. Последовательности – тема математического анализа, и было бы логичнее начинать с нее изучение начал математического анализа в старшей школе» [24].

Однако в стандарте математического образования тема «Прогрессии» представлена в рамках основной школы, и изучение ее является необходимым. Уровень обязательной подготовки характеризует следующий минимум, который должны достичь все учащиеся при изучении темы «Прогрессии» [8, 31]:

– правильно употреблять буквенную символику;

– составлять несложные буквенные выражения и формулы;

– осуществлять в формулах числовые подстановки и выполнять соответствующие вычисления.

Особенностями изучения темы «Прогрессия» является то, что она может изучаться двумя способами [29, 33]:

– традиционно – раздельно арифметическая прогрессия и геометрическая прогрессия. В заключение проводится отдельное обобщающее занятие, позволяющее систематизировать полученные знания;

– параллельно – одновременное изучение разнотипных прогрессий.

На первом уроке темы необходимо разъяснить смысл понятий последовательность, n-й член последовательности, выработать умение использовать индексные обозначения [12, 23].

Для более сильных учащихся можно ввести строгое определение последовательности как функции натурального аргумента, понятие области определения и области значений такой функции, графическое изображение последовательности. На этом же уроке уместно показать различные способы задания последовательности [12, 23].

Необходимым условием приобретения умений решать задачи и примеры с прогрессиями является знание всех формул из этой темы и наличие навыков их преобразования. Поэтому на практике необходимо уделять особое внимание приемам, позволяющим повышать эффективность усвоения учащимися формул и выражать из них неизвестные величины [14, 21].

Это позволяет учащимся рассмотреть тему с разных ракурсов, а значит, в конечном итоге прояснить ее суть.

В результате изучения темы учащийся должен освоить [32]:

Учебные задачи темы:

1. Формирование представления о числовых последовательностях, о рекуррентном способе задания числовых последовательностей.
2. Формирование представления об арифметической и геометрической прогрессиях, как частных случаях числовых последовательностей; изучение их определений и свойств (по аналогии друг с другом).
3. Раскрытие практического значения этих понятий (особенно бесконечно убывающей геометрической прогрессии).
4. Выявление групп взаимосвязанных задач по теме.

В результате изучения темы ученик знает [32]:

- понятие числовой последовательности;
- понятие бесконечной числовой последовательности;
- понятие членов последовательности;
- два способа задания последовательности (с помощью формулы ее n-ого члена и рекуррентный способ);
- определение арифметической прогрессии, определение геометрической прогрессии;
- рекуррентные формулы n-ого члена арифметической и геометрической прогрессии;
- характеристические свойства арифметической и геометрический прогрессии и их доказательства;
- формулы n-ого члена арифметической и геометрической прогрессии;
- формулы суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии и их доказательства;

– определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

– определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

– формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

В результате изучения темы ученик умеет [32]:

– формулировать определение рекуррентного способа задания последовательности;

– формулировать определения арифметической и геометрической прогрессии;

– применять рекуррентные формулы *n*-ого члена арифметической и геометрической прогрессии;

– формулировать, доказывать и применять характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессии;

– применять формулы *n*-ого члена арифметической и геометрической прогрессии;

– доказывать и применять формулы суммы *n* первых членов арифметической и геометрической прогрессии;

– формулировать определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

– формулировать определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

– применять формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

В результате изучения темы ученик понимает [32]:

– что арифметическая и геометрическая прогрессии являются числовыми последовательностями;

– взаимосвязь понятий арифметической и геометрической прогрессии и среднего арифметического;

– аналогию определений и свойств арифметической и геометрической прогрессий;

– что характеристическое свойство арифметической и геометрической прогрессии является критерием (свойством и признаком);

– как были получены формулы *n*-ого члена арифметической и геометрической прогрессии;

– практическое значение арифметической, геометрической прогрессий (в особенности бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

В результате изучения темы ученик должен научиться [32]:

– понимать и использовать язык последовательностей (термины, символические обозначения);

– применять формулы, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями;

– решать комбинированные задачи с применением формул *n*-го члена и суммы первых *n* членов арифметической и геометрической прогрессий;

– понимать арифметическую и геометрическую прогрессии как функции натурального аргумента.

Таким образом, особенностью изучения темы «Прогрессии» является то, что она может изучаться двумя способами: традиционно – раздельно арифметическая прогрессия и геометрическая прогрессия и параллельно – одновременное изучение разнотипных прогрессий.

2. Методика изучения темы «Прогрессии» в курсе математики основной школы

2.1 Разные подходы к введению понятия арифметическая прогрессия и геометрическая прогрессия

Существует несколько подходов к изучению прогрессий. По традиционной методике арифметическая и геометрическая прогрессия рассматриваются на уроках раздельно. В заключении же проводится отдельное обобщающее занятие, позволяющее систематизировать полученные знания. В подобной ситуации изучение темы прогрессий проходит поэтапно – от простого к сложному, от знакомства к анализу [8].

Альтернативой указанной методике является одновременное изучение двух разнотипных прогрессий. В таком случае материал подается с точки зрения сравнения – поиска аналогии и различий. Это вынуждает использовать в один момент слишком много учебной литературы, зато максимально включается в работу логическое мышление [8].

Если объединить два выше упомянутых метода, то можно добиться высокой эффективности усвоения материала учениками. В таком случае параллельно рассматриваются только ключевые понятия: что такое геометрическая и арифметическая прогрессия, как находится ее n-ый член. После этого ознакомление с этими двумя числовыми рядами проходит раздельно и последовательно. В результате школьники приобретают важные навыки: сопоставление понятий; нахождение схожести и различия; определение закономерностей; создание математических моделей и т.п. Усвоение учебного материала при указанном подходе максимальное. Плюс активно развивается логика, зрительная память, грамотная с точки зрения математики речь [31].

Согласно методике изучения математических понятий, важной является работа с признаками понятия, зафиксированными в его определении.

Выделению этих признаков способствует логико-математический анализ определения. Изучение темы «Прогрессии» складывается из следующих этапов [21]:

– этап формирования основных математических понятий, который, в свою очередь, последовательно решает следующие задачи по усвоению материала: введение, усвоение и закрепление определения;

– этап формирования и закрепления математических умений.

Задача по введению понятия «Прогрессия» может решаться двумя способами [12]:

– конкретно-индуктивный способ. Способ основывается на рассмотрении конкретных примеров или задач, подводящее учеников к исследуемому понятию и его дальнейшему определению;

– абстрактно-дедуктивный способ. При таком способе дается определение и его формулировка.

Рекомендуется применять первый способ, так как он мотивирует к выведению понятия, при этом пример должен носить общий, а не частный характер.

Задача усвоения определения прогрессии ставит две цели:

– во-первых, запомнить определение;

– во-вторых, научиться проверять, подходит ли объект под рассматриваемое понятие или нет.

В учебной деятельности эта задача реализуется в специальных упражнениях: утверждение или отрицание, которые формулируются, начиная со слов «Как вы считаете, является ли…». Аргументируя свой ответ, ученики не только заучивают определение, но и осваивают признаки понятия. Положительное утверждение отрабатывается на несущественных признаках прогрессии: частные случаи, изменение размера или расположения. При отрицании отвергаются один или несколько существенных признаков [14].

Подготовительная работа учителя (проведение логико-математического анализа и составление упражнений на подведение под определение) показана на примере таблицы 1.

Таблица 1 – Пример конкретно-индуктивного метода изучения понятия

Пример последовательности	Последовательность (да «+», нет «–»)	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (да «+», нет «–»)	Вывод данная цепочка числен является арифметической прогрессией (да «+», нет «–»)
0; –5, –10; –15	+	+	+
1; 3; 4; 7	+	–	–
Х–7	–	–	–
5; 5; 5	+	+	+
$\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$	+	+	+

Выводом к данной таблице служит, во-первых, само понятие последовательности и арифметической прогрессии, во-вторых, изучение ее свойств, то есть прогрессия может быть возрастающая, убывающая, постоянная, конечная, бесконечная, разность может быть положительным, отрицательным числом и нулем; члены прогрессии могут быть натуральными, целыми, дробными.

Таким образом, начинается изучение прогрессии с простейших примеров, демонстрирующим прогрессию, например, размерные ряды обуви или одежды, где ученикам предлагается определить закономерность возрастания ряда.На этапе усвоения подводятся итоги, повторяется определение понятия прогрессии и его существенные признаки. Отмечаются несущественные признаки: расположение, размеры, частные случаи.

Одним из направлений модернизации современного образования является переход к новым образовательным стандартам, предъявляющим существенно новые требования к подготовке учащихся в общеобразовательных учреждениях. В основе Стандарта лежит системно-деятельностный подход, который обеспечивает [19]:

– формирование готовности к саморазвитию и непрерывному образованию;

– проектирование и конструирование социальной среды развития обучающихся в системе образования;

– активную учебно-познавательную деятельность обучающихся;

– построение образовательного процесса с учетом индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей обучающихся.

В связи с этим как никогда актуальным становится использование в процессе обучения современных образовательных технологий, позволяющих создать такие условия для развития и воспитания личности, в которых каждый ученик мог бы выбирать для себя наиболее значимые предметы и наиболее приемлемый уровень усвоения знаний по каждому предмету [35].

Подходы к введению понятий арифметической (геометрической) прогрессии в различных учебниках отличаются.

В учебнике Виленкина Н.Я. и др. перед тем как ввести определение арифметической прогрессии рассматривают последовательность четных натуральных чисел 2, 4, 6, ..., замечая, что члены последовательности отличаются друг от друга на одно и то же число 2. Далее отмечают, что таким же свойством обладает и последовательность значений линейной функции $y = d(x - 1) + a_1$, $x = n$. Полагая $n = 1, 2, 3, \dots$, получают a_1, $d + a_1$, $2d + a_1$, $3d + a_1$, … [3]. Далее дается определение арифметической прогрессии: «Последовательность, в которой каждый следующий член получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа d, называется арифметической прогрессией». Такое же определение дает Мордкович А. Г. в своем учебнике.

В учебнике Макарычева Ю.Н. и др. определение арифметической прогрессии дается аналогичным образом: «Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом» [22]. Такое же определение дают авторы учебников [6, 26, 27] Никольский С. М. и др., Дорофеев Г. В. и др., Муравин Г. К. и др..

В учебнике Алимова Ш. А. и др. определение арифметической прогрессии дается так: «Числовая последовательность называется арифметической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство $a_{n+1} = a_n + d$, где d некоторое число [2]. Такое же определение дает Колягин Ю. М. в своем учебнике [16].

При введении понятия геометрической прогрессии в рассматриваемых учебниках наблюдается такая же закономерность:

1) Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число, называется геометрической прогрессией [3, 6, 22, 24, 26, 27].

2) Числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ называется геометрической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство $b_{n+1} = b_n q$, где $b_n \neq 0$, q – некоторое число, не равное нулю [2, 16].

Введение формул n-го члена прогрессии во всех учебниках не имеет каких-либо существенных отличий. В [2], [16] в силу построения определений арифметической и геометрической прогрессий рекуррентные формулы отдельно не рассматриваются. В остальных учебниках выделяется, что любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, выражается через предыдущий и разность по формуле $a_{n+1} = a_n + d$, а для геометрической прогрессии – $b_{n+1} = b_n q$.

Рассмотрим представление характеристического свойства в разных учебниках. Авторы учебников [3, 22, 24] дают формулировку в обе стороны, тогда как авторы учебников [2, 16, 26, 27] формулируют только в одну сторону, не упоминая, что верно и обратное утверждение. В учебнике Дорофеева Г. В. и др. не выделяют данные свойства в теоретическом материале, а рассматривают их как задачи-исследования.

Во всех учебниках кроме [26] авторы предоставляют следующие формулы для вычисления суммы n первых членов прогрессии:

1) для арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} n$;

2) для геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, q \neq 0$.

Муравин Г. К. предлагает учащимся зависимости суммы n первых членов прогрессии от номера n, первого и последнего членов прогрессии или от номера n, разности (знаменателя) и первого члена прогрессии [26]. То есть

1) для арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} n = \frac{a_1+(n-1)d}{2} n$;

2) для геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, q \neq 0$.

В учебникеМордковича А. Г. и др. вместо понятия суммы n первых членов употребляется понятие суммы конечной прогрессии [24].

В учебнике Алимова Ш.А. и др. объясняется название «арифметическая» («геометрическая») прогрессия (..., т.к. каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому (геометрическому)) [2].

Среди всех учебников особенно выделяется учебник Муравина Г. К. и др. В данном учебном издании темы «Арифметическая прогрессия» и «Геометрическая прогрессия» изучаются не по очереди, как это делается в остальных рассматриваемых нами учебниках, а параллельно [26].

Таким образом, можно сделать вывод о том, что изучение темы «Прогрессии» складывается из следующих этапов:

– этап формирования основных математических понятий, который, в свою очередь, последовательно решает следующие задачи по усвоению материала: введение, усвоение и закрепление определения;

– этап формирования и закрепления математических умений.

2.2 Методы, средства и формы обучения при изучении темы «Прогрессии»

В современном образовательном процессе, применяются такие методы и формы обучения, которые способствуют познавательному процессу у школьников, к ним относятся следующие методы обучения:

Информационно-развивающие методы, которые делятся на два класса [39]:

1. Передача информации в готовом виде (лекция, объяснение, демонстрация учебных кинофильмов и видеофильмов, слушание записей и др.);
2. Самостоятельное добывание знаний (самостоятельная работа с книгой, с обучающей программой, с информационными базами данных - использование информационных технологий).

Проблемно-поисковые методы: проблемное изложение учебного материала (эвристическая беседа), учебная дискуссия, лабораторная поисковая работа (предшествующая изучению материала), организация коллективной мыслительной деятельности в работе малыми группами, организационно-деятельностная игра, исследовательская работа [30].

Репродуктивные методы: пересказ учебного материала, выполнение упражнения по образцу, лабораторная работа по инструкции, упражнения на интернет-тренажерах [30].

Творчески-репродуктивные методы: вариативные упражнения, анализ математических ситуаций [30].

Составной частью методов обучения являются приемы учебной деятельности учителя и учащихся. Методические приемы – действия, способы работы, направленные на решение конкретной задачи. За приемами учебной работы скрыты приемы умственной деятельности (анализ и синтез, сравнение и обобщение, доказательство, абстрагирование, конкретизация, выявление существенного, формулирование выводов, понятий, приемы воображения и запоминания) [30].

Современные методы обучения, главным образом, ориентированы на обучение не готовым знаниям, а деятельности по самостоятельному приобретению новых знаний, т.е. познавательной деятельности [1].

Специальные методы – это адаптированные для обучения основные методы познания, применяемые в самой математике, характерные для математики методы изучения действительности (построение математических моделей, способы абстрагирования, используемые при построении таких моделей, аксиоматический метод) [1].

В образовательном процессе для преподавания математики в условиях все большей цифровизации обучающей среды могут использоваться различные типы образовательных интернет-ресурсов. Классификация видов образовательных ресурсов при преподавании математикипо теме «Прогрессии» [9]:

– наглядные ресурсы обучения, которые можно применять как на личных девайсах (система BYOD – BringYourOwnDevice («Принеси свое личное устройство»), так и на устройствах образовательного учреждения;

– практические ресурсы обучения.

Наглядные методы обучения математике реализуются через [34]:

– интерактивные интеллект-карты (mindmaps) (например, FreeMind: http://www.softslot.com/software-2047-freemind-windows.html);

– интерактивные компьютерные «истории» (например, сайт «Выбор будущего» в игровой форме подготавливает к сдаче тестов и экзаменов по математике: http://выборбудущего.рф);

– виртуальные музеи математики, ленты времени (timeline), (например, сервис для создания хроник: https://chronolines.ru/constructor/line/all/);

– иллюстрации учебного материала, выполненные с помощью инструментов дополненной реальности (например, «Увлекательная реальность» - образовательный комплекс для проведения интерактивных 3D-уроков по математике: http:// funreality. ru/ru/products/physics, html);

– приложения в игровой форме для мобильных устройств (например, приложение для изучения математики «Математика. Супертренинг»: https:// play, google.com) и т. д,

Практические методы обучения (упражнения, лабораторные и практические работы, расчетные задачи) модифицируются в [9]:

– компьютерные практикумы (например, виртуальные практикумы «Математик»: http://physicon.ru/products/courses/catalog/342/; сайт «Виртуальная образовательная лаборатория» http://www.virtulab.net);

– интерактивные тесты (например, сервис Proprofs: https://www.proprofs.com; сервис StudyStack: http://www.studystack.com);

– компьютерные тренажеры, например,тренажёр для подготовки к экзаменам в девятом классе посвящён теме «Последовательности и прогрессии». Задания разбиты на шесть блоков: последовательности; *n*-й член арифметической прогрессии; сумма членов арифметической прогрессии; *n*-й член геометрической прогрессии; сумма членов геометрической прогрессии; текстовые задачи на прогрессию. – режим доступа – https://www.prodlenka.org;

– компьютерные интерактивные обучающие игры (например, генератор QR-викторин: http://www. classtools. net/ QR/create. php);

– виртуальные экскурсии (например, по парку Архимеда);

– вебинары (например, сайт «Виртуальный лицей»: http://edu.altspu.ru/course/index. php?categoryid=2).

Подобные интернет ресурсы позволяет обучающимся оперативно работать с информацией и представлять результаты работы. Данная модель предполагает решение задач внедрения новых ИКТ в учебный процесс; создания и использования перспективных электронных обучающих средств и систем [9].

Все чаще компьютерные и другие цифровые устройства своим сотрудникам и обучающимся предоставляет образовательная организация. Сотрудник или обучающийся при этом может выбрать из предложенного ассортимента то устройство, которое лучше всего соответствует его рабочим/образовательным задачам и личным предпочтениям.

В любом случае, применение данных устройств требуют создания гибкой информационно-образовательной среды, способствующей преодолению цифрового разрыва и приобщить к современным информационно-коммуникационным технологиям как преподавателя, так и обучающегося [9].

Современной тенденцией в школьном образовании становится смешанное обучение (blendedlearning), в рамках которого наиболее распространенной становится модель перевернутого обучения (flippedlearning).

Данная модель основана на электронном обучении с чередованием очных и дистанционных форм.

Освоение учащимися основного теоретического материала осуществляется самостоятельно дома посредством ознакомления с видео лекциями, размещенными на электронных образовательных ресурсах (например, Яндекс для подготовки к ЕГЭ: https://ege.yandex.ru, «Инфоурок»: https://infourok.ru/videouroki). Осуществление этой модели предполагает наличие у школьников компьютера или мобильных устройств с выходом в Интернет [9].

Обучение в классе ориентировано на обсуждение изученного дома теоретического материала и отработку его в практической деятельности.

В основе модели перевернутого обучения лежат активные методы обучения, проектная и исследовательская совместная деятельность обучающихся. Существуют онлайн-сервисы (padlet.com, RealtimeBoard, Pinterest, ThingLink, Glogster), которые позволяют обучающимся совместно работать в группе при обсуждении проблемных вопросов. Учитель при этом выступает в роли наставника, консультанта.

Инструментом, который помогает педагогам создавать авторские образовательные продукты для электронного обучения, может служить ПО iSpring (http://www.ispring.ru). Разработанные в нем интерактивные образовательные продукты можно использовать как на компьютере, так и на любых мобильных устройствах, а также публиковать для СДО или на YouTube.

Российский учитель математики, который не имеет возможности приобретать достаточно дорогое программное обеспечение и раздаточные мобильные устройства, чаще всего работает в рамках модели «Бриколаж» – он, будучи творцом, использует в образовательном процессе все подручные средства, кроме специально созданных инструментов. В основе данной модели лежат два принципа – создавать новое из имеющегося старого и делиться своими продуктами с коллегами в сообществах. Помощь педагогам в этом случае сможет оказать профессиональная сеть методического обмена «Методический кабинет Росметодкабинет. РФ» (http://росметодкабинет. рф) [30].

Методы на практике реализуется в различных формах. Форма представляет собой конкретную практическую совокупность действий учителя и учащихся и условий их осуществления. Пример: фронтальные, групповые, индивидуальные методы и формы. Метод детерминирует и подчиняет себе форму. Реализация метода требует определенных форм; каждому из сложившихся методов адекватны определенные формы. Но форма обладает по отношению к методу определенной автономностью и устойчивостью. Например: урок – устойчивая форма, осуществляющаяся при применении самых различных методов. Все эти формы в равной степени можно применить к теме «Прогрессии» [30].

Современные средства обучения и воспитания кладутся в основу классификации технологий по их типам: вербальные (аудио), наглядные (в том числе видео обучение), аудиовизуальные, программированные, электронно-обучающие, компьютерные, телекоммуникационные, дистанционные, спутниковые и разнообразные действенно-практические. Все эти средства являются внешними по отношению к обучаемому [17].

Таким образом, нами были выявлены формы методы и средства обучения теме «Прогрессии» в курсе алгебры основной школы.

2.3 Дидактические материалы к изучению темы «Прогрессии»

При наблюдении за учащимися, в первую очередь внимание падает на разный уровень усвоения информации, что, безусловно, естественно ведь все учащиеся разные, а необходимость овладения базовыми умениями и навыками важна для всех. Для получения прочных умений и навыков некоторым учащимся достаточно плодотворной работы на начальном этапе и небольшого количества упражнений на применение изученного материала. Однако, довольно много учащихся могут достигнуть этого же результата только в том случае, если после изучения нового материала следует этап специального запоминания правила, этап большого количества повторений и упражнений. Поэтому учет индивидуального темпа продвижения обучающихся становится, безусловно, важным условием для достижения обязательных результатов. Ниже, в рамках исследуемой темы нами были разработаны конспекты уроков по теме «Прогрессии» в 9-м классе, а так же индивидуальные карточки для учащихся с разным уровнем сложности [11].

Конспект урока по теме «Определение арифметической прогрессии. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии».

Цель: рассмотреть частный вид последовательности - арифметическую прогрессию.

Задачи:

Образовательные:

– ввести понятия арифметической прогрессии; формулы *n*-го члена; характеристическое свойство, которым обладают члены арифметических прогрессий.

– осуществить первичную отработку применения формулы *n*-го члена арифметической прогрессии на примерах.

Воспитательные:

– воспитывать познавательную активность, самостоятельность, стремление расширять свой кругозор;

– воспитание интереса к предмету, способствовать сплочению коллектива учащихся.

Развивающие:

– способствовать развитию наблюдательности, умения анализировать, применять приемы сравнения, переноса знаний в новую ситуацию;

– способствовать развитию логического мышления, творческих способностей учащихся путем решения межпредметной задачи.

Тип урока: урок ознакомление с новым материалом.

Оборудование: компьютер, проектор, средства MS PowerPoint 2007, карточки с разноуровневыми заданиями.

Ход урока

1. Организационный момент

Учитель: Ребята, предыдущие уроки алгебры были посвящены теме «Последовательность». Из всех числовых последовательностей особо выделяют две. Их назвали прогрессиями. В силу своих особенностей, или закономерностей, одну прогрессию назвали арифметической, другую – геометрической. Слово «прогрессия» (с латинского) буквально означает «движение вперёд» (как и слово «прогресс»). Задачи на обе прогрессии встречаются у вавилонян, в египетских папирусах, в древнекитайском трактате «Математика в 9 книгах». Архимед знал, что такое геометрическая прогрессия и умел вычислять сумму любого числа его членов. В «Книге Абака» Леонардо Пизанского (Фибоначчи» (1202 г.)) дано правило нахождения суммы членов арифметической прогрессии. В папирусе Райнса предлагается задача: «У семи лиц по семь кошек, каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь съедает по семь колосков ячменя, из колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?» Сегодня на уроке мы познакомимся с понятием арифметической прогрессии и разности арифметической прогрессии; рассмотрим нахождение разности и несколько первых членов прогрессии.

2. Актуализация знаний

Учитель: Сейчас я предлагаю вам ответить на вопросы и выполнить устное задание:

1. Что называется числовой последовательностью?

2. Какие способы задания последовательностей вы знаете?

Устное задание: Определить закономерность числовых последовательностей:

1) 6, 8, 10,…

2) –12, –9, –6,…

3) 2, 6, 18,…

4) 25, 21, 17,…

Учащиеся: Отвечают на вопросы и выполняют устное задание.

Учитель: Теперь мы можем перейти к теме нашего урока.

3. Изучение нового материала

Данный этап урока учитель проводит в виде учебно-познавательной работы по самостоятельному приобретению знаний.

Учитель: Сейчас я раздам вам карточки, на которых записана задача и вопросы, на которые вам необходимо ответить.

Задача. Вертикальные стержни фермы имеют такую длину: наименьший $a = 5$ дм, а каждый следующий на 2 дм длиннее. Записать длину семи стержней.

Вопросы к задаче:

– Запишите последовательность в соответствии с условием задачи;

– Запишите эту же последовательность с помощью таблицы;

– Найдите разность между предыдущим и последующим членами последовательности;

– Попробуйте дать определение арифметической прогрессии;

– Найдите среднее арифметическое чисел 2 и 8. Записать найденное число с данными в порядке возрастания. Образуют ли эти числа арифметическую прогрессию?

Учащиеся: выполняют работу на доске и в тетрадях, отвечая на поставленные вопросы.

Учитель: Сейчас давайте с вами подведем итог работы, на что стоит обратить внимание? Давайте составим опорный конспект-таблицу.

Таблица 2 – Пример опорного конспекта-таблицы

	АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
Определение	Числовая последовательность, первый член которой равен a_1, а каждый следующий, начинаясо второго, равен предыдущему, сложенному с некоторым постоянным числом d.
Рекуррентная формула	$a_{n+1} = a_n + d$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$
Свойства	$d = a_{n+1} - a_n$ $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2$, где $n = 2; 3; 4;\dots$

4. Закрепление изученного материала

Учитель разбивает класс на две группы: 1 группа работает самостоятельно по карточкам (вызывает к доске учащегося из группы), 2 группа – с учителем (у каждого на парте карточка с заданием).

Задание 1 группы.

1. Найти разность арифметической прогрессии, если :$a_1 = -2$, $a_6 = 4$.
2. Дана арифметическая прогрессия 3, 6, 9,…

а) Вычислить двадцатый член этой прогрессии;

б) Найти номер члена последовательности, равного 129.

Задание 2 группы.

1. Для арифметической прогрессии вычислить: a_{10}, если $b_1 = -3$ и $d = 2$.
2. Записать формулу n члена арифметической прогрессии: –5, –7, –9,…
3. Найти номер подчеркнутого члена арифметической прогрессии: 4, 16, 28, …, <u>748</u>,…

Затем учащиеся 2 группы выполняют самостоятельно с последующей проверкой

1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана последовательностью: –50; –38,8; … Найдите d, a_3, a_4, a_{21}.

2. Найдите a_{23} и n-й члены арифметической прогрессии 11;7; …

3. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n): $a_5 = 8{,}2$ и $a_{10} = 4{,}7$. Найдите a_1 и d.

Учащиеся 1 группы проверяют задания с доской. Затем выполняют задание, предложенное учителем на доске и в тетради:

Задание 1 группы.

1. Между числами 8 и 26 вставьте пять чисел, которые вместе с данными числами составляют арифметическую прогрессию.

2. В арифметической прогрессии $a_5 = 4a_1$. Докажите, что $a_8 : a_3 = 2{,}5$

5. Рефлексия

Учитель: Сегодня на уроке мы познакомились с новой последовательностью – арифметической прогрессией, применяли к решению задач формулу n-го члена арифметической прогрессии. Пришло время подвести итоги урока. Вы хорошо поработали, оцените себя, по этим критериям:

Оценка «5» тема мной усвоена, работа выполнена без ошибок,

Оценка «4» тема мной усвоена, в работе были допущены 1-2 ошибки.

Оценка «3» тема усвоена частично, в работе было допущено 3 и более ошибок.

6. Домашнее задание

Учебник Ю.Н.Макарычев, п.16 стр.83, стр.229 (историческая справка),

1 группа № 357; 359(а); №360

2 группа № 343-346 (а)

Конспект урока по теме «Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии».

Цель: рассмотреть частный вид последовательности - геометрическую прогрессию.

Задачи:

Образовательные:

– ввести понятия геометрической прогрессии; формулы *n*-го члена; характеристическое свойство, которым обладают члены геометрических прогрессий;

– ознакомить с понятиями возрастающей, убывающей и конечной геометрической прогрессии;

– побуждать учащихся к преодолению трудностей, к самоконтролю, взаимоконтролю в процессе умственной деятельности.

Воспитательные:

– воспитывать познавательную активность, самостоятельность, стремление расширять свой кругозор;

– воспитание интереса к предмету, способствовать сплочению коллектива учащихся.

Развивающие:

– развивать интеллектуальные умения: сравнивать, делать выводы, выявлять закономерности, анализировать;

– способствовать развитию логического мышления, творческих способностей учащихся путем решения межпредметной задачи.

Тип урока: урок ознакомление с новым материалом.

Оборудование: компьютер, проектор, средства MS PowerPoint 2007, карточки с разноуровневыми заданиями.

Ход урока

1. Организационный момент

Учитель: Здравствуйте. Я рада видеть вас. Давайте договоримся: думать, трудиться в полную силу и не бояться допустить ошибку!

Закончился двадцатый век.

Куда стремится человек?

Изучен космос и моря,

Строенье звёзд и вся земля.

Но математиков зовёт

Известный лозунг:

«Прогрессия– движение вперёд».

Вы уже знаете, что термин «прогрессия» имеет латинское происхождение (*progression*) и действительно означает «движение вперед». Движение вперед! Пусть это будет девизом нашего урока.

2. Актуализация знаний

Учитель: Прежде чем мы с вами перейдем к теме нашего урока, давайте вспомним, что же мы проходили ранее. Итак, сейчас я буду называть утверждение, а вы скажете, верно ли оно:

1. Последовательность, каждый член которой больше предыдущего называется арифметической прогрессией (нет).
2. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется арифметической прогрессией (да).
3. d - разность арифметической прогрессии (да).
4. $d = a_3 – a_1$ (нет).
5. $a_n = a_1 + d(n – 1)$ – формула n-ого члена арифметической прогрессии (да).
6. $a_7 = a_1 + 6d$ (да).
7. Последовательность, заданная формулой $a_n = 3_{n–1}$ является арифметической прогрессией (нет).
8. $2^3 = 6$ (нет).
9. $2^4 = 16$ (да).
10. $3^3 = 27$ (да).
11. $3^{–3} = –27$ (нет).

Учащиеся: Отвечают на вопросы.

Учитель: Какие вы молодцы! На ваших столах вы наверняка уже заметили карточки. Выпишите в тетрадь номера последовательностей, которые являются арифметическими прогрессиями, работаем в парах:

1) 2; 5; 8; 11; …

2) 1; 2; 4; 8;…

3) 65; 60; 55; 50…

4) 5; 1; –3; –7…

5) 32, 16, 8, 4,…

6) 10; 15; 20; 25…

7) 6; 10;14;18…

8) 3, 9, 27, 81 …

Учащиеся: Отвечают

Учитель: Давайте с вами проверим, правильные последовательности указаны под номерами 1, 3, 4, 6, 7. Поднимите руку те, кто верно выписал все номера.

Учащиеся: Сверяют ответы.

Учитель: Какие вы умнички! А кто может объяснить свой выбор? Выявите закономерность, которой подчиняются числа в оставшихся последовательностях. Что вы заметили? Используя замеченные вами особенности, придумайте и запишите в тетради еще несколько последовательностей, составленных по тому же принципу. (Учитель предлагает ученикам озвучить свои записи. Учитель записывает за ребятами на доске 2-3 последовательности, например 1, 5, 25, 125). Такие последовательности называются геометрическими прогрессиями. Запишите тему урока.

Учащиеся: Работают с учителем.

3. Изучение нового материала

Учитель: Предлагаю начать нашу работу с легенды о шахматах. Шахматная игра была придумана в Индии, и когда индусский царь Шерам познакомился с нею, он был восхищен ее остроумием и разнообразием возможных в ней комбинаций. Узнав, что она изобретена одним из его подданных, царь приказал его позвать, чтобы лично наградить за удачную выдумку. Изобретатель, его звали Сета, явился к трону повелителя.

– Я желаю достойно вознаградить тебя.

Мудрец молчал.

– Я достаточно богат, чтобы исполнить твоё самое смелое пожелание. Назови награду, которая тебя удовлетворит.

– Повелитель, – сказал Сета, – прикажи выдать мне за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зернышко, за вторую – 2, за третью – 4, за четвёртую – 8, за пятую – 16 и так далее до 64 клетки.

– Довольно, – с раздражением прервал его царь. – Ты получишь свои зёрна за все 64 клетки доски. Но знай, что просьба твоя недостойна моей щедрости.

Сета улыбнулся и покинул залу.

Каково было удивление царя, когда он узнал, что не сможет выдать подобной награды. Как вы думаете, почему?

Учащиеся: Высказывают свои предположения.

Учитель: На следующий день придворные математики сообщили своему повелителю, что для выполнения его приказа не хватит пшеницы, хранящейся не только в амбарах всего царства, но и во всех амбарах мира. Необходимо 18.446.744.073.709.551.615 зерен. Число звучит так: 18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 миллиарда 709 миллионов 551 тысяча 615. Много это или мало? Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Итак, чем интересна эта легенда для нас сейчас на уроке алгебры?

Учащиеся: Отвечают.

Учитель: При распределении зерен пшеницы по шахматной доске мы видим последовательность натуральных степеней числа 2, т.е геометрическую прогрессию 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... в которой каждое последующее число больше предыдущего в 2 раза.

Попробуйте самостоятельно дать определение геометрической прогрессии.

Учащиеся: Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, называется геометрической прогрессией.

Учитель: Прочитайте определение по учебнику и определите, насколько верно мы рассуждали. Почему члены последовательности должны быть отличны от нуля? Сравните с определением арифметической прогрессии. В чем отличие?

Учащиеся: Отвечают.

Учитель: Сравните рекуррентные формулы прогрессий. В чем отличие?

Учащиеся: Отвечают.

Учитель: Чтобы задать геометрическую прогрессию, что достаточно указать?

Учащиеся: Достаточно указать её первый член и знаменатель.

Учитель: Молодцы! Теперь давайте перейдем к практике. Решаем в тетрадях.

Дано: $b_1 = 3$, $q = 4$. Найдите, пользуясь определением: b_2, b_3, b_4.

Учащиеся: $b_2 = b_1 \cdot q = 3 \cdot 4 = 12$,

$b_3 = b_2 \cdot q = 12 \cdot 4 = 48$,

$b_4 = b_3 \cdot q = 48 \cdot 4 = 192$.

Учитель: Итак, легко ли найти, например 100 член геометрической прогрессии, пользуясь определением?

Учащиеся: Нет.

Учитель: Очевидно, что для этого нам нужна будет формула. Найдите в учебнике вывод формулы n-го члена геометрической прогрессии.

$b_2 = b_1 \cdot q$,

$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2$,

$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3$

Предлагаю вам самостоятельно написать b_5, b_6, b_7. Какую закономерность вы заметили?

Учащиеся: В каждой формуле присутствуют b_1, q.

Учитель: Молодцы! Показатель степени q на 1 меньше порядкового номера члена прогрессии. Получим $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Поработаем с данной формулой. Выразите b_8, b_{17} через b_1 и q.

Учащиеся: $b_8 = b_1 \cdot q^7$ и $b_{17} = b_1 \cdot q^{16}$.

Учитель: Ранее видели, что название арифметической прогрессии связано с особым свойством членов этой прогрессии. Название геометрической прогрессии также связано со свойством её членов. Итак, квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух соседних членов. Для любых трех последовательных членов геометрической прогрессии выполняется равенство: $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. А число, которое получилось в правой части равенства называется средним геометрическим двух чисел. Итак, запишем формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, q \neq 1$.

4. Закреплениеизученного материала

Учитель: Давайте сейчас выполним несколько устных заданий.

1.Является ли последовательность геометрической прогрессией? Если да, то найти b_1 и знаменатель q.

1) 1; 3; 9; 27; . . .

2) –1; 2; 4; . . .

3) –2; –6; –18; 54;…

4) 5; –5; 5; –5; . . .

5) $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; 9; $9\sqrt{3}$; …

2.Найдите первые 5 членов геометрической прогрессии, если первый член равен –2, а знаменатель –0,5.

3. Имеется радиоактивное вещество массой 256 грамм, вес которого за сутки уменьшается вдвое. Какова станет масса вещества на вторые сутки? На третьи сутки? На 8-ые сутки?

4.Найти седьмой член геометрической прогрессии, если $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$.

Учащиеся: Выполняют задания.

Учитель: Молодцы, справились с заданием. Теперь мы с вами поработаем в группах. Объединитесь в группы по 4 человека. Перед вами карточки, выполните задания.

1.Найти первые пять членов геометрической прогрессии, если:

а) $b_1 = 6$; $q = 2$

б) $b_1 = 0{,}4$; $q = \sqrt{2}$

2. Последовательность (C_n) – геометрическая прогрессия, первый член которой c_1, а знаменатель q. Выразите через c_1 и q c_6; c_{20}; c_{125}.

3.Последовательность (x_n) –геометрическая прогрессия. Найдите x_7, если $x_1 = 16$ и $q = \frac{1}{2}$.

Учащиеся: Работают в группах.

5. Рефлексия

Учитель: А сейчас, в завершении урока достойный итог изучения нового материала – синквейн. Найдите в учебном материале самое важное, сделайте выводы и выразите всё это в краткой форме, дается 3 минуты.

6. Домашнее задание: Учебник Ю.Н. Макарычев № 625, 623, подготовить сообщение на тему: «Прогрессии вокруг нас».

Для учителя всегда встает вопрос о том, как же разнообразить свои уроки, как сделать так, чтобы всем учащимся было интересно, как всех вовлечь в учебную деятельность. Игровые технологии представляют собой систему применения различных дидактических игр в обучении, формируют умение решать задачи на основе выбора альтернативных вариантов, обеспечивают достижение единства эмоционального и рационального в обучении. Целеустремленность, организованность, положительное отношение к учебе вырабатывается у учащихся в ходе игры. Занимательные задачи полезны для развития гибкости ума, выработке навыков мышления, повышения интереса к предмету [18, 36].

В связи с этим нами была разработана игра по теме «Прогрессии», с целью обобщить и систематизировать знания, умения и навыки, полученные при изучении данной темы.

<u>Своя игра «Прогрессии».</u>

Цель: Обобщение и систематизация знаний, умений и навыков, полученных при изучении темы «Прогрессии».

Ход урока

1. Организационный момент

Учитель: Здравствуйте ребята. Сегодня мы с вами собрались на необычный урок. Он будет проходить в форме игры. Сегодня мы с вами будем проверять, насколько хорошо вы усвоили тему «Прогрессии».

Вы уже разделены на 3 группы. Каждой группе необходимо выбрать капитана, который в дальнейшем будет озвучивать ответ команды и комментарий к нему или указывать на члена команды, который это сделает. Игра состоит из трех раундов.

Сначала разыгрывается порядок выбора заданий группами. Затем команды в порядке очередности выбирают тему и уровень сложности, обсуждают вопрос или решают задачу. Время отводится от 1 до 3 минут, в зависимости от сложности задания. Все команды готовят ответ на выбранный вопрос, т.к. если команда дает неверный ответ, то другие команды получают возможность заработать дополнительные баллы. Побеждает команда, набравшая большее количество баллов. Сейчас мы с вами определим порядок выбора заданий группами. Итак, первый вопрос:

В 12-этажном доме есть лифт. На первом этаже живет всего 2 человека, от этажа к этажу количество жильцов увеличивается вдвое. Какая кнопка в лифте этого дома нажимается чаще других?

Второй вопрос: Соперник нолика?

Учитель: Вот мы и определили порядок выбора заданий. Теперь переходим к игре! Итак, раунд 1. Команда №1 выбирайте категорию.

Рисунок – 1. Раунд 1

Вопросы:

Найди лишнее:

10. 1) Первый член 2) Среднее арифметическое

3) Знаменатель 4) Арифметическая прогрессия

20. 1) Разность 2) Сумма n первых членов

3) Знаменатель 4) $b_n = b_{n-1} \cdot q$

30. 1) $a_n = 3n+1$ 2) $a_n = n + 4$

3) $a_n = n^2 - 5$ 4) $a_n = -0{,}5n+1$

Основные понятия:

10. Название формулы: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$.

20. Название формулы: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

30. Название формулы: $s_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Шуточные задачи:

10. Двое шли – 3 конфеты нашли. Следом четверо пойдут – сколько найдут?

20. На грядке сидит 6 воробьев. К ним прилетели еще 5. Кот схватил одного воробушка. Сколько воробьев осталось на грядке?

30. Шла старушка в Москву и навстречу ей 3 старика. Сколько человек шло в Москву?

Учитель: Чтож, первый раунд позади, переходим ко второму!

Рисунок – 2. Раунд 2

Вопросы:

Анаграммы:

10. оансртьз

20. ярсгосриеп

30. зеальментна

Угадай понятие:

10. Формула, выражающая любой член последовательности, начиная со второго, через предыдущие.

20. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго равен сумме предыдущего и одного и того же числа.

30. Правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие.

Пословицы:

10. ... одного не ждут

20. Обещанного … года ждут

30. …раз отмерь,… раз отрежь.

Учитель: Позади остался и второй раунд, переходим к третьему, заключительному раунду!

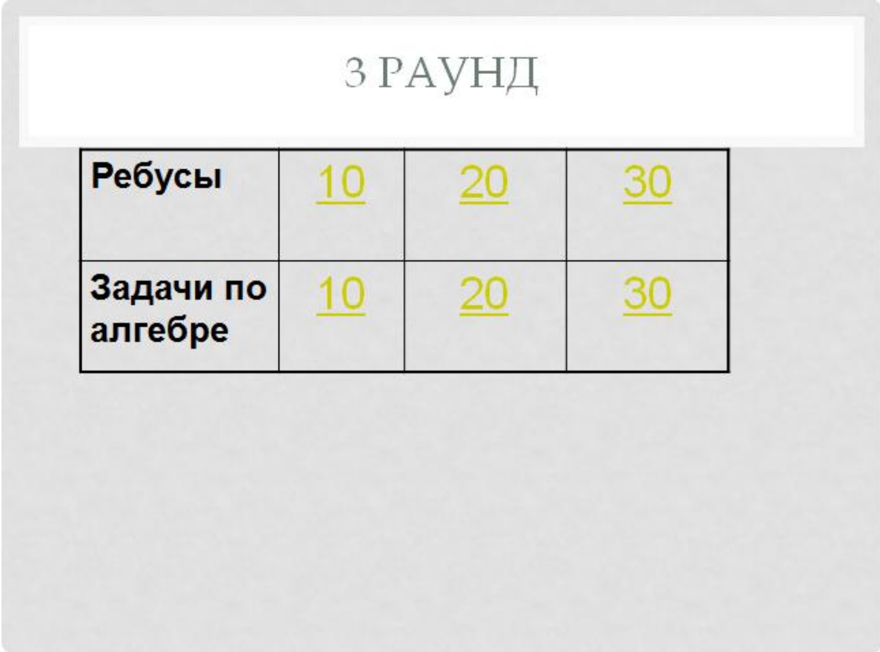

Рисунок – 3. Раунд 3

Вопросы:

Ребусы:

10.

Рисунок – 4. Ребус 1

20.

Рисунок – 5. Ребус 2

30.

Рисунок – 6. Ребус 3

Задачи по алгебре:

10. Назовите первые пять членов арифметической прогрессии: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n + 5$

20. Найдите члены геометрической прогрессии, обозначенные буквами: b_1, b_2, 32, 24, b_5, b_6.

30. Докажите, что последовательность является арифметической прогрессией: $a_n = 5 + 2n$

Учитель: Вот и подошла к концу наша увлекательная игра, пора подвести итоги, сейчас мы узнаем, какая же команда лучше остальных усвоила тему «Прогрессии». (Подводятся итоги). Спасибо за участие. До новых встреч!

В условиях реализации образовательных стандартов нового поколения качество образовательной подготовки выпускников российских школ стало контролироваться в формате ОГЭ и ЕГЭ [38]. Они предполагают проверку знаний, умений, ценностных отношений и накопленного опыта творческой деятельности учащихся на уровне высокой степени обобщения. Такие экзамены более обоснованно позволяют судить о глубине усвоения материала за период обучения в основной и старшей школе.

Одной из важных ступеней образования является успешная сдача ОГЭ по математике учащимися девятых классов. Задачи по теме «Прогрессии» также как и многие важные темы из курса алгебры основной школы, входит в блок заданий ОГЭ модуля «Алгебра».

На основе анализа открытого банка заданий http://www.fipi.ru [28] нами составлен набор заданий по теме «Прогрессии», в котором задачи распределены по типам (см. приложение А).

Следующей важной ступенью образования является успешная сдача ЕГЭ по математике учащимися одиннадцатых классов. С 2015 года ЕГЭ по математике разделили на две части: базовую и профильную. Базовая часть сдаётся абсолютно всеми учащимися, профильная часть – предназначена только для тех, кто планирует поступать в ВУЗ [13, 40].

Анализ материалов ЕГЭ за период с 2015 по 2019 показал, задачи на тему «Прогрессии» встречаются среди заданий повышенной сложности. Как правило, это 11 и 19 задачи (см. Приложение А). Стоит отметить, что среди заданий базового уровня таких задач не встречается.

Таким образом, нами были разработаны конспекты уроков по темам «Прогрессии», разноуровневые задания, в которых постепенно повышается уровень сложности, для учащихся с учетом индивидуального подхода, нами была разработана игра для закрепления знаний, умений и навыков у учащихся по данной теме. А так же нами были проведены анализы КИМ ОГЭ и ЕГЭ по теме «Прогрессии». В результате анализа выявлено, что задачи по теме «Прогрессии» включены в основной государственный экзамен: в первой части модуля «Алгебра» они встречаются в задании №11. Для того чтобы учащийся усвоил определенные действия, – необходимо их выполнять в определенной системе. На основе анализа открытого банка заданий http://www.fipi.ru [28] был составлен набор заданий по теме «Прогрессии», в котором задачи распределены по типам. Решив составленную систему задач, ученик будет готов к выполнению задания №11 при сдаче ОГЭ.

Анализ материалов ЕГЭ показал, что задания по теме «Прогрессии» повышенного уровня сложности. Что свидетельствует о необходимости в старшей сколе дополнительного курса для подготовки к ЕГЭ по данной теме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Повышение качества образования и воспитания, прочное овладение основами наук, обеспечение более высокого научного уровня преподавания каждого предмета – именно такую задачу ставят современное общество и государство перед школой. Так как, традиционная форма обучения не учитывает индивидуальных способностей каждого учащегося, учителям необходимо прибегать к использованию и других форм обучения.

Анализ школьных учебников показал, что выделяются два учебника, для изучения ученикам средней школы темы «Прогрессия» под редакцией Мордковича А.Г. и Виленкина Н.Я., в них наиболее подробно рассматривается тема «Прогрессии».

Особенностями изучения темы «Прогрессия» является то, что она может изучаться двумя способами:

– традиционно – раздельно арифметическая прогрессия и геометрическая прогрессия. В заключение проводится отдельное обобщающее занятие, позволяющее систематизировать полученные знания;

– параллельно – одновременное изучение разнотипных прогрессий.

Современные методы обучения, главным образом, ориентированы на обучение не готовым знаниям, а деятельности по самостоятельному приобретению новых знаний, т.е. познавательной деятельности.

Среди современных форм обучения выделяются различные цифровые методы обучения, которые позволяют изучать материал, не только самостоятельно, но и совместно с преподавателем с применением дополнительных средств обучения (персональный компьютер, проектор, видео-презентация, мобильные приложения).

На основе прогрессии объясняется последовательность, формируется умение аргументирования, углубляется логическое мышление. Как правило, на уроках, вычисление обычных прогрессий у школьников не вызывает практических затруднений, а при правильной подаче материала способно увлечь и развить логический аппарат ученика. Замечено, что проблемы возникают при сравнении двух числовых рядов между собой и понимание их свойств. Поэтому для более высокой эффективности в усвоении материала, можно добиться объединением двух вышеперечисленных методов.

В соответствии с вышесказанным нами были разработаны дидактические материалы по теме «Прогрессии». Конспекты уроков, в которых разработаны задания для групп учащихся с разным уровнем сложности, а так же образовательная игра «Прогрессии». Проведен анализ КИМ ОГЭ и ЕГЭ по теме «Прогрессии», а так же составлен набор заданий по теме «Прогрессии», в котором задачи распределены по типам. Решив составленную систему задач, ученик будет готов к выполнению задания №11 при сдаче ОГЭ.

Анализ материалов ЕГЭ показал, что задания по теме «Прогрессии» повышенного уровня сложности. Что свидетельствует о необходимости в старшей сколе дополнительного курса для подготовки к ЕГЭ по данной теме.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты [Текст]: материалы VI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции - Красноярск : КГПУ им. В. П. Астафьева. – 2018. – 202 с.

2. Алгебра. Учебник для 9 класса средней школы / под ред. Ш.А. Алимова. – Москва : Просвещение, 2016 г.

3. Алгебра: учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики / под ред. Н.Я. Виленкина. – Москва : Просвящение, 2016 – 260 с.

4. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7-9 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций. – 2-е изд., доп. / Т.А. Буримистова. – Москва : Просвещение, 2014. – 96 с.

5. Глейзер, Г.И. История математики в школе VII - VIII кл. Пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – Москва : Просвещение, 1982. – 240 с.

6. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. – 3-е изд. / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова. – Москва : Просвещение, 2016 г. – 336 с.

7. Дружинин, В.В. Суммы обобщенных арифметических прогрессий / В.В. Дружинин, А.А. Лазарев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. – №2 . – С. 9-11.

8. Епифанова, Н.М. Методика обучения алгебре основной школы [Текст]: учебно-методическое пособие / Н.М. Епифанова, О.П. Шарова. – Ярославль : изд-во ЯГПУ имени К.Д. Ушинского, 2006. – 83 с.

9. Интерактивные средства обучения [Текст] : [учебное пособие для студентов высших учебных заведений / З. У. Колокольникова, Т. В. Захарова, Т. В. Казакова и др.]. – Красноярск, Лесосибирск : СФУ, 2018. – 91 с.

10. Калашникова Л. Урок «Совет мудрецов» по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» / Л. Калашникова // Математика. Еженедельное

учебно-методическое приложение к газете Первое сентября. – 2001. – № 5. – С. 30–32.

11. Канель-Белов, А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи ; под ред. В. О. Бугаенко. 4-е изд., стереотип. Москва : МЦНМО, 2008. – 96 с.

12. Капкаева, Л. С. Теория и методика обучения математике: частная методика [Текст] / Л.С. Капкаева. – Москва : Юрайт, 2017. – 263 с.

13. Колесникова, Т. Задания повышенной трудности в экзамене по алгебре в новой форме [Электронный ресурс] – Режим доступа http://mat.1september.ru/download/e-mat24.pdf

14. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва. – Москва : Просвещение, 2014 г. – 304 с.

15. Колягин, Ю.М. Изучение алгебры в 7 - 9 кл. Кн. для учителя / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров – Москва : Просвещение, 2002. – 287 с.

16. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учебное пособие для студентов физ.-мат. Фак. пед. ин-тов / Ю.М. Колягин. – Москва : Просвещение, 1977. – 480 с.

17. Коротаева, Е.В. Обучающие технологии в познавательной деятельности школьников / Е.В. Коротаева // Библиотека журнала Директор школы. – 2003. – № 2. – С. 114–153.

18. Корчажкина, О. М. Решение задач как вид мыслительной деятельности: общие методы [Текст] / О. М. Корчажкина // Математика в школе. – 2018. – № 4. – С. 46–57

19. Ксентова, Г.Ю. Перспективные школьные технологии: Учебно-методическое пособие / Г.Ю. Ксентова – Москва : Педагогическое общество России, 2001. – 224 с.

20. Кузнецова, Л.В. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс / Л.В. Кузнецова,

Е.А. Бунимович, Б.П. Пигарев, С.Б. Суворова. – 14-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа, 2008. – 191 с.

21. Кузнецова, Т. И. Всероссийский научно-методический семинар «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» в 2017/2018 учебном году [Текст] / Т. И. Кузнецова // Математика в школе. – 2018. – № 6. – С. 69–71

22. Макарычев, Ю. Н. 9 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – Москва : Просвещение, 2014. – 320 с.

23. Методика обучения математике. Формирование приемов математического мышления [Текст] : учебное пособие для СПО / [Н. Ф. Талызина, Г. А. Буткин, И. А. Володарская и др.] ; под ред. Н. Ф. Талызиной. – Москва : Юрайт, 2018. – 192 с.

24. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2010. – 192 с.

25. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 9 класс: учебник / А.Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2016. – 296 с.

26. Муравин, К.С. Алгебра. 9 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений / К.С. Муравин. – Москва : Дрофа, 2016. – 240 с.

27. Никольский, С.М. Алгебра. 9 класс: учеб.для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов – Москва : Просвещение, 2014 г. – 335с.

28. Открытый банк заданий «Федеральный институт педагогических измерений» [Электронный ресурс] – Режим доступа http://fipi.ru/

29. Павлова, Е. В. Структуризация учебной информации по математике [Текст] / Е. В. Павлова // Инновации в образовании. – 2018. – № 8. – С. 41–51

30. Педагогика: Учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / Под ред. П.И. Пидкасистого. – Москва : Педагогическое общество России, 1998. – 640 с.

31. Покровский, В. П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия / В. П. Покровский. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.

32. Примерные программы основного общего образования. Математика. – Москва : Просвещение, 2009. – 96 с.

33. Рогановский, Н. М. Методика преподавания математики в средней школе [Текст] : учебное пособие / Н. М. Рогановский. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 266 с.

34. Севрюков, П.Ф. Такие разные задачи с прогрессиями / П.Ф. Севрюков // Математика в школе. – 2017 . – №7. – С. 30–35.

35. Селевко, Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х т. Т. 1./ Г.К. Селевко. – Москва : Народное образование, 2005. – 556 с.

36. Смирнова, Л. Дидактические игры как средство активизации учебного процесса / Л. Смирнова // Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете Первое сентября. – 2004. – № 8. – С. 3–5.

37. Сорокина, Е.С. Союз арифметической и геометрической прогрессий в обучении / Е.С. Сорокина, П.С. Коркина // Успехи современного естествознания. – 2012. –№5. – С. 89–90.

38. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413. [Электронный ресурс] – Режим доступа https://минобрнауки.рф/документы/2365

39. Харламов И. Ф. Педагогика: Учебник. – 5-е изд., перераб. и доп. / И.Ф. Харламов. – Москва : Гардарики, 1999. – 520 с.

40. Шабашкин, С.С. Арифметические прогрессии высшего порядка/ С.С. Шабашкин // Наука третьего тысячелетия: сборник статей Международной научно-практической конференции. – 2015. – С. 172–173.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задачи по теме «Прогрессии»

В условиях реализации образовательных стандартов нового поколения качество образовательной подготовки выпускников российских школ стало контролироваться в формате ОГЭ и ЕГЭ. Они предполагают проверку знаний, умений, ценностных отношений и накопленного опыта творческой деятельности учащихся на уровне высокой степени обобщения. Такие экзамены более обоснованно позволяют судить о глубине усвоения материала за период обучения в основной и старшей школе.

Одной из важных ступеней образования является успешная сдача ОГЭ по математике учащимися девятых классов. Задачи по теме «Прогрессии» также как и многие важные темы из курса алгебры основной школы, входит в блок заданий ОГЭ модуля «Алгебра».

На основе анализа открытого банка заданий [28] нами был составлен набор заданий по теме «Прогрессии», в котором задачи разделены по типам. Приведем примеры и решение заданий каждого типа.

I Блок – Арифметическая прогрессия [28]:

Задание 1: Выписаны четыре члена арифметической прогрессии: …; -9; x; -13; -15; … Найдите x.

Решение: найдем разность данной прогрессии $d = -15 - (-13) = -15 + 13 = -2$. По определению арифметической прогрессии получаем: $x = -9 - 2 = -11$.

Ответ: -11.

Задание 2: В первом ряду кинозала 24 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в восьмом ряду?

Решение: Исходя из условий задачи, очевидно, что нам даны первый член арифметической прогрессии и её разность: $a_1 = 24$, $d = 2$. Найдем $a_8 = a_1 + d. (8 - 1) = 24 + 2 \cdot 7 = 24 + 14 = 38$.

Ответ: 38.

Задание 3: В арифметической прогрессии (a_n) дан десятый и пятнадцатый члены: $a_{10} = 19$, $a_{15} = 44$. Найдите разность этой прогрессии.

Решение: $a_{10} = 19$, $a_{15} = 44$, но в то же время $a_{10} = a_1 + 9d$, $a_{15} = a_1 + 14d$, получаем систему $\begin{cases} a_1 + 9d = 19 \\ a_1 + 14d = 44 \end{cases}$, решив ее, найдем искомую разность. $(19 – 9d) = (44 – 14d)$, $(–9d + 14d) = (44 – 19)$, $5d = 25$, следовательно, $d = 5$.

Ответ: 5.

Задание 4: Дана формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = 3{,}8 - 5{,}7n$. Найдите её шестой член.

Решение: $a_6 = 3{,}8 – 5{,}7 \cdot 6 = –30{,}4$.

Ответ: –30,4.

Задание 5: Выписаны три первые члена арифметической прогрессии: −7; −5; −3; … Найдите её шестнадцатый член.

Решение: исходя из условий имеем: $a_1 = –7$, $a_2 = –5$, $d = a_2 – a_1 = –5 – (–7) = 2$; $a_n = a_1 + d_{n-1}$; $a_{16} = –7 + 2 \cdot 15 = 23$.

Ответ: 23.

Задание 6: Даны три первые члена арифметической прогрессии: 25; 19; 13. Найдите первый отрицательный член этой прогрессии.

Решение: $a_1 = 25$, $a_2 = 19$, $d = a_2 – a_1 = 19 – 25 = –6$; $a_n = a_1 + d_{(n-1)}$; $a_n = 25 – 6_{(n-1)} < 0$. $25 – 6n + 6 < 0$, $–6n < –31$, $n > 5{,}16$. Т.е. $a_6 < 0$, проверим: $a_6 = 25 – 6 \cdot 5 = –5$.

Ответ: –5.

Задание 7: n-ый член арифметической прогрессии задается формулой: $a_{n+1} = a_n + 1{,}1$, а её первый член равен 0,9, найдите сумму первых 11 членов.

Решение: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$; $d = 1{,}1$. Найдем 11-ый член данной прогрессии: $a_{11} = 0{,}9 + 1{,}1 \cdot 10 = 11{,}9$; $S_{11} = \frac{(a_1 + a_{11}) \cdot 11}{2} = \frac{(0{,}9 + 11{,}9) \cdot 11}{2} = \frac{140{,}8}{2} = 70{,}4$.

Ответ: 70,4.

Задание 8: Выписаны первые три члена арифметической прогрессии: 6; 10; 14. Найдите сумму первых пятидесяти её членов.

Решение: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$; d = 10 – 6 = 4. Найдем 50-ый член данной прогрессии: a_{50} = 6 + 4 · 49 = 202; $S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = 5200$.

Ответ: 5200.

Задание 9: Дана разность арифметической прогрессии (a_n) d = −2,5 и её первый член a_1 = −9,1. Найдите сумму первых 15 её членов/

Решение: $s_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2}$. Найдем 15-ый член: a_{15} = –9,1 – 2,5 · 14 = –44,1. Подставим в формулу для нахождения суммы n первых членов: $S_{15} = \frac{(-9{,}1 - 44{,}1) \cdot 15}{2} = \frac{-798}{2} = -399$.

Ответ: –399.

II Блок – Геометрическая прогрессия [28]:

Задание 1: n-ый член геометрической прогрессии задан формулой: b_n= 64,5 · (−2) · n. Найдите b_6.

Решение: Подставим данные значения в исходную формулу: b_6 = 64,5 · (−2) · 6 = 4128.

Ответ: 4128.

Задание 2: Дан первый член геометрической прогрессии: $b_1 = -1\frac{1}{3}$, а её n-ый член задается формулой: $b_{n+1} = -3b_n$. Найдите седьмой член.

Решение: Очевидно, что знаменатель данной прогрессии q = −3, значит, найдем её седьмой член через формулу нахождения n-го члена: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow b_7 = -\frac{4}{3} \cdot (-3)^6 = -972$.

Ответ: −972.

Задание 3: Дан пятый и восьмой члены геометрической прогрессии (b_n): b_5 = −14, b_8 = 112. Найдите знаменатель данной прогрессии.

Решение: b_5 = −14, b_8 = 112, но в то же время: $b_5 = b_1 \cdot q^4$, $b_8 = b_1 \cdot q^7$, получаем систему: $\begin{cases} b_1 \cdot q^4 = -14 \\ b_1 \cdot q^7 = 112 \end{cases}$ => $\begin{cases} b_1 = \frac{-14}{q^4} \\ b_1 = \frac{112}{q^7} \end{cases}$ => $\frac{-14}{q^4} = \frac{112}{q^7}$, $\frac{q^7}{q^4} = \frac{112}{-14}$, $q^3 = -8$, $q = -2$.

Ответ: −2.

Задание 4: Даны первые три члена геометрической прогрессии: 17; 68; 272. Найдите её четвёртый член.

Решение: $b_1 = 17$, $b_2 = 68$, значит, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{68}{17} = 4$. Любой член геометрической прогрессии можно найти по формуле: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, значит, $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 17 \cdot 4^3 = 1088$.

Ответ: 1088.

Задание 5: Знаменатель геометрической прогрессии (b_n) равен 2, её первый член равен 16. Найдите четвертый член данной прогрессии.

Решение: Любой член геометрической прогрессии можно найти по формуле: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, значит, $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 16 \cdot 2^3 = 16 \cdot 8 = 128$.

Ответ: 128.

Задание 6: Даны четыре последовательных члена геометрической прогрессии: 1,75; x; 28; −112. Найдите x.

Решение: знаменатель данной прогрессии равен: $q = \frac{-112}{28} = -4 \rightarrow x = 1{,}75 \cdot (-4) = -7$.

Ответ: −7.

Задание 7: Даны первые три члена геометрической прогрессии: −256; 128; −64. Найдите сумму первых семи её членов.

Решение: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, найдем знаменатель прогрессии: $q = \frac{128}{-256} = -0{,}5$. Подставим в исходную формулу значения: $S_7 = \frac{-256((-0{,}5)^7 - 1)}{-0{,}5-1} = \frac{258}{-1{,}5} = -172$.

Ответ: −172.

Задание 8: n-ый член геометрической прогрессии задается формулой: $b_n = 164 \cdot (\frac{1}{2})^n$. Найдите сумму первых её четырёх членов.

Решение: Учитывая, что $b_n = 164 \cdot (\frac{1}{2})^n$, найдем первые четыре члена: $b_1 = 164 \cdot (\frac{1}{2})^1 = 82$, $b_2 = 164 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 41$, $b_3 = 164 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 20{,}5$; $b_4 = 164 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 10{,}25$. Теперь сложим все найденные значения: 82 + 41 + 20,5 + 10,25 = 153,75.

Ответ: 153,75.

Задание 9: Дана геометрическая прогрессия (b_n). $b_1 + b_2 = 160$, а $b_2 + b_3 = 40$. Найдите первые три члена этой прогрессии» [25].

Решение: исходя из условий задачи, получаем систему уравнений: $\begin{cases} b_1 + b_2 = 160 \\ b_2 + b_3 = 40 \end{cases}$, но $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_1 \cdot q^2$, следовательно, $\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q = 160 \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 40, \end{cases}$ умножим первое уравнение на $-q$: $\begin{cases} -b_1 \cdot q - b_1 \cdot q^2 = -160q \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 40, \end{cases}$ и почленно сложим два этих уравнения: $0 = 40 - 160q$, $-160q = -40$, $q = 0{,}25$ и $b_1 + 0{,}25b_1 = 160$, $1{,}25b_1 = 160$, $b_1 = 128$, $b_2 = 128 \cdot 0{,}25 = 32$, $b_3 = 32 \cdot 0{,}25 = 8$.

Ответ: 128; 32; 8.

Задание 10: В геометрической прогрессии (b_n) знаменатель равен 4, а первый член равен 0,25. Найдите сумму первых шести её членов.

Решение: поскольку сумма первых шести членов данной прогрессии находится по формуле: $S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1}$, то необходимо просто подставить данные в условии значения: $S_6 = \frac{0{,}25\,(4^6-1)}{4-1} = \frac{1023{,}75}{3} = 341{,}25$.

Ответ: 341,25.

Следующей важной ступенью образования является успешная сдача ЕГЭ по математике учащимися одиннадцатых классов. С 2015 года ЕГЭ по математике разделили на две части: базовую и профильную. Базовая часть сдаётся абсолютно всеми учащимися, профильная часть – предназначена только для тех, кто планирует поступать в ВУЗ.

Анализ материалов ЕГЭ за период с 2015 по 2019 показал, задачи на тему «Прогрессии» встречаются среди заданий повышенной сложности. Как правило, это 11 и 19 задачи. Стоит отметить, что среди заданий базового уровня таких задач не встречается.

Рассмотрим подробнее задание №11:

Задание 1. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение: Пусть бригада в первый день покрасила a_1 метров забора, во второй – a_2, … , в последний – a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за n дней было покрашено: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 30n$ метров забора. Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240$, следовательно, $n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8.

Задание 2. Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 метра тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

Решение:Пусть рабочие в первый день проложили a_1 метров тоннеля, во второй –a_2 , …, в последний –a_{10} метров тоннеля. Длина тоннеля $S_n = 500$ метров $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, $n = 10$ дней. Тогда в последний день рабочие проложили $a_{10} = \frac{2S_n}{n} - a_1 = \frac{1000}{10} - 3 = 97$ метров. Таким образом, рабочие в последний день проложили 97 метров тоннеля.

Ответ: 97.

Задание 3. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

Решение: Поскольку каждый год прибыль увеличивалась на 300%, она увеличивалась в 4 раза по сравнению с предыдущим годом. Ищем четвертый член геометрической прогрессии: за 2003 год Бубликов заработал $5000 \cdot 4^3 =$ 320000 руб.

Ответ: 320000.

Задание №19:

Задание 1. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$)

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

Решение:

а) Да, может. Числа 2, 3, 4, 5 составляют арифметическую прогрессию, их сумма равна 14.

б) Пусть a – первый член, d – разность, n – число членов прогрессии, тогда их сумма равна $\frac{2a+d(n-1)}{2}n$. Чтобы количество членов было наибольшим, первый член и разность должны быть наименьшими. Пусть они равны 1, тогда по условию $\frac{n(n+1)}{2} < 900$ Наибольшее натуральное решение этого неравенства $n = 41$. Такой результат получается при прогрессии $1 + 2 + \ldots + 41 = 861$.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии имеем: $\frac{2a+d(n-1)}{2}n = 123$, $(2a + d(n-1)) \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot 41$.

Таким образом, число членов прогрессии n является делителем числа 246. Если $n \geq 41$ то левая часть больше 246: $(2a + d(n-1)) \cdot n \geq 42 \cdot 41 > 246$, следовательно, $n > 41$. Поскольку $n \geq 3$ получаем, что $n = 3$ или $n = 6$.

Прогрессии из трёх и шести членов с суммой 123 существуют: например, 40, 41, 42 и 3, 10, 17, 24, 31, 38.

Ответ: а) да; б) 41; в) 3; 6.

Задание 2. Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, ….

а) Существует ли арифметическая прогрессия длины 5 составленная из членов этой последовательности?

б) Можно ли составить арифметическую прогрессию бесконечной длины из этих чисел?

в) Может ли в прогрессии быть 2013 членов?

Решение:

а) Рассмотрим последовательность: $\frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{60}, \frac{1}{120}$. Легко видеть, что это прогрессия с разностью $-\frac{1}{120}$.

б) Пусть существует бесконечная арифметическая прогрессия, все члены которой являются членами данной последовательности. Пусть, для определенности, первый член этой прогрессии равен a_1, а разность этой прогрессии равна $d < 0$. Тогда возьмем натуральное n такое, что $nd < -1$. Тогда получим, что $a_{n+1} = a_1 + nd < 1 - 1 = 0$. Значит, $(n + 1)$-ый член прогрессии отрицательный, а этого не может быть.

в) Рассмотрим следующую арифметическую прогрессию: $\frac{1}{2013!}, \frac{2}{2013!}, \frac{3}{2013!}, \dots, \frac{2013}{2013!}$. Ясно, что каждая из этих дробей является членом данной последовательности.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

Задание 3: В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2076.

а) может ли в последовательности быть три члена?

б) может ли в последовательности быть четыре члена?

в) может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

Решение:

а) Нет, поскольку $1 + 2076$ не делится на 2, а 2076 не является квадратом натурального числа.

б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку $2076 – 1$ не делится на 3.

Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку 2076 не является кубом натурального числа.

Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, то эти числа: $1, q, q^2, 2q^2 - q$, но уравнение $2q^2 - q - 2076 = 0$ не имеет целых корней.

Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, то эти числа: $1, a + 1$ и $2a + 1$ где a – натуральное число. Тогда последнее число должно равняться

$$\frac{(2a+1)^2}{a+1} = 4a + \frac{1}{a+1}$$

но это не натуральное число.

в) Да, например, 1, 2, 4, 6, 8, …, 2076.

Ответ: а) Нет, б) нет, в) да.

Приложение Б

Диплом

Всероссийский конкурс научно-исследовательских работ
«Вклад молодёжи в развитие современной науки и техники»

Диплом

3 место

награждается

Клеветова Наталья Александровна

студентка 5 курса,
физико-математического факультета

ЛПИ-филиал СФУ

Номинация: *Педагогика и психология*

Конкурсная работа: *«Методика изучения прогрессии»*

Дата участия: *апрель 2019 г.*

Председатель жюри,
кандидат исторических наук,
профессор Российской
Академии Естествознания

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИДЕЙ «НОВАЦИЯ» ВСЕРОССИЙСКОЕ СМИ

Н.В.Камерова

Организатор конкурса: Всероссийское СМИ Академия педагогических идей «Новация»
(свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015г.,
выдано Роскомнадзором РФ)

Сайт: akademnova.ru, e-mail: akademnova@mail.ru